Image par homographie de mots de Christoffel

Jean-Pierre Borel*

Résumé

Le but de cet article est de montrer que les transformations homographiques sur les mots de Christoffel se réalisent à l'aide de transducteurs, c'est à dire que si u_z est le mot de Christoffel associé au nombre réel z et si h est une transformation homographique, il existe un transducteur $\mathbf{T} = \mathbf{T}_h$ tel que $u_{h(z)} = \mathbf{T}(u_z)$. On retrouve ainsi certains cas particuliers qui correspondent à des transformations par certaines substitutions, ou à des suppressions périodiques de 0 ou de 1.

Abstract

We prove that every homographic transformation can be realised on Christoffel words using tranducers. Some already known results, concerning particular substitions or periodic cancellation of letters, appear as special cases of this general result.

1 Introduction

Il existe de nombreuses façons de représenter des nombres entiers, rationnels, réels. Le développement décimal est bien connu, le développement en fraction continue également. Pour chacune de ces représentations, le problème de réaliser les opérations élémentaires se pose. La manipulation de développements dans une base donnée est bien connue. Le problème devient plus compliqué si l'on représente les nombres autrement.

Dans le cas d'une représentation d'un nombre par son développement de Farey ou, ce qui en est très voisin, par son développement en fraction continue, le problème a été souvent étudié, voir par exemple [7, 17]. Une réponse est contenue dans les travaux de Raney [18, 20]. La multiplication par un nombre rationnel donné se fait

*Cette recherche a été partiellement aidée par le Conseil Régional du Limousin

alors à l'aide d'un transducteur, que l'on peut contruire effectivement, lorsque le nombre rationnel est connu. Cette construction est un peu complexe à mettre en pratique, mais se prête aisément à une programmation informatique, voir [1, 15, 18, 20].

Le but de ce travail est d'étudier le cas où un nombre réel est représenté par son mot de Christoffel, mot fini ou infini sur l'alphabet $\{0,1\}$. Ici également, des transducteurs permettent de réaliser les transformations homographiques. Certains résultats ont fait l'objet d'une première présentation dans [4]. Une autre approche du problème a été réalisée, dans un cadre plus limité, voir [13, 14]

2 Mot de Christoffel

Les mots de Christoffel infinis sont un cas particulier des mots sturmiens, étudiés par de très nombreux auteurs, et depuis longtemps : on en trouve trace dans les travaux de Bernoulli [2] au dix-huitième siècle. Ils ont été réintroduits par Morse et Hedlund [9, 10], et ont des propriétés dont l'intérêt déborde du champ des mathématiques, voir par exemple [12].

La énième lettre du mot de Christoffel u_z associé au nombre réel positif z s'écrit $u_z(n) = \lfloor (n+1)z \rfloor - \lfloor nz \rfloor - \lfloor z \rfloor$, qui vaut soit 0 soit 1. Ce type de formule n'est pas utile ici.

2.1 Définition géométrique

Il existe également une définition géométrique du mot de Christoffel, bien plus intéresssante ici : les démonstrations des résultats obtenus dans cet article se font par des considérations de géométrie plane.

Soit z un nombre réel positif. On trace la demi-droite de pente z, issue de l'origine, sur le quadrillage unitaire du quart de plan positif. Il existe alors un trajet sur ce quadrillage immédiatement en dessous de la demi-droite, le "en dessous" étant pris au sens strict à l'exception du point origine. Ce trajet se développe vers la droite et le haut, il peut donc être codé, sous la forme d'une suite infinie de 0 et de 1, en codant 0 un segment horizontal unité et 1 un segment vertical unité.

On appelle mot de Christoffel (voir [6]) associé à z le mot représentant ce trajet, mot infini sur l'alphabet $\{0,1\}$.

2.2 Le cas rationnel

Si z est un nombre rationnel positif, soit $z = \frac{p}{q}$ écrit sous forme irréductible, la demi-droite précédente passe par un premier point entier, le point M de coordonnées (q,p). Le mot fini codant le trajet reliant O et M sur le quadrillage et immédiatement en dessous du segment OM est appelé mot de Christoffel fini associé à $\frac{p}{q}$. On le note $v_{\frac{p}{q}}$, pour le différencier du mot infini $u_{\frac{p}{q}}$. Il est très facile de voir que l'on peut écrire $v_{\frac{p}{q}} = 0w1$, et qu'alors $u_{\frac{p}{q}} = 0(w01)^\infty$. Le mot infini $v_{\frac{p}{q}}{}^\infty$ correspond alors au trajet en dessous au sens large de la demi-droite de pente $\frac{p}{q}$. La seule différence entre les mots

$u_{\frac{p}{q}}$ et $v_{\frac{p}{q}}{}^{\infty}$ vient donc du changement des blocs 01 en 10, aux endroits correspondant aux points entiers sur la droite D, c'est à dire avec une période $p+q$.

3 Résultats

Nous nous intéressons au lien entre les mots de Christoffel u_z et $u_{h(z)}$, où h est une homographie. Cette homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ sera supposée écrite avec des coefficients positifs ou nuls, pour que $\mathbb{R}_+$ soit stable par h, tels que $\mathrm{pgcd}(a,b,c,d) = 1$, dans toute la suite.

Comme dans le cas des fractions continues, le mot $u_{h(z)}$ s'obtient comme image par un transducteur déterministe fini du mot u_z. Ce transducteur, noté $\mathbf{T}_h$, se détermine facilement. Dans le cas simple de la multiplication par un nombre rationnel, il peut également être vu comme un mécanisme de suppression périodique de 0 et de 1.

Lorsque l'on s'interesse cas rationnel, c'est à dire aux mots finis $v_{\frac{p}{q}}$ et $v_{h(\frac{p}{q})}$, le mécanisme est analogue, mais un peu plus complexe techniquement, notamment lorsque la fraction $\frac{ap+bq}{cp+dq}$ n'est pas irréductible.

