Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres p-Banach quotients

Bouchra Aharmim Hamid Arroub

Abstract

Let A be a p-Banach algebra and α a two-sided ideal of A with a complete p-norm stronger than the p-norm inherited from A. By integral methods, we give here a holomorphic functional calculus relatively to α which coïncides with the holomorphic functional calculus defined in $A|\alpha$ considered as a quotient quasi-Banach algebra. As application, we get a version of Šilov's decomposition theorem. We also give the spectral mapping theorem and an integral formula for the image of the k-th derivative of a holomorphic function.

1 Introduction.

Dans [10], W.Żelazko a construit dans les algèbres p-Banach un calcul fonctionnel holomorphe utilisant des méthodes d'intégrales. L.Waelbroeck a traité le calcul fonctionnel dans les algèbres de Banach quotients [7] et les a.b.m.c. complètes quotients (qu'il appelle "quasi-Banach algebras" dans [9]). Ici, nous traitons du cas des algèbres p-Banach quotients. Nous nous intéressons particulièrement au cas de fonctions à une variable comme dans [2] et [3]. En effet, avec des méthodes simples et directes, nous construisons un calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres p-Banach quotients. Pour ce faire, nous commençons par établir deux lemmes essentiels. Le calcul fonctionnel holomorphe ainsi défini explicite celui qu'on obtient en munissant ces algèbres quotients de leur structure d'a.b.m.c. complètes quotients (cf. [1], [9]). De plus, le morphisme qui le définit est un morphisme strict d'algèbres p-Banach quotients, c-à-d induit par une application linéaire continue.
Comme application, nous donnons une généralisation du théorème des idempotents

Received by the editors April 2003.
Communicated by F. Bastin.

de Šilov. Le "spectral mapping theorem" est également donné, ainsi qu'une formule intégrale pour l'image de la dérivée k-ième d'une fonction holomorphe.

2 Préliminaires

Soit A une algèbre topologique unitaire et $0 < p \leq 1$. On dit que A est une algèbre p-Banach [10] si sa topologie est définie par une p-norme complète $\|.\|$ satisfaisant $\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$ ($\forall x, y \in$A).
Soient A une algèbre p-Banach et Γ une courbe rectifiable du plan complexe. Une fonction $\varphi : \Gamma \longrightarrow A$ est dite p-admissible sur Γ [10], s'il existe une suite de fonctions $(\varphi_i)_{i\geq 1}$ complexes bornées, Riemann- intégrables sur Γ et une suite $(x_i)_{i\geq 1} \subset A$ telle que $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i(t)$ ($\forall t \in \Gamma$), avec

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \sup_{\Gamma} |\varphi_i(t)|^p < \infty.$$

Une fonction p-admissible sur Γ est Riemann-intégrable sur Γ [10]et l'on a :

$$\int_\Gamma \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \int_\Gamma \varphi_i(t)\, dt.$$

Une fonction φ d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans A est dite analytique [4] si pour tout t_0 dans Ω, il existe un voisinage $V \subset \Omega$ de t_0 et $(a_k)_{k\geq 0} \subset A$ tels que ($\forall t \in V$) $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(t - t_0)^k a_k$. Une telle fonction est p-admissible sur toute courbe rectifiable compacte incluse dans Ω (voir la preuve de la proposition 1 de [4]).
Soient A une algèbre p-Banach et α un idéal bilatère de A muni d'une p-norme d'espace complet plus fine que celle induite par A. On dit que α est un idéal p-Banachique de A, ou que (A, α) est une algèbre p- Banach quotient. On note par $A|\alpha$ l'algèbre quotient (A, α) et par A/α l'algèbre sous-jacente associée à $A|\alpha$. Les applications $\alpha \times A \longrightarrow \alpha$ et $A \times \alpha \longrightarrow \alpha$ sont continues. Le fait de prendre le même " p " n'est pas une restriction puisque toute algèbre p-Banach est aussi une algèbre q-Banach pour tout $0 < q \leq p$.
Un morphisme strict d'algèbres p-Banach quotients $\varphi : A/\alpha \longrightarrow B/\beta$ est un morphisme d'algèbres induit par une application $\varphi_1 : A \longrightarrow B$ linéaire continue telle que $\varphi_1(\alpha) \subset \beta$ et $\varphi_1(xy) - \varphi_1(x)\varphi_1(y) \in \beta$ ($\forall x, y \in A$).
Un pseudo-isomorphisme est un morphisme d'algèbres p-Banach quotients induit par une application linéaire continue surjective $\varphi_1 : A \longrightarrow B$ telle que $\varphi_1^{-1}(\beta) = \alpha$.
Comme la catégorie q-Ban [6] la catégorie des quotients p-Banachiques aura comme objets les p-Banach quotients et comme morphismes les compositions finies de morphismes stricts et les inverses des pseudo-isomorphismes.

Exemples. 1- Si A est une algèbre p-Banach et α est un idéal bilatère fermé de A, alors $A|\alpha$ est une algèbre p-Banach quotient. Une algèbre de Banach quotient est une algèbre 1-Banach quotient.
2- Soit A une algèbre p-Banach ($0 < p \leq 1$) et α un idéal de A bilatère tel qu'il

existe une algèbre p-Banach B et un morphisme continu d'algèbres $\varphi : B \longrightarrow A$ tel que $\varphi(B) = \alpha$. Si on transmet à α la p-norme de $B/Ker(\varphi)$ alors α est un idéal p-Banachique de A. Inversement, si α est un idéal p-Banachique de A et si n_α est sa p-norme, alors l'application $\|.\|_\alpha$ définie par $\|x\|_\alpha = \sup\{n_\alpha(ax)/a \in A, \|a\| \leq 1\}$ pour tout $x \in \alpha$ est une p-norme d'espace vectoriel sur α équivalente à n_α et on a $\|ax\|_\alpha \leq \|a\|\|x\|_\alpha, \forall x \in \alpha, \forall a \in A$. Donc $(\alpha, \|.\|_\alpha)$ est une algèbre p-Banach qui s'injecte continûment dans A.

3- Soient l^∞ l'algèbre des suites $a = (a_n)_n$ complexes bornées munie des opérations usuelles et $0 < p \leq 1$. l^∞ munie de la p-norme $\|a\|_\infty = \sup |a_n|^p$ est une algèbre p-Banach et $l^\infty|l^p$ est alors une algèbre p-Banach quotient.

4- Soient $o < p \leq 1$, E un espace p-Banach et $L(E)$ l'algèbre p-Banach des opérateurs linéaires bornés de E munie de sa p-norme usuelle. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $A_n(E) = \{T \in L(E)/\mathrm{rang}(T) \leq n\}$. Soit $T \in L(E)$, on pose $\alpha_n(T) = \inf\{\|T - S\|/S \in A_n(E)\}$. Soit $l^p(E) = \{T \in L(E)/\|T\|_p = \sum_{n\geq 0} \alpha_n(T)^p < \infty\}$. L'espace $l^p(E)$ muni de la p-norme $\|.\|_p$ est un idéal p-banachique de $L(E)$.

3 Calcul fonctionnel holomorphe

Soit $A|\alpha$ une algèbre p-banach quotient. On notera par 1 l'unité de A et par $\tilde{1}$ celle de A/α. Soit a dans A. spa désignera le spectre de a dans l'algèbre A et $sp_\alpha a$ désignera le spectre de $\tilde{a}$ sa classe d'équivalence dans A/α. $sp_\alpha a$ est compact non vide (la même preuve que dans [2]). $\mathcal{O}\ (sp_\alpha a)$ désignera l'algèbre des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $sp_\alpha a$, elle sera munie de la sa topologie limite inductive naturelle. On désignera par $\|.\|$ la p-norme de A et $\|.\|_\alpha$ celle de α. On notera $\chi(A/\alpha)$ le spectre global de l'algèbre quotient A/α. Si A est commutative, il est compact non vide (il est homéomorphe à $hull(\alpha) = \{\chi \in \chi(A) : \alpha \subset \ker \chi\}$) et on a pour tout $a \in A, sp_\alpha a = \{\chi(a)/\chi \in hull(\alpha)\}$.

Lemme 1 : *Si Γ est une courbe fermée de Jordan dans $\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$, alors il existe des fonctions $u : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ p-admissible dans A sur Γ et $v, w : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow \alpha$ p-admissibles dans α sur Γ telles que*

$$(a - z)u(z) + v(z) = u(z)(a - z) + w(z) = 1\ (\forall z \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a).$$

Preuve . Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$. Il existe $b_\lambda \in A$, $x_\lambda \in \alpha$ et $y_\lambda \in \alpha$ tels que

$$(a - \lambda)b_\lambda + x_\lambda = b_\lambda(a - \lambda) + y_\lambda = 1.$$

Si $\|x\|_s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x\|^n}$ désigne la norme spectrale sur A et $B_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < \|b_\lambda\|_s^{-1/p}\}$, on pose pour tout $z \in B_\lambda$, $u_\lambda(z) = b_\lambda(1 - (z - \lambda)b_\lambda)^{-1}$, $v_\lambda(z) = x_\lambda(1 - (z-\lambda)b_\lambda)^{-1}$ et $w_\lambda(z) = y_\lambda(1-(z-\lambda)b_\lambda)^{-1}$. Alors $u_\lambda : B_\lambda \longrightarrow A$ et $v_\lambda, w_\lambda : B_\lambda \longrightarrow \alpha$ sont analytiques et vérifient :

$$(a - z)u_\lambda(z) + v_\lambda(z) = u_\lambda(z)(a - z) + w_\lambda(z) = 1\ (\forall z \in B_\lambda).$$