3.1 Transducteur

Un transducteur (déterministe, fini) est un système de réécriture de mots sur un alphabet fini, ici $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Il consiste en un nombre fini d'états, dont un est l'état initial, et pour chaque état, d'un ensemble de débuts $\mathcal{D}_e$, appelé "code préfixe" : c'est un ensemble fini de mots finis, tel que tout mot infini commence par un et un seul de ces mots finis. Par exemple, $\{0,1\}$, ou $\{0,10,11\}$ sont des codes préfixes.

De chaque état e part une flèche par mot fini v de $\mathcal{D}_e$, qui aboutit à un (autre) état, flèche affectée d'un second mot fini w. Le système de réécriture marche alors de la façon suivante : on entre le mot par l'état initial, et on parcourt les divers états en passant par les flèches, les mots des débuts $\mathcal{D}_e$ étant remplacés chaque fois par le nouveau mot associé à la flèche correspondante. Le lecteur intéressé pourra utilement consulter [3] ou [16].

On indique alors par une transformation $v : w$ l'écriture du mot w à la place du mot v.

Lorsque, pour chaque état du transducteur, l'ensemble des débuts est égal à $\{0,1\}$, on dira que le transducteur est "séquentiel". L'intérêt d'un tel transducteur est qu'on peut y entrer n'importe quel mot fini, sans problème d'arrêt. Une substitution sur l'alphabet $\mathcal{A}$ n'est autre qu'un transducteur séquentiel à un seul état.

Par exemple, les opérations de suppression périodique de 0 ou de 1 peuvent se réaliser à l'aide d'un transducteur, dont le nombre d'états est égal à la période du phénomène. Par la suite, nous utiliserons certains d'entre eux, dont les transducteurs $\mathbf{M}_a$ et $\mathbf{D}_d$, qui ont pour but de supprimer toutes les lettres 0, sauf celles en position (dans la suite des lettres 0) congrue à 1 modulo a, respectivement toutes les lettres 1, sauf celles en position (dans la suite des lettres 1) congrue à d modulo d. A titre d'exemple, les deux transducteurs $\mathbf{M}_5$ et $\mathbf{D}_3$ sont représentés dans la figure ci-dessous, le mot ε étant le mot vide.

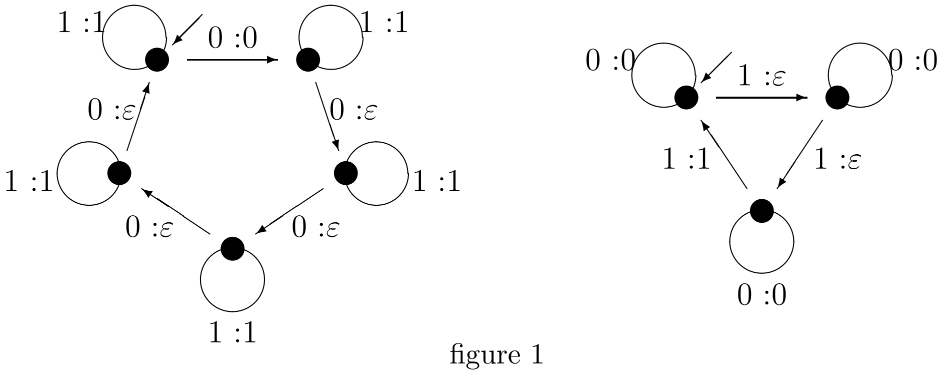


figure 1

De même, la multiplication par un nombre rationnel donné d'un nombre irrationnel, écrit à l'aide de son développement de Farey comme un mot infini sur l'alphabet $\{L, R\}$, se fait à l'aide d'un transducteur. L'ensemble des états de ce transducteur est lié à un ensemble fini de matrices 2×2 de déterminant donné, et ayant certaines propriétés. Ces résultats sont dus à Raney, [20]. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter [15, 19]. Mais dans ce cas, les transducteurs qui interviennent ne sont plus séquentiels, sauf à augmenter le nombre d'états, [8].

3.2 Le résultat central

3.2.1 Mots infinis

Théorème 1. *Soit $z \mapsto h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie à coefficients entiers positifs ou nuls, de déterminant $\Delta = ad - bc$ positif. Soit z un nombre réel strictement positif, u_z et $u_{h(z)}$ les mots de Christoffel associés à z et $h(z)$ respectivement. Il existe un transducteur séquentiel $\mathbf{T} = \mathbf{T}_h$ ayant Δ états, tel que $u_{h(z)}$ soit image de u_z par $\mathbf{T}$.*

Le transducteur $\mathbf{T}_h$ peut être calculé explicitement. Dans le cas particulier d'un déterminant $\Delta = 1$, ce transducteur est la substitution $0 \mapsto v_{\frac{b}{d}}, 1 \mapsto v_{\frac{a}{c}}$. On notera que, dans ce cas, ces deux nombres rationnels doivent être écrits sous forme irréductible. On retrouve ainsi un résultat connu, [5], chapitre IV.

3.2.2 Mots finis

Une version analogue au théorème 1 existe pour les mots finis, représentant les nombres rationnels, avec le même mécanisme que précédemment :

Théorème 2. *Avec les notations du théorème 1, et si $z = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif ou nul, écrit sous forme irréductible, on obtient le mot de Christoffel fini $v_{h(\frac{p}{q})}$ en entrant le mot $v_{\frac{p}{q}}^{\infty}$ dans le transducteur $\mathbf{T}_h$, et en arrêtant dès que le transducteur retourne à l'état initial I à la fin d'un bloc $v_{\frac{p}{q}}$. Cet arrêt arrive toujours.*

3.3 Le cas particulier de la multiplication par un nombre rationnel

Dans ce cas particulier d'une homographie $h(z) = \frac{az}{d}$, avec a et d positifs, on peut préciser la forme du transducteur $\mathbf{T}_h$, et il opère comme un mécanisme de suppression périodique de lettres 0 et 1. On retrouve alors des résultats annoncés par Rauzy dans [21], précisés par exemple par Justin et Pirillo dans [11].

Bien entendu, lorsque λ est irrationnel, la transformation $u_z \mapsto u_{\lambda z}$ ne peut pas être réalisée par un transducteur, qui transforme tout mot ultimement périodique en mot ultimement périodique.

3.3.1 Mots infinis

Théorème 3. *Soit z un nombre réel strictement positif, $a \geq 1$ un nombre entier, u_z et u_{az} les mots de Christoffel infinis associé à z et az respectivement. Alors*

$$u_{az} = \mathbf{M}_a(u_z)$$

c'est à dire qu'il s'obtient à partir de u_z en conservant les 1, et ne gardant que les 0 dont la place (parmi les 0 de u_z) est congrue à 1 modulo a.

Théorème 4. *Soit z un nombre réel strictement positif, $d \geq 1$ un nombre entier, u_z et $u_{z/d}$ les mots de Christoffel infinis associé à z et z/d respectivement. Alors*

$$u_{z/d} = \mathbf{D}_d(u_z)$$

c'est à dire qu'il s'obtient à partir de u_z en conservant les 0, et ne gardant que les 1 dont la place (parmi les 1 de u_z) est congrue à d modulo d.

On déduit évidemment de ces deux résultats que

$$u_{\frac{a}{d}z} = \mathbf{M}_a\mathbf{D}_d(u_z)$$

où $\mathbf{M}_a\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_d\mathbf{M}_a$ opère par des suppressions périodiques de 0 et de 1.

3.3.2 Mots finis

Ces deux résultats sont également valables pour des mots de Christoffel finis. Ils sont seulement un peu plus complexes à énoncer.

Théorème 5. *Soit $z = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel positif ou nul, écrit sous forme irréductible, $a \geq 1$ un nombre entier, $v_{\frac{p}{q}}$ et $v_{\frac{ap}{q}}$ les mots de Christoffel finis associé à $\frac{p}{q}$ et $\frac{ap}{q}$ respectivement. Alors :*

$$v_{\frac{ap}{q}} = \mathbf{M}_a\left(v_{\frac{p}{q}}{}^{\frac{a}{pgcd(a,q)}}\right)$$

Théorème 6. *Soit $z = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel positif ou nul écrit sous forme irréductible, $d \geq 1$ un nombre entier, $v_{\frac{p}{q}}$ et $v_{\frac{p}{dq}}$ les mots de Christoffel finis associé à $\frac{p}{q}$ et $\frac{p}{dq}$ respectivement. Alors :*

$$v_{\frac{p}{dq}} = \mathbf{D}_d\left(v_{\frac{p}{q}}{}^{\frac{d}{pgcd(d,p)}}\right)$$

Dans ces cas, cela signifie que le nombre de passages dans le transducteur de blocs $v_{\frac{p}{q}}$, indiqué au théorème 4 est égal à $a/pgcd(a,q)$ pour la multiplication, à $d/pgcd(d,p)$ pour la division.

4 Démonstration du théorème 1

4.1 Réseaux de points du plan

Dans la suite, on considère une tranformation homographique $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec des coefficients a, b, c, d entiers positifs ou nuls, globalement premiers entre eux, et de déterminant $\Delta = ad - bc$ positif.

On considère z comme la pente $\frac{y}{x}$ associée au point de coordonnées (x, y) dans le plan. La transformation h provient alors de la transformation, notée $\tilde{h}$, du plan, définie par $\tilde{h}(x, y) := (cy + dx, ay + bx)$. L'hypothèse $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ évite alors toute ambiguité.

On est alors amené à introduire plusieurs réseaux de points du plan, ou plus précisément des couples (réseau, base du réseau) :

$$\mathcal{Z} \text{ engendré par } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{Y} := \tilde{h}(\mathcal{Z}) \text{ engendré par } \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{X} := \frac{1}{\Delta}\mathcal{Z} \text{ engendré par } \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\Delta} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{W} := \frac{1}{\Delta}\mathcal{Y} \text{ engendré par } \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} \\ \frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} \\ \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{V} := \Delta\mathcal{Z} \text{ engendré par } \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix}.$$

On voit alors immédiatement que l'on a les inclusions :

$$\mathcal{X} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{V}.$$

Elles proviennent en effet de l'inclusion $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}$, qui se déduit simplement des relations :

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$$

L'hypothèse $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ entraîne en fait que Δ est le plus petit entier m tel que $\mathcal{Y} \subset m\mathcal{Z}$.

La base du réseau considérée joue ici un rôle essentiel. En effet, nous nous intéresserons seulement aux points à coordonnées positives dans ces réseaux. On parlera de "partie positive" du réseau, et on les notera $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Y}_+$, $\mathcal{X}_+$, $\mathcal{W}_+$, $\mathcal{V}_+$. Les réseaux - ou simplement leur partie positive - pourront être considérés soit comme des ensembles de points, le point (x, y) étant assimilé au vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, soit comme des "quadrillages", les côtés des mailles du quadrillage étant les vecteurs base du réseau.

lemme 1. *$\mathcal{Y}/\Delta\mathcal{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z})^2$, ayant Δ éléments.*

démonstration L'inclusion des groupes vient de l'inclusion des réseaux $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}$, et le nombre d'éléments vient de la valeur de l'aire de chacun des domaines fondamentaux, qui valent Δ et Δ^2 respectivement. ∎

4.1.1 Principe de base : trajet de Christoffel

On peut associer un "trajet de Christoffel" à tout trajet τ qui se développe à partir de l'origine O vers le haut et la droite, défini de façon paramétrique, par les coordonnées $(x(t), y(t))$ du point courant, pour $t \geq 0$, et avec :
- $x(0) = y(0) = 0$;
- x et y fonctions continues, croissantes au sens large.