Le théorème de partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée au recouvrement d'ouverts $(B_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a}$ donne une famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a}$ de fonctions positives C^∞

vérifiant $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda) \subset B_\lambda$, $\sum_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a} \varphi_\lambda(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a)$ et pour tout compact K de $\mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$, seul un nombre fini de φ_λ est non identiquement nul sur K.
On définit alors $u'_\lambda : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ et $v'_\lambda, w'_\lambda : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow \alpha$ par :
$u'_\lambda(z) = \varphi_\lambda(z)u_\lambda(z)$ si $z \in B_\lambda$ et $u'_\lambda(z) = 0$ sinon.
$v'_\lambda(z) = \varphi_\lambda(z)v_\lambda(z)$ si $z \in B_\lambda$ et $v'_\lambda(z) = 0$ sinon.
$w'_\lambda(z) = \varphi_\lambda(z)w_\lambda(z)$ si $z \in B_\lambda$ et $w'_\lambda(z) = 0$ sinon.
et l'on pose $u(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a} u'_\lambda(z)$, $v(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a} v'_\lambda(z)$ et $w(z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a} w'_\lambda(z)$.
Alors $u : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ et $v, w : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow \alpha$ vérifient

$$(a - z)u(z) + v(z) = u(z)(a - z) + w(z) = 1 \ (\forall z \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a).$$

De plus, u_λ est p-admissible sur toute courbe rectifiable contenue dans B_λ car, sur B_λ, $\| \sup_\Gamma |z - \lambda| b_\lambda \|_s < 1$ donc la série $\sum_{k \geq 0} \sup_\Gamma |z - \lambda|^{kp} \|b_\lambda\|^k$ converge [10]. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$ tel que $B_\lambda \bigcap \Gamma \neq \emptyset$, on pose $\Gamma_\lambda = B_\lambda \bigcap \Gamma$. Comme Γ est compact, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_{\lambda_i}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et il existe $t_1, , t_m \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$ tels que $u(z) = u'_{\lambda_i}(z) + \sum_{j=1, t_j \neq \lambda_i}^m u'_{t_j}(z)$ pour tout λ_i et pour tout z dans Γ_{λ_i}. Or u_{λ_i} est p-admissible sur Γ_{λ_i} et φ_{λ_i} est bornée sur Γ_{λ_i} donc u'_{λ_i} est p-admissible sur Γ_{λ_i}. Mais u'_{t_j} est p-admissible sur $\Gamma_{\lambda_i} \bigcap B_{t_j}$ et nulle sur $\Gamma_{\lambda_i} \backslash B_{t_j}$ donc u'_λ est p-admissible sur Γ_{λ_i} et alors aussi sur Γ.
Par ailleurs on a : $v_\lambda(z) = \sum_{k \geq 0} (z - \lambda)^k x_\lambda b_\lambda^k$ et $w_\lambda(z) = \sum_{k \geq 0} (z - \lambda)^k y_\lambda b_\lambda^k$.
Grâce à la continuité de la multiplication $\alpha \times A \longrightarrow \alpha$, les séries
$\sum_{k \geq 0} \sup_{\Gamma_\lambda} |z - \lambda|^k \|x_\lambda b_\lambda\|_\alpha^k$ et $\sum_{k \geq 0} \sup_{\Gamma_\lambda} |z - \lambda|^k \|y_\lambda b_\lambda\|_\alpha^k$ convergent sur B_λ dans α
et v_λ et w_λ sont alors p-admissibles dans α sur toute courbe rectifiable contenue dans B_λ et on continue comme pour u.

Lemme 2 : *Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes fermées simples de Jordan entourant $sp_\alpha a$ et f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant les domaines bornés délimités par Γ_1 et Γ_2. Si u, v et w sont des fonctions telles que dans Lemme 1, alors :*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)u(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)u(z)\,dz \in \alpha.$$

Preuve . On peut supposer que Γ_1 entoure Γ_2 . Notons par C la couronne délimitée par Γ_1 et Γ_2 et par ∂C sa frontière. f est holomorphe sur ∂C, elle y est donc borné et par suite fu est p-admissible sur ∂C. Mais il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$ tels que $u(z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^\infty \varphi_{\lambda_j}(z)(z - \lambda)^k b_\lambda^{k+1}$. Donc $\int_{\partial C} f(z)u(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{\partial C} \sum_{k=0}^\infty f(z)\varphi_{\lambda_j}(z)(z - \lambda_j)^k b_{\lambda_j}^{k+1}\,dz$. Comme la série sous le signe intégrale converge normalement, on obtient

$\int_{\partial C} \sum_{k=0}^\infty f(z)\varphi_{\lambda_j}(z)(z - \lambda_j)^k b_{\lambda_j}^{k+1}\,dz = \sum_{k=0}^\infty b_{\lambda_j}^{k+1} \int_{\partial C} f(z)\varphi_{\lambda_j}(z)(z - \lambda_j)^k\,dz$. La formule de Stocks permet d'écrire, pour tout $k \geq 0$:

$\int_{\partial C} f(z)\varphi_{\lambda_j}(z)(z-\lambda_j)^k\,dz = \int_C \frac{\partial \varphi_{\lambda_j}(z)}{\partial \bar{z}} f(z)(z-\lambda_j)^k\,d\bar{z}\wedge dz$. La convergence normale de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\varphi_{\lambda_j}(z)]f(z)(z-\lambda_j)^k b_{\lambda_j}^{k+1}$ permet d'écrire :

$\int_{\partial C} f(z)u(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n}\int_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{\lambda_j}(z)}{\partial \bar{z}} f(z)(z-\lambda_j)^k b_{\lambda_j}^{k+1}\,d\bar{z}\wedge dz$

$= \int_C \frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} f(z) d\bar{z}\wedge dz.$

Or, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}u(z)$ est p-admissible sur Γ dans A et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}u(z) = w(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}u(z) - u(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}v(z)$, donc elle prend ses valeurs dans α et y est p-admissible grâce encore une fois à la continuité des multiplications $\alpha\times A \longrightarrow \alpha$ et $A\times\alpha\longrightarrow\alpha$. D'où $\int_{\Gamma_1} f(z)u(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)u(z)\,dz \in \alpha$.

Ainsi arrivons-nous à notre résultat principal :

Théorème. *Soient $A|\alpha$ une algèbre p-Banach quotient et $\tilde{a}$ dans A/α. Il existe alors un morphisme d'algèbres p-Banach quotients de $\mathcal{O}$ $(sp_\alpha a)$ dans A/α qui associe à 1 l'unité $\tilde{1}$ de A/α et à $z\mapsto z$ l'élément $\tilde{a}$.*

Preuve . Fixons $a\in\tilde{a}$ et (u,v,w) tels que dans Lemme 1. Soit Ω un voisinage ouvert de $sp_\alpha a$ et Γ un contour entourant $sp_\alpha a$ et contenu dans Ω. Pour toute fonction f holomorphe sur Ω on pose

$\theta_a(f) = -1/2\pi i\int_\Gamma f(z)u(z)\,dz$ et on désignera par $\theta_{\tilde{a}}(f)$ sa classe d'équivalence modulo α.

i) $\theta_{\tilde{a}}$ est bien définie pour tout $\tilde{a}\in A$ car l'intégrale est indépendante du choix de u. En effet si (u_1,v_1,w_1) et (u_2,v_2,w_2) sont deux triplets qui vérifient Lemme 1, alors : $u_1(z)-u_2(z) = v_2(z)-v_1(z)+w_1(z)(u_1(z)-u_2(z))$ qui est p-admissible dans α sur Γ grâce à la continuité de l'application naturelle $\alpha\times A\longrightarrow\alpha$.

ii) θ_a est linéaire continue.

iii) $\theta_{\tilde{a}}(1) = \tilde{1}$ et $\theta_{\tilde{a}}(z\mapsto z) = \tilde{a}$

En effet, Lemme 2 nous permet de choisir $\Gamma = C(0,R)$, le cercle de centre 0 et de rayon R avec $R > \|a\|_s^{1/p}$, auquel cas $(a-z)$ est inversible pour tout $z\in\Gamma$ et $(a-z)^{-1}-u(z) = (a-z)^{-1}v(z)$. Or v est p-admissible sur Γ dans α et $(a-z)^{-1}$ est p-admissible sur Γ dans A [10], donc $(a-z)^{-1}-u(z)$ est p-admissible dans α et $\int_\Gamma (a-z)^{-1}\,dz - \int_\Gamma u(z)\,dz\in\alpha$ d'où $\theta_{\tilde{a}}(1) = \tilde{1}$. De même pour $\theta_{\tilde{a}}(z\mapsto z) = \tilde{a}$

iv) $\theta_{\tilde{a}}$ est multiplicative :

Notons $\theta_a(f) = f(a)$. Soient f et g dans $H(\Omega)$ et Γ_1 et Γ des contours entourant $sp_\alpha a$ et contenu dans Ω. Grce au Lemme 2, nous pouvons supposer que Γ entoure Γ_1.

On a : $f(a)g(a) = -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma_1} f(z)g(t)u(z)u(t)\,dzdt.$

Or, $u(z)u(t) = \dfrac{u(z)-u(t)+w(z)u(t)-u(z)v(t)}{z-t}$, d'où :

$$f(a)g(a) = -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma_1} f(z)g(t)\frac{u(z)-u(t)+w(z)u(t)-u(z)v(t)}{z-t}\,dzdt$$

$$= -1/4\pi^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} f(z)g(t)\frac{u(z)}{z-t}\,dzdt + 1/4\pi^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} f(z)g(t)\frac{u(t)}{z-t}\,dzdt$$
$$-1/4\pi^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} f(z)g(t)\frac{w(z)u(t)}{z-t}\,dzdt + 1/4\pi^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma_1} f(z)g(t)\frac{u(z)v(t)}{z-t}\,dzdt.$$