Ce trajet est le codage en 0 et 1 du trajet sur le quadrillage unitaire du quart de plan positif immédiatement en dessous de τ, au sens large. Lorsque τ est une demi-droite issue de l'origine, et de pente irrationnelle, on retrouve la notion de mot de Christoffel. Il est alors simple de voir comment se construit progressivement le trajet de Christoffel.

Principe 1. *Soit τ un trajet ayant les propriétés ci-dessus. Alors le mot représentant le trajet sur le réseau des points entiers et immédiatement en dessous de τ au sens large se construit de la gauche vers la droite de la façon suivante, en faisant croître le paramètre t de 0 à l'infini :*
- *lorsque $x(t)$ dépasse une valeur entière, on ajoute une lettre 0 ;*
- *lorsque $y(t)$ atteint une valeur entière, on ajoute une lettre 1.*

Il n'y a donc aucune ambiguité dans l'ordre entre les 0 et les 1, même lorsque τ passe par un point à coordonnées entières [1].

On appellera encore trajet de Christoffel associé à un trajet se développant vers le haut et la droite, mais ne partant pas nécessairement de l'origine, le mot généré par le principe ci-dessus. Le trajet de Christoffel associé à τ s'obtient alors en concatenant les trajets liés à chacun des morceaux d'un découpage de τ. Par la suite, ce mécanisme sera utilisé pour des trajets τ en lignes brisées, dont les segments sont de pente positive.

4.2 Le transducteur T

4.2.1 Déformation des réseaux

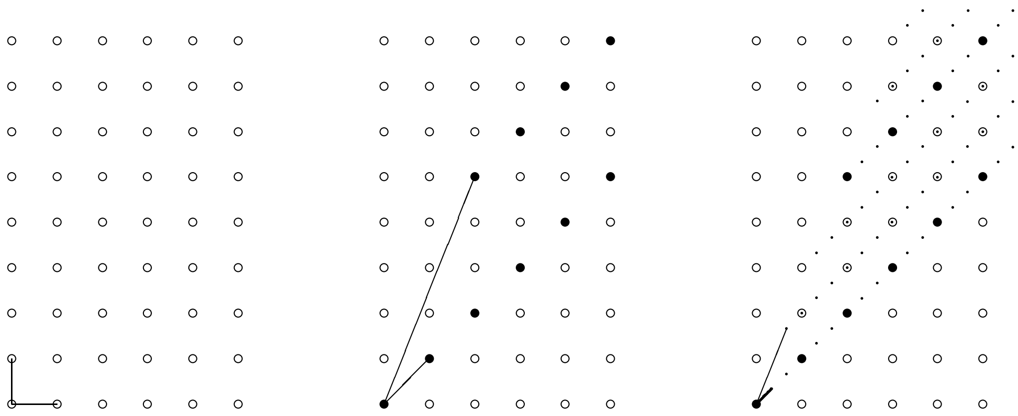
Soit z un nombre positif, D la demi-droite issue de O et de pente z. Si on désigne par D' la demi-droite issue de O et de pente $h(z)$, l'application linéaire $\widetilde{h}$ transforme $\mathcal{Z}$ et D en $\mathcal{Y}$ et D' respectivement. Le trajet sur $\mathcal{Z}$ en dessous de D et correspondant au mot u_z est transformé en un trajet τ' sur $\mathcal{Y}$ immédiatement en dessous de D', ce trajet τ' étant défini par le même mot infini u_z sur la base choisie de $\mathcal{Y}$. Il n'y a donc pas de points de $\mathcal{Y}$ entre D' et τ'.

Transformons maintenant cette figure par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\Delta}$. D' est invariante, $\mathcal{Y}$ est transformé en $\mathcal{W}$, et τ' est transformé en un nouveau trajet, noté τ'', sur le réseau $\mathcal{W}$, correspondant au mot infini u_z sur la base choisie $\{(\frac{d}{\Delta}, \frac{b}{\Delta}), (\frac{c}{\Delta}, \frac{a}{\Delta})\}$ de $\mathcal{W}$. Il n'y a pas de point de $\mathcal{W}$ entre D' et τ''. En particulier, il n'y a pas de point de $\mathcal{Z}$ entre D' et τ''. Le mot de Christoffel associé à $h(z)$ s'obtient donc à partir du trajet τ'', dont c'est le trajet de Christoffel. En effet, τ'' est (sauf en l'origine) strictement en dessous de D'. Les points entiers de τ'' sont strictement en dessous de D', donc à conserver.

Les figures ci-dessous correspondent aux constructions précédentes, dans le cas de l'homographie $h(z) = \frac{5z+1}{2z+1}$ et avec $z = 0,715\ldots$, d'où $u_z = 0010100101\ldots$. Seules les parties positives $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Y}_+$ et $\mathcal{W}_+$ sont représentées, respectivement par des gros points blancs, des gros points noirs, des petits points noirs. Ici, $\Delta = 3$.

---

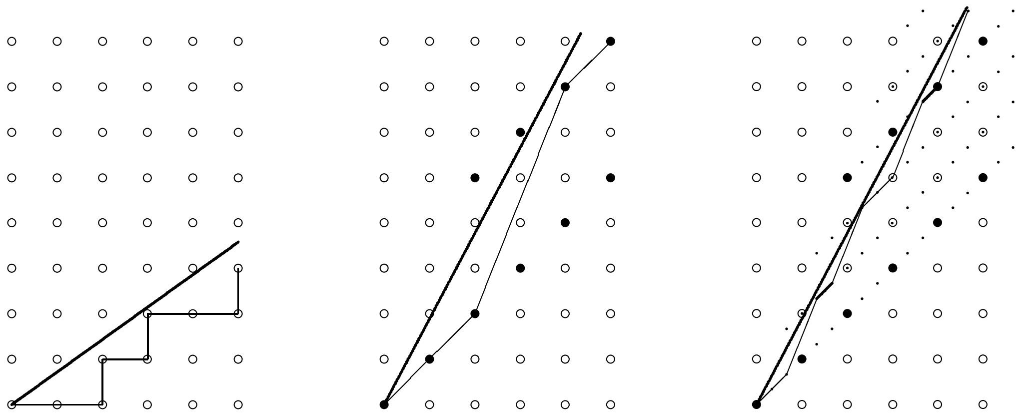
[1] Si on considère le trajet immédiatement en dessous, au sens strict, il faut modifier ce principe en générant un mot 01 quand τ passe par un point entier autre que l'origine, au lieu d'un 10.



$\mathcal{Z}_+$ $\mathcal{Z}_+$ et $\mathcal{Y}_+$ $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Y}_+$ et $\mathcal{W}_+$

figure 2

On peut maintenant faire figurer les tracés τ, τ' et τ'' :



D et τ D' et τ' D' et τ''

figure 3

4.2.2 Lien entre les tracés

Soit σ le tracé sur $\mathcal{Z}$ associé à $u_{h(z)}$. Alors σ est le tracé sur $\mathcal{Z}$ immédiatement en dessous de D', et donc immédiatement en dessous de τ'' puisqu'il n'y a pas de point de $\mathcal{Z}$ entre D' et τ''. Le problème est donc de voir comment se rabat, sur un réseau moins fin, un tracé sur un réseau.

Pour cela, il faut suivre la position des points successifs sur le trajet τ''. Ce trajet se décompose en segments, et on peut donc travailler successivement sur chaque segment, en appliquant le principe 1. Chaque segment de τ'' correspond

– soit à la lettre 0 dans le mot u_z, et donc il est associé au vecteur $\begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} \\ \frac{b}{\Delta} \end{pmatrix}$;

– soit à la lettre 1 dans le mot u_z, et donc il est associé au vecteur $\begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} \\ \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, l'origine du segment est un point du réseau $\mathcal{W}_+$. On peut donc noter $\sigma_{i,M}$ un tel segment, où i est l'une des deux lettres 0 ou 1, et M le point du réseau $\mathcal{X}_+$ origine du segment.

On voit alors que :

1. la suite des lettres i dans la suite des segments de τ'' est la suite des lettres du mot u_z ;
2. le trajet de Christoffel associé au segment $\sigma_{i,M}$, au sens du principe 1 ne dépend que de la lettre i et de la position de M modulo $\mathcal{Z}$. On le notera $u(i, M \pmod{\mathcal{Z}})$;
3. le segment suivant $\sigma_{i,M}$, noté $\sigma_{i',M'}$, est tel que M' est l'extrémité du segment $\sigma_{i,M}$, c'est à dire que M' se déduit de i et de M par les relations :

$$\text{si } i = 0, M' = M + \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} \\ \frac{b}{\Delta} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\text{si } i = 1, M' = M + \begin{pmatrix} \frac{c}{\Delta} \\ \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} \tag{2}$$

On déduit de cette relation que le point M reste sur le réseau $\mathcal{W}_+$.

On dispose donc de tous les éléments permettant de construire le transducteur $\mathbf{T}_h$, qui réalise la transformation du mot u_z en le mot $u_{h(z)}$. Ses états sont les points de $\mathcal{W}$ modulo $\mathcal{Z}$, il y en a donc Δ, les instructions sont les lettres i, les flèches relient M à M' donné par les formules (1) et (2), et l'instruction i à partir du point-état M génère l'écriture du mot $u(i, M \pmod{\mathcal{Z}})$. Enfin, le mot u_z commence par un segment horizontal issu de l'origine, et donc l'origine est le point initial du transducteur $\mathbf{T}_h$. On le notera par la suite I. Le théorème 1 est donc démontré. ■

Il est également possible d'établir ce résultat en décomposant la transformation homographique en transformations simples, que l'on traite séparement. Mais dans ce cas, le nombre d'états du transducteur final est en général plus élevé que Δ.

4.3 Construction explicite d'un transducteur

Lorsque la transformation h est donnée explicitement, la méthode décrite ci-dessus peut être détaillée, ce qui permet de construire entièrement le transducteur associé $\mathbf{T}_h$. Reprenons l'exemple du paragraphe précédent. On a alors $\Delta = 3$.

Pour éviter les dénominateurs Δ, on réalise une homothétie de rapport Δ, ce qui transforme $\mathcal{X}$, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{Z}$ en $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{V}$ respectivement. On voit sur la figure 2 que $\mathcal{Y}/\Delta\mathcal{Z}$ correspond aux trois points $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$, associés aux états notés I, B et C respectivement. Les formules (1) et (2) deviennent alors :

$$\text{si } i = 0, M' = M + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } i = 1, M' = M + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ce qui donne les flèches suivantes :

action de 0 : $I \mapsto B$; $B \mapsto C$; $C \mapsto I$;
action de 1 : $I \mapsto C$; $B \mapsto I$; $C \mapsto B$.

Enfin, l'image des lettres 0 et 1 se calcule en utilisant le principe de départ, et cela donne :

en partant de l'état I, 0 : 0 et 1 : 01 ;
en partant de l'état B, 0 : ε et 1 : 11 ;
en partant de l'état C, 0 : 1 et 1 : 101.

Ces transformations sont mises en évidence par la figure suivante, qui détaille dans chacun des six cas la construction du trajet de Christoffel associé.