Notons ces intégrales dans leur ordre I, J, K et L. On a :
$f(a)g(a) = I - J + K - L$.
Or $I = -1/2\pi i \int_\Gamma f(z)u(z)\left\{-1/2\pi i \int_{\Gamma_1} \frac{g(t)}{z-t}\,dt\right\}dz = 0$
Et $J = 1/2\pi i \int_{\Gamma_1} g(t)u(t)\left\{1/2\pi i \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-t}\,dz\right\}dt$
$= 1/2\pi i \int_{\Gamma_1} g(t)f(t)u(t)\,dt = -fg(a)$.
Reste à montrer que les deux intégrales K et L sont dans α.
En effet, $K = -1/4\pi^2 \int_\Gamma f(z)w(z)\left[\int_{\Gamma_1} \frac{g(t)u(t)}{z-t}\,dt\right]dz$, et on a $z \mapsto \int_{\Gamma_1} \frac{g(t)u(t)}{z-t}\,dt$ est analytique sur Γ, à coefficients dans A, donc p-admissible sur Γ dans A. Or w est p-admissible sur Γ dans α et par suite $K \in \alpha$. On raisonne de même pour montrer que $L \in \alpha$.
Ainsi, $f(a)g(a) \equiv \theta_a(fg)$ modulo α.
En conclusion, $\theta_{\tilde{a}} : H(\Omega) \longrightarrow A/\alpha$ est un morphisme strict d'algèbres p-Banach quotients et Lemme 2 permet de passer à la limite inductive et de déduire le morphisme strict qu'on notera aussi par $\theta_{\tilde{a}} : \mathcal{O}\,(sp_\alpha a) \longrightarrow A/\alpha$.

Proposition.1. ("spectral mapping theorem").
Soit $A|\alpha$ une algèbre p-Banach quotient unitaire, non nécessairement commutative. Si $a \in A$, et $f \in \mathcal{O}\,(sp_\alpha a)$, alors $sp_\alpha(f(a)) = f(sp_\alpha a)$, où $f(a) = \theta_a(f)$.
Preuve . Si A est commutative, alors $sp_\alpha x = \{\chi(x) : \chi \in hull(\alpha)\}$ pour tout $x \in A$. Soit donc $\chi \in hull(\alpha)$. On a : $\chi(f(a)) = -1/2\pi i \int_\Gamma f(z)\chi(u(z))\,dz$ or $\chi(u(z)) = (\chi(a) - z)^{-1}$, donc $\chi(f(a)) = -1/2\pi i \int_\Gamma f(z)(\chi(a) - z)^{-1}\,dz = f(\chi(a))$.
Si A n'est pas commutative, On considère $M_a = \{b \in A : [a,b] = ab - ba \in \alpha\}$. C'est une sous algèbre unitaire de A contenant a et α. Pour $b \in A$ posons $\|b\|_a = \|b\| + \|[a,b]\|_\alpha$. Munie de cette p-norme, M_a est une algèbre p-Banach et les injections : $\alpha \longrightarrow M \longrightarrow A$ sont continues. Soit $M = \{b \in A : [b,b'] \in \alpha; \forall b' \in M_a\}$. Pour tout $b \in M$, on pose : $\|b\|' = \|b\| + \|\varphi_b\|$, où $\varphi_b : M \longrightarrow \alpha, b' \mapsto [b,b']$. M munie de cette p-norme est une algèbre p-Banach unitaire. De plus $M|\alpha$ est une algèbre p-Banach quotient et l'algèbre sous-jacente associée M/α est une sous algèbre commutative unitaire pleine de A/α.
Par ailleurs, si $\tilde{\theta} : \mathcal{O}\,(sp_\alpha a) \longrightarrow M/\alpha$ est le morphisme strict définissant le calcul fonctionnel holomorphe dans M/α, alors $\tilde{\theta} = \theta_{\tilde{a}}$ le spectre étant le même dans M/α et dans A/α et $M/\alpha \longrightarrow A/\alpha$ étant un morphisme strict d'algèbres p-Banach quotients.
Comme dans [4] on prouve que $A|\alpha$ est isomorphe - dans la catégorie q-pBan - au quotient d'une algèbre p-Banach commutative unitaire B par un idéal p-Banachique β.
Il existe donc $s : M'/\alpha \longrightarrow B/\beta$ un pseudo-isomorphisme induit par une application linéaire continue surjective $s_1 : M' \longrightarrow B$. Soient $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, les fermetures respectives

de α dans M' et de β dans B.
On considère les morphismes canoniques : $L_\alpha : M'/\alpha \longrightarrow M'/\bar{\alpha}$, $a+\alpha \mapsto a+\bar{\alpha}$ et $L_\beta : B/\beta \longrightarrow B/\bar{\beta}$, $b+\beta \mapsto b+\bar{\beta}$. Il existe alors un unique morphisme d'algèbres p-Banach $\bar{s} : M'/\bar{\alpha} \longrightarrow B/\bar{\beta}$ tel que $L_\beta \circ s = \bar{s} \circ L_\alpha$. Comme B est commutative, $sp_\beta f(s_1(a)) = f(sp_\beta s_1(a)) = f(sp_\alpha a)$. Montrons alors que $sp_\beta f(s_1(a)) = sp_\alpha f(a)$. Puisque $f \circ \bar{s}(a+\bar{\alpha}) = \bar{s} \circ f(a+\bar{\alpha})$, on a $f \circ L_\beta \circ s(\tilde{a}) = \bar{s} \circ f \circ L_\alpha(\tilde{a})$. Or $f \circ L_\alpha(\tilde{a}) = L_\alpha \circ f(\tilde{a})$, et $f \circ L_\beta(s(\tilde{a})) = L_\beta \circ f(s(\tilde{a})$, où $f(\tilde{a}) = f(a)+\alpha$ et $f(s(\tilde{a})) = f(s_1(a))+\beta$. Donc $L_\beta \circ f \circ s(\tilde{a}) = \bar{s} \circ L_\alpha \circ f(\tilde{a}) = L_\beta \circ s \circ f(\tilde{a})$. D'où $sp_{\bar{\beta}} s_1 \circ f(a) = sp_{\bar{\beta}} f \circ s_1(a)$. Or, pour tout $b \in B$, $sp_\beta b = sp_{\bar{\beta}} b$ car $hull(\beta) = hull(\bar{\beta})$ et s est un isomorphisme, donc $sp_\beta f(s_1(a)) = sp_\alpha f(a)$. En conclusion, $sp_\alpha f(a) = f(sp_\alpha a)$.

Proposition.2. (Théorème de décomposition de Šhilov) :
Soit $A|\alpha$ une algèbre p-Banach quotient. On suppose A unitaire commutative. Si $\chi(A/\alpha)$ admet une partition en deux fermés disjoints F_1 et F_2 alors il existe un idempotent propre unique $\tilde{f} \in A/\alpha$ tel que $F_1 = \{\chi \in \chi(A/\alpha) : \chi(\tilde{f}) = 1\}$ et $F_2 = \{\chi \in \chi(A/\alpha) : \chi(\tilde{f}) = 0\}$.
Preuve . Soit $\bar{\alpha}$ la fermeture de α dans A. $A/\bar{\alpha}$ est une algèbre p-Banach et on a $\chi(A/\alpha) \simeq \chi(A/\bar{\alpha})$. Si $\chi(A/\alpha) = F_1 \bigcup F_2$ avec $F_i = \bar{F_i}$ pour $i = 1, 2$ et $F_1 \bigcap F_2 = \emptyset$, alors il existe $\bar{e_1}$ dans $A/\bar{\alpha}$ idempotent propre tel que : $F_1 = \{\chi \in \chi(A/\bar{\alpha}) : \chi(\bar{e_1}) = 1\}$
et $F_2 = \{\chi \in \chi(A/\bar{\alpha})$tel que :$\chi(\bar{e_1}) = 0\}$. Soit φ définie sur $B(1, 1/3) \bigcup B(0, 1/3)$ par $\varphi = 1$ sur $B(1, 1/3)$ et $\varphi = 0$ sur $B(0, 1/3)$. Alors φ est holomorphe au voisinage de $sp_\alpha e_1$ et $\theta_{e_1}(\varphi^2) - \theta_{e_1}(\varphi) \in \alpha$. Pour tout $\chi \in F_1$, $\chi(\theta_{\bar{e_1}}(\varphi)) = \varphi(\chi(e_1)) = 1$ et pour tout $\chi \in F_2$, $\chi(\theta_{\bar{e_1}}(\varphi)) = \varphi(\chi(e_1)) = 0$.