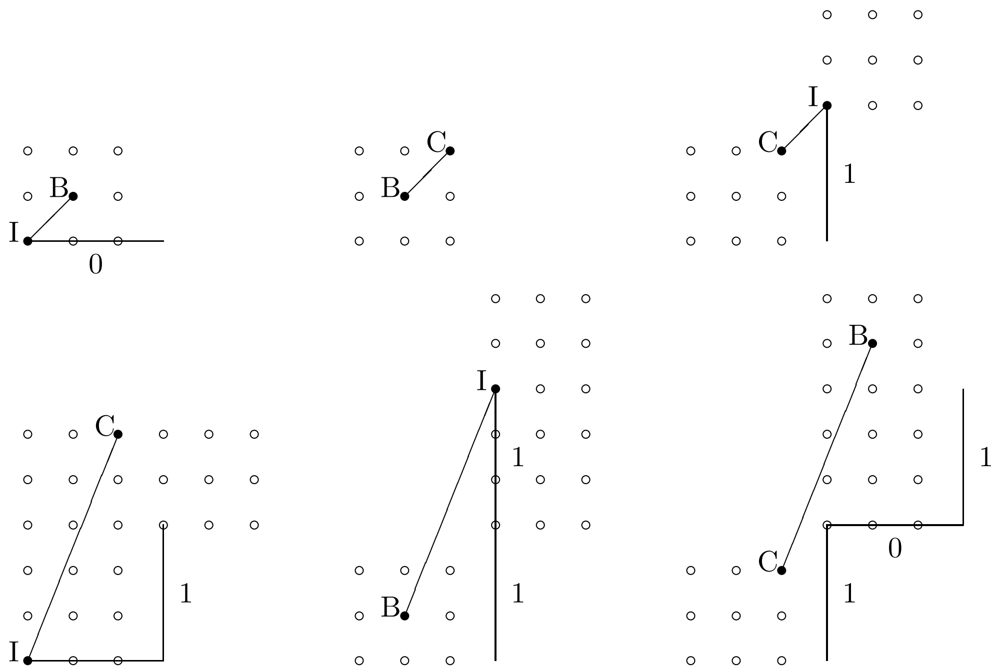


figure 4

Les trois premiers dessins correspondent à l'image par l'instruction 0 des états I, B et C respectivement, les trois derniers par l'image par 1. Voici par exemple le calcul de ce qui se passe lorsque l'on part de l'état C, qui correspond au point $(2,2)$, avec l'instruction 1 (dernier cas). La lettre 1 correspond au vecteur $(2,5)$, et ce cas est représenté dans la dernière des figures ci-dessus. On voit donc que l'on arrive à l'état B puisque $(4,7) \equiv (1,1) \pmod 3$, et la lettre 1 est transformée en le mot fini 101, puisque le segment CB traverse successivement une ligne horizontale du quadrillage, puis une verticale, puis une horizontale.

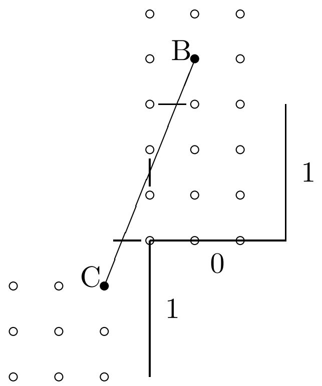


figure 5

Le transducteur **T** est donc dans ce cas le suivant :

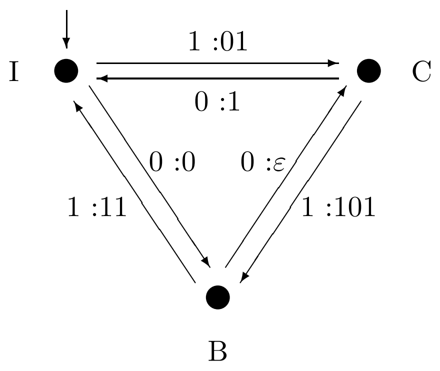


figure 6

où les trois états correspondent aux trois points I, C et B.

4.4 Le cas z nombre rationnel

Les notations sont celles du paragraphe précédent. Lorsque $z = \frac{p}{q}$, le résultat précédent est bien entendu valable pour les mots infinis u_z et $u_{h(z)}$. En effet, la seule nouveauté est que les demi-droites D et D' passent par des points à coordonnées entières, et cela n'influe pas sur la démonstration.

La démonstration peut également être refaite à l'identique, en considérant le trajet τ en dessous au sens large de D. On trouve alors le trajet au dessous, au sens large, de D' en faisant agir le transducteur $\mathbf{T}_h$. En effet, le passage de τ'' à ce trajet se fait par le principe 1, c'est à dire au sens large. Cela signifie donc que l'on a :

$$v^{\infty}_{h(\frac{p}{q})} = \mathbf{T}_h(v^{\infty}_{\frac{p}{q}})$$

Trouver le mot irréductible $v_{h(\frac{p}{q})}$, revient à trouver quand il faut s'arrêter dans le mot $\mathbf{T}_h(v^{\infty}_{\frac{p}{q}})$. Cet arrêt correspond au premier point à coordonnées entières sur la demi-droite D', qui a une pente rationnelle. Par homothétie de rapport Δ, on se ramène aux réseaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Y}$ comme en 4.3. Les points entiers deviennent alors les points de $\mathcal{V}$, c'est à dire ceux qui correspondent à l'état initial I modulo Δ.

Les points de τ' sur la droite D' correspondent, dans le mot $v^{\infty}_{\frac{p}{q}}$, aux puissances de $v_{\frac{p}{q}}$ dans la description du trajet τ' sur le réseau $\mathcal{Y}$. Donc :

- on obtient exactement le mot de Christoffel $v_{h(\frac{p}{q})}$ lorsque l'on se retrouve pour la première fois, en entrant dans le transducteur T_h le mot $v^{\infty}_{\frac{p}{q}}$, à l'état initial I au bout d'une puissance $v_{\frac{p}{q}}$. Soit m cette puissance ;
- le point d'arrivée du tracé correspondant à $v_{\frac{p}{q}}$ sur le réseau $\mathcal{Y}$ a pour coordonnées (p, q) sur ce réseau, donc $(pc + qd, pa + qb)$ sur le réseau $\mathcal{Z}$ des entiers, m est donc le plus petit entier tel que Δ divise simultanément $m(pc + qd)$ et $m(pa + qb)$. On a donc :

$$m = \text{ppcm}\left(\frac{\Delta}{\text{pgcd}(\Delta, pc + qd)}, \frac{\Delta}{\text{pgcd}(\Delta, pa + qb)}\right) = \frac{\Delta}{\text{pgcd}(\Delta, pc + qd, pa + qb)}.$$

En particulier, l'entier m divise Δ.