Proposition.3. *Soit $A|\alpha$ une algèbre p-Banach quotient unitaire. Si $a \in A$, $f \in \mathcal{O}\ (sp_\alpha a)$ et Γ un contour entourant $sp_\alpha a$, alors : $\forall k \in \mathbb{N}$,*
$\theta_a(f^{(k)}) + k!/2\pi i \int_\Gamma f(z)u(z)^{k+1}\, dz \in \alpha$. Où $f^{(k)}$ est la dérivée k-ième de f.
Preuve . Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\theta_a(f^{(k)}) = -1/2\pi i \int_\Gamma f^{(k)}(z)u(z)\, dz$
$= -1/2\pi i \int_\Gamma \left(-k!/2\pi i \int_{\Gamma'} f(\lambda)(z-\lambda)^{-k-1}\, d\lambda\right) u(z)\, dz$
$= -k!/2\pi i \int_{\Gamma'} f(\lambda)\theta_a((z-\lambda)^{-k-1})\, d\lambda$, où Γ' est un contour qui entoure Γ et $sp_\alpha a$.
Or $\theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) \equiv \theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1} \equiv u(\lambda)^{k+1}$ modulo α.
Montrons que $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) - u(\lambda)^{k+1}$ est p-admissible sur Γ' dans α.
On a $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-1})$ est analytique dans A au voisinage de Γ' qui est compact, donc y est p-admissible.
Or $(a-\lambda)\theta_a((z-\lambda)^{-1}) - 1 = -1/2\pi i \int_\Gamma ((a-z)+(z-\lambda))(z-\lambda)^{-1}u(z)\, dz - 1$
$= -1/2\pi i \int_\Gamma \left[(z-\lambda)^{-1}(1-v(z)) + u(z)\right]\, dz - 1$
$= 1/2\pi i \int_\Gamma (z-\lambda)^{-1}v(z)\, dz + x$, avec $x \in \alpha$.
Or $\lambda \mapsto \int_\Gamma (z-\lambda)^{-1}v(z)\, dz$ est analytique dans α sur Γ' qui est compact donc elle y est p-admissible. Par suite, $\lambda \mapsto (a-\lambda)\theta_a((z-\lambda)^{-1}) - 1$ est p-admissible dans α. De même on montre que : $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-1})(a-\lambda) - 1$ est p-admissible dans α donc $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-1}) - u(\lambda)$ est p-admissible dans α sur Γ'. Par ailleurs,

$\theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1} - u(\lambda)^{k+1} = (\theta_a((z-\lambda)^{-1}) - u(\lambda))\sum_{n=0}^{k}\theta_a((z-\lambda)^{-1})^n u(\lambda)^{k-n}$. Or $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-1})^n u(\lambda)^{k-n}$ est p-admissible dans A pour $n = 0, ..., k$. Donc par continuité de $\alpha \times A \longrightarrow \alpha$, $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1} - u(\lambda)^{k+1}$ est p-admissible sur Γ' dans α. Reste à montrer que $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) - \theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1}$ est p-admissible dans α sur Γ'. Pour cela, supposons que c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}$ et montrons que c'est encore vrai pour $k+1$. On a donc $\theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1} = \left[\theta_a((z-\lambda)^{-k}) + g(\lambda)\right]\theta_a((z-\lambda)^{-1})$, où $\lambda \mapsto g(\lambda)$ est une fonction p-admissible dans α sur Γ'. Or
$\theta_a((z-\lambda)^{-k})\theta_a((z-\lambda)^{-1}) = -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}u(z)u(z')\,dzdz'$
$= -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z)\,dzdz'$
$+1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z')\,dzdz'$
$+1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z)v(z')\,dzdz'$
$-1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}w(z)u(z')\,dzdz'$,
avec Γ'' qui entoure Γ et est entouré par Γ'. D'autre part, $\theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) =$
$-1/2\pi i\int_\Gamma(z-\lambda)^{-k}\left(-1/2\pi i\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}\,dz'\right)u(z)\,dz$
$= -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z)\,dzdz'$.
Donc $\theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) - \theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1}$
$= -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z')\,dzdz'$
$-1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z)v(z')\,dzdz'$
$+1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z')w(z)\,dzdz' - g(\lambda)\theta_a((z-\lambda)^{-1})$.
Or, $-1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z')\,dzdz'$
$= -1/2\pi i\int_{\Gamma''}(z'-\lambda)^{-1}\left(-1/2\pi i\int_\Gamma(z-\lambda)^{-k}(z-z')^{-1}\,dz\right)u(z')\,dz' = 0$.
Et, $\lambda \mapsto -1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z)v(z')\,dzdz'$ est analytique sur Γ' à coefficients dans α, donc p-admissible dans α
De même pour $\lambda \mapsto 1/4\pi^2\int_\Gamma\int_{\Gamma''}(z-\lambda)^{-k}(z'-\lambda)^{-1}(z-z')^{-1}u(z')w(z)\,dzdz'$.
Par suite, $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) - \theta_a((z-\lambda)^{-1})^{k+1}$ est p-admissible dans α sur Γ', le dernier terme étant un produit d'une fonction p-admissible dans A et une autre p-admissible dans α. Donc $\lambda \mapsto \theta_a((z-\lambda)^{-k-1}) - u(z)^{k+1}$ est p-admissible sur Γ' dans α.
En conclusion, $\theta_a(f^{(k)}) \equiv -k!/2\pi i\int_\Gamma f(z)u(z)^{k+1}\,dz$ modulo α. ■

Remarque. Munissons A de la bornologie constituée des fermetures des enveloppes disquées des bornés idempotents. A est donc une a.b.m.c. complète et s'écrit comme limite inductive bornologique d'algèbres de Banach $A_i, i \in I$, avec $A_i \longrightarrow A$ continue pour tout i dans I. D'après [9], α s'écrit comme limite inductive de $(\alpha_{ij})_{(ij)}$ où chaque α_{ij} est un idéal de A_i muni d'une norme d'espace de Banach plus fine que celle induite par A_i et A/α est alors limite inductive de $(A_i/\alpha_{ij})_{ij}$.

Si $\tilde{a} \in A/\alpha$, alors $sp_\alpha a = \bigcap_{(i,j)\in K} sp_{\alpha_{ij}} a$, où $K = \{(i,j)/a \in A_i\}$ et $\mathcal{O}\ (sp_\alpha a) = \bigcup_{(i,j)\in K} \mathcal{O}\ (sp_{\alpha_{ij}} a)$ limite inductive bornologique. Soit $\tilde{\theta} : \mathcal{O}\ (sp_\alpha a) \longrightarrow A/\alpha$ défini comme limite inductive des morphismes $\tilde{\theta}_{ij} : \theta(sp_{\alpha_{ij}} a) \longrightarrow A_i/\alpha_{ij}$ qui définissent le calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach quotients A_i/α_{ij}, pour $i,j \in K$. $\tilde{\theta}$ est un morphisme strict d'algèbres bornologiques quotients car chaque $\tilde{\theta}_{ij}$ est strict [7].

Proposition.4. $(\forall \tilde{a} \in A/\alpha)\ (\forall f \in \mathcal{O}\ (sp_\alpha a)\ \tilde{\theta}(f) = \theta_{\tilde{a}}(f)$

Preuve . Soient $\tilde{a} \in A/\alpha$ et $f \in \mathcal{O}\ (sp_\alpha a)$. Il existe $i,j \in K$ tels que $f \in \mathcal{O}\ (sp_{\alpha_{ij}} a)$. Soit $u : \mathbb{C}\backslash sp_{\alpha_{ij}} a \longrightarrow A_i$ et $v, w : \mathbb{C}\backslash sp_{\alpha_{ij}} a \longrightarrow \alpha_{ij}$ définies comme dans Lemme 1. Elles sont de classe C^∞, [7][2]. Si $\theta_{ij} : \theta(sp_{\alpha_{ij}} a) \longrightarrow A_i$ est l'application linéaire qui induit $\tilde{\theta}_{ij}$, alors $\theta_{ij}(f) = -1/2\pi i \int_\Gamma f(z)u(z)\,dz$ où Γ est un contour entourant $sp_{\alpha_{ij}} a$. Comme u est p-admissible sur Γ dans A_i, il l'est aussi dans A. De même v et w le sont dans α. D'autre part, il existe $u_1 : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow A$ p-admissible dans A sur Γ et $v_1, w_1 : \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a \longrightarrow \alpha$ p-admissibles dans α sur Γ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash sp_\alpha a$, $(a-z)u_1(z) + v_1(z) = u_1(z)(a-z) + w_1(z) = 1$. On a : $\theta_a(f) = -1/2\pi i \int_\Gamma f(z)u_1(z)\,dz$. Or, $u_1(z) - u(z) = v(z) - v_1(z) + w_1(z)(u_1(z) - u(z))$ sur Γ donc $u_1(z) - u_2(z)$ est p-admissible dans α sur Γ, par suite $\theta_a(f) - \theta_{ij}(f) \in \alpha$.

Références

[1] G.R.Allan, H.G.Dales et J.P.Mcclure, *Pseudo-Banach algebras* , Studia Mathematica, T.XL.(1971), 55-69.

[2] M. Akkar et H.Arroub, *Calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient.* Bull. Belg. Math. Soc. 3(1996), 521-535.

[3] M. Akkar et H.Arroub, *Applications du calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient.* Bull. Belg. Math. Soc. 3(1996), 595-602.

[4] D.Przeworska-Rolewicz et S.Rolewicz, *On integrals of functions with values in a complete linear metric space.* Studia Mathematica, T.XXVI.(1966) 121-131.

[5] L.Waelbroeck, *Quotient Banach spaces. Multilinear theory.* Spectral theory. Banach Center Publications, Volume 8, PWN-Polish Scientific Publishers. Warsaw 1982. p 563-571.

[6] L.Waelbroeck, *Quotient Banach spaces ; Spectral theory.* Banach Center Publications, Volume 8, PWN-Polish Scientific Publishers. Warsaw 1982. p 553-562.

[7] L.Waelbroeck, *Holomorphic functional calculus and quotient Banach algebras* ; Studia Mathematica, TL..XXV (1983) p. 273-286

[8] L.Waelbroeck, *Quotient Frechet spaces* ; Rev. Roumaine. Math. Pures. Appl.31(1989), 2, 171-179

[9] L.Waelbroeck, *Quasi- Banach algebras, ideals and holomorphic functional calculus.* Studia Mathematica, T.LXXV. (1983) p.287-292.

[10] W. Żelazko ; *Selected topics in topological algebras*, Aarhus Universitet, lectures notes series n.31. September 1971. Matematisk institut.