Le théorème 2 est donc établi. ∎

4.5 Le cas Δ négatif

On obtient le même type de résultat que précédemment, puisqu'il suffit alors d'ajouter une étape de passage à l'inverse.

5 La multiplication par un nombre rationnel

5.1 Multiplication par un nombre entier

On peut ici mieux préciser l'automate $\mathbf{T}_h$. L'homographie s'écrit $h(x) = \frac{ax+0}{0x+1}$, et donc le transducteur a $\Delta = a$ états. D'autre part, le réseau $\mathcal{Y}$ est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$. Si on regarde l'action modulo $\mathcal{V} = a\mathcal{Z}$ de l'addition par ces vecteurs, on voit que :

- la droite des états est la droite verticale des points $(y, 0)$ modulo a, avec $0 \le y \le a-1$;
- en chaque état, la lettre 1 laisse l'état invariant, et génère une lettre 1 ;
- la lettre 0 fait passer de l'état $(y, 0)$ à l'état $(y+1, 0)$, modulo a, et ne génère une lettre 0 que si on part de l'état initial $I = (0, 0)$. Dans les autres cas, elle ne génère rien : son image est le mot vide ε.

Cela établit le résultat annoncé au théorème 3, puisque les lettres 1 ne sont pas touchées, et seules les lettres 0 en position congrue à 1 modulo a sont conservées, les autres étant remplacées par le mot vide. ■

5.2 Division par un nombre entier

La démonstration est totalement analogue. On a ici $\Delta = d$, le réseau $\mathcal{Y}$ est engendré par $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et le rôle des 0 et des 1 est permuté. Le changement vient de ce que les lettres 1 sont générées lors de l'arrivée sur un multiple de Δ, donc par le 1 qui envoie l'état $(0, d-1)$ sur l'état initial $I = (0, 0)$, et donc par les lettres 1 qui sont en position congrue à d modulo d. Les autres sont rayées, et les 0 sont conservés. ■

On pourrait obtenir le même résultat en considérant le passage à l'inverse, qui est obtenu dans le cas des mots infinis par le transducteur :

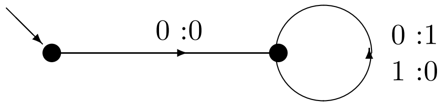


figure 7

En effet, le passage à l'inverse de la pente se traduit par la symétrie par rapport à la première bissectrice. Le trajet en dessous passe donc en dessus. Il suffit alors de remarquer que, si on enlève le premier segment, on passe de l'un à l'autre par une translation de vecteur (1,-1), et donc les mots correspondants sont égaux. Le passage se fait donc par :

- conservation de la première lettre 0 ;
- transformation des 0 en 1 et des 1 en 0 dans le reste.

Le cas des mots finis est un peu plus désagréable, puisque la dernière lettre 1 reste inchangée. Il n'y a donc plus de transducteur sur deux lettres, puisqu'il faut considérer deux copies de la lettre 1, dont une pour indiquer la fin du mot.

6 L'addition d'un nombre rationnel

Les résultats précédents s'appliquent à l'addition d'un nombre rationnel positif $\frac{p}{q}$, qui correspond à la transformation homographique $h(z) = z + \frac{p}{q} = \frac{qx+p}{q}$ de déterminant $\Delta = q^2$.

Le cas simple de l'addition d'un entier, $h(z) = z + n$ correspond à la substitution $0 \mapsto 01^n$, $1 \mapsto 1$. Le cas général $z \mapsto z+\frac{p}{q}$ se décompose en composant les trois applications :

- $z \mapsto qz$, qui se traduit sur le mot de Christoffel par le maintien des 1 et la conservation des seuls 0 en place congrue à 1 modulo q ;
- $z \mapsto z + p$, qui se traduit par la substitution $0 \mapsto 01^p$, $1 \mapsto 1$;
- $z \mapsto \frac{z}{q}$, qui se traduit par le maintien des 0 et la conservation des seuls 1 en place congrue à q modulo q.

On déduit de cette triple transformation du mot la proposition suivante.

Proposition 1. *Le mot de Christoffel $u_{z+\frac{p}{q}}$ s'obtient à partir du mot u_z par :*

- *conservation des seuls* 0 *en place (parmi les* 0*) congrue à* 1 *modulo* q *;*
- *génération de* 1 *à partir d'un compteur dans lequel on fait passer le mot* u_z *:*
  - *initialisation à* 0 *;*
  - *augmentation de* p *lorsque l'on passe la lettre* 0*, augmentation de* q *lorsque l'on passe la lettre* 1 *;*
  - *écriture d'un* 1 *à chaque fois qu'il atteint ou dépasse* q^2*, le compteur étant alors diminué de* q^2*.*

Lorsqu'une ou plusieurs lettres 1 *sont écrites en passant sur une lettre* 0 *conservée, elles sont écrites après la lettre* 0 *conservée.*

7 Résultats complémentaires

7.1 Transducteur "étrange"

Nous venons de voir que les transducteurs $\mathbf{T}_h$ associés aux homographies h avaient la propriété de transformer tout mot de Christoffel en mot de Christoffel. Il est naturel de se demander alors s'il exite d'autres transducteurs ayant cette propriété. La réponse est positive, et il est possible de combiner des transducteurs $\mathbf{T}_h$ pour obtenir de nouveaux types de transducteurs, non associés à des homographies, et laissant invariant l'ensemble des mots de Christoffel. Par exemple le transducteur suivant, à sept états :

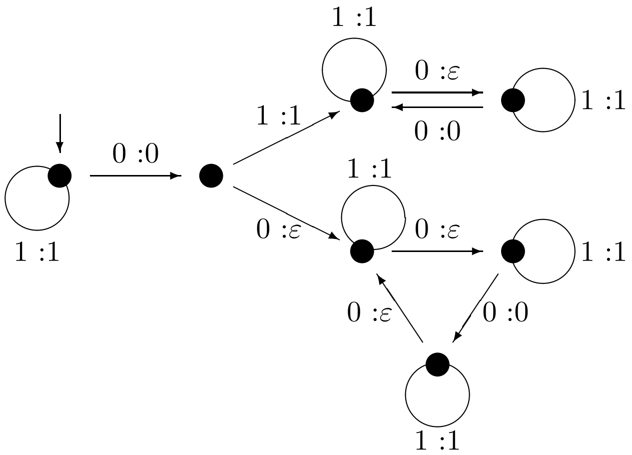


figure 8

qui est obtenu en combinant les transducteurs $\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_3$, correspond à la transformation :

$$\text{si } z < 1 : u_z \mapsto u_{3z} \,; \\ \text{si } z \geq 1 : u_z \mapsto u_{2z}.$$

Il semble cependant artificiel, et il serait intéressant de chercher s'il existe des transducteurs transformant tout mot de Christoffel en mot de Christoffel, tels que l'on puisse aller de tout état à tout autre état, et qui ne correspondent pas aux homographies.

7.2 Mot avec intercept

Au lieu de considérer, comme précédemment, les mots de Christoffel associés à une demi-droite de pente z issue de l'origine, considérons maintenant les mots $C(z,i)$ associés au trajet sur le quadrillage unitaire immédiatement en dessous, au sens strict, de la demi-droite de pente z issue du point de coordonnées $(0,i)$, avec i nombre réel positif. Ce nombre i mesure ce que l'on appelle l'intercept, écart à l'origine de l'intersection de la demi-droite et de l'axe vertical.

Considérons aussi les transformations $\mathbb{0}_{k,j}$ et $\mathbb{1}_{k,j}$ sur les mots infinis, définies pour $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k$, consistant à garder tous les 1 (resp. 0), et les 0 (resp. 1) en place j modulo k, parmi les 0 (resp. les 1). La transformation $\mathbb{0}_{k,1}$ correspond donc au transducteur $\mathbf{M}_k$, et la transformation $\mathbb{1}_{k,k}$ au transducteur $\mathbf{D}_k$.

On établit alors sans difficulté, par une méthode tout à fait analogue au théorème 1 que :

Proposition 2

$$\mathbb{0}_{k,j}(C(z,i)) = C(kz,(j-1)k+i)$$

$$\mathbb{1}_{k,j}(C(z,i)) = C(\frac{z}{k}, \frac{k-j+i}{k})$$

Cela généralise les formules déjà connues dans le cas $i = 0$ et $j = 1$ (resp. $j = k$).

L'auteur tient à remercier les rapporteurs pour leurs intéressantes suggestions.

Références

[1] M. BEELER, R. W. GOSPER, R SCHROEPPEL, "HAKMEM", Tech. Rep. 239, Artificial Intelligence Lab., MIT, Cambridge, 1972.

[2] J. BERNOULLI, Sur une nouvelle espèce de calcul, Recueil pour les astronomes, Berlin, (1772), 255-284.

[3] J. BERSTEL, Transductions and context-free languages, Teubner, 1979.

[4] J-P. BOREL, Opérations sur les mots de Christoffel, C.R.Acad. Sci. Paris 325, Sér. 1 (1997), 239-242.

[5] J-P. BOREL, F. LAUBIE, Quelques mots sur la droite projective réelle, Journal Théorie des Nombres Bordeaux, sér. II (1993), 23-51.

[6] E. B. CHRISTOFFEL, Observatio arithmetica, Annali di Matematica, sér. II, 6 (1875), 145-152.

[7] H. COHEN, Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique, Acta Arithmetica 26 (1974), 129-148.

[8] C. FROUGNY, J. SAKAROVITCH, Synchronisation déterministe des automates à délai borné, Theoretical Computer Science 191 (1998), 61-77.

[9] G.A. HEDLUND, M. MORSE, Symbolic dynamics, Amer. J. Math. 60 (1938), 815-866.

[10] G.A. HEDLUND, M. MORSE, Symbolic dynamics II : Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62 (1940), 1-42.

[11] J. JUSTIN, G. PIRILLO , Decimations and Sturmian words, Theor. Informatics and Appl., 31 (1997), 271-290.

[12] M. KANEKO, T. ODAGAKI, Self-similarity in a Class of Quadratic-Quasiperiodic Chain, J. of the Physic Soc. of Japan 62.4 (1993), 1147-1152.

[13] F. LAUBIE, E. LAURIER, Calcul de multiples de mots de Christoffel, C.R. Acad. Sci. Paris , Sér. 1 (1995), 765-768.

[14] E. LAURIER, Additions et multiplications par un entier de mots de Christoffel, thèse, Université de Limoges, 1995.

[15] P. LIARDET, P. STAMBUL, Algebraic Computations with Continued Fractions, J. of Number Theory 73 (1998), 92-121.

[16] M. LOTHAIRE, Combinatorics on Words, chap. 1, Cambridge Univ. Press, disponible à www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Lothaire/index.html.

[17] M. MENDES FRANCE, Sur les fractions continues limitées, Acta Arithmetica 23 (1973), 207-215.

[18] A. J. van der POORTEN, An introduction to continued fractions, in Diophantine Analysis, London Math. Soc. Lecture Note Series 109 (1986), 99-138.

[19] B. PARVAIX, Sur les fractions continues, Mémoire de DEA, Université de Limoges, août 1995.

[20] G. N. RANEY, On continued fractions and finite automata, Math. Ann. 206 (1973), 265-283

[21] G. RAUZY, Mots infinis en arithmétique, in Automata on Infinite words, M. Nivat, D. Perrin Editors, Lect. Notes in Computer Science, vol. 192, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

LACO, UMR CNRS, Faculté des Sciences,
123 avenue Albert Thomas F-87060 LIMOGES CEDEX
borel@unilim.fr