アルキメデス的半順序群の可換性

小笠原藤次郎

(昭和 17 年 11 月 2 日受附)

“完全群束は可換である”, とは G. Birkhoff の豫想として, 角谷靜夫氏[1]によつて我國に紹介せられ, 之に對する證明を與へることが, 最初中山正氏[2]によつて問題とせられた。岩澤健吉氏[3]は, ベクトル束に於けるスペクトル分解定理の證明方法[4]が完全群束に適用される様に理論を構成して, この問題を解決した。問題が代數的であるから, 之を代數的に解決することが望しい。此處には, 之に對する簡單な代數的別證明を與へることと, より一般な, アルキメデス的半順序群の可換性を示すことが目的である。[5] 完全群束の場合に於ける證明は, σ-完全の場合にも, 其儘成立つ。アルキメデス的半順群に對しては, 切斷による完全化[6]により, 問題を完全群束の場合に歸着せしめて証明する。

§1. 完全群束の可換性の證明。

群束とは定義により, 右及び左からの積を作ることにより半順序が保存され, 且束となつてゐる群である。即ち, $a \leqq b$ のとき, 任意の要素 c に對し, $ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$ となることが要求されてゐる。群束は必ず配分束になることが證明されてゐる。[7]

G を群束とし, 要素 a に對し, $a \cup 1$ 及び $a^{-1} \cup 1$ を夫々 a の正部分, 負部分と云ひ, a_+, a_- で表す。また $a_+ \cup a_-$ を a の絶對値と云ひ, $|a|$ で表す。$|a| \cap |b| = 0$ なる a, b は互に直交すると云ふ。

補題 1. $a = a_+ a_-^{-1} = a_-^{-1} a_+$, $a_+ \cap a_- = 1$. 逆に $a = bc^{-1}$ (或は $a = c^{-1}b$) 且 $b \cap c = 1$ のとき, $b = a_+$, $c = a_-$ となる。

---

(1) 中山正 : 學士院紀事 **18** (昭和 17), 1-4. 1 頁脚註 (6) に據る。

(2) 中山正 : 前掲。

(3) 岩澤健吉 : 全國紙上數學談話會, **235** (昭 17), 1030-1048.

(4) 中野秀五郎 : 數學輯報, **17** (1941), 425-511.

(5) 小笠原藤次郎 : 全國紙上數學談話會, **241** (昭 17), 1282-1285. に本論文の概要が記されてゐる。

(6) A. H. Clifford : Ann. of Math., **41** (1940) 454-473. 定理 3. 中野秀五郎 : 數物記事, **23** (1941), 485-511. 附綠。

(7) G. Birkhoff 流の證明は, 中山正 : 全國紙上數學談話會, 228 (昭 16) 647-648 に與へられてゐる。

(證) 可換群束の場合と同様にして證明される。[1]

本補題により直交二要素は常に可換となること[2], 及び群束は正要素が可換のとき可換群になることが判る。

補題 2. $|a|=a\cup a^{-1}$.

(證) 可換群束の場合と同様にして證明される。[3]

補題 3. $\bigvee\limits_{\alpha} a_\alpha$ が存在するとき, $\bigvee\limits_{\alpha}(a_\alpha\cap b)$ も存在して, $\bigvee\limits_{\alpha} a_\alpha\cap b=\bigvee(a_\alpha\cap b)$ となる。

(證) 群束は配分束であるから, $\{a_\alpha\}$ 有限個の要素と共にその結びを含むものとして, 證明を行つてよいことが判る。また $b=1$ の場合の證明をすれば充分である。$\{a_\alpha\}$ の任意の要素を a_α, 或は a_β と書くと

$$
\begin{aligned}
\bigvee_{\alpha} a_\alpha &= \bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cup 1)(a_\alpha\cap 1), \qquad (\text{補題 } 1)\\
&= \bigvee_{\alpha,\beta}(a_\beta\cup 1)(a_\alpha\cap 1),\\
&= \bigvee_{\beta}(a_\beta\cup 1)\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap 1),\\
&= (\bigvee_{\alpha} a_\alpha\cup 1)\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap 1).
\end{aligned}
$$

一方補題 1 により

$$\bigvee_{\alpha} a_\alpha=(\bigvee_{\alpha} a_\alpha\cup 1)(\bigvee_{\alpha} a_\alpha\cap 1).$$

故に

$$\bigvee_{\alpha} a_\alpha\cap 1=\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap 1).$$

これで證明されたことになる。

G の部分集合 A のすべての要素と直交する要素の全体を A' で表すと, 對應 $A\to A''$ は G. Birkhoff の意味の閉苞演算[4]である。この演算で閉ぢた A, 即ち $A=A''$ を滿足する A を正規イデヤルと呼び, 一要素を含む最小の正規イデヤルを主イデヤルと云ひ $\mathfrak{A}(a)$ の形で表す。但し, この記法に於て $a\geqq 1$ と約束する。正規イデヤルは部分群であり, 且 x と共に $|y|\leqq|x|$ なるすべての y を含むことは明かである。正規イデヤルは A' なる形で特性づけられる。$\mathfrak{A}(a)$ のすべての要素に直交する要素の全体からなる正規イデヤルを $\mathfrak{A}'(a)$ で表す。以下 G を完全 (σ-完全) 群束とする。

---

(1) 小笠原藤次郎: 本紀要, **12** (昭 17) 37–100. §1, 補題 4, 5.
(2) 本節補題 1–4 は岩澤健吉: 前掲に出てゐる。
(3) 小笠原藤次郎: 前掲, §1, 補題 6.
(4) G. Birkhoff: *Lattice theory*, (1940) 第二章。

補題 4. G は $\mathfrak{A}(a)$ と $\mathfrak{A}'(a)$ の直積である。x の $\mathfrak{A}(a)$ に於ける成分は $(\bigvee_n x_+ \cap a^n)(\bigvee_n x_- \cap a^n)^{-1}$ で與へられる。

(證) $\mathfrak{A}(a)$ と $\mathfrak{A}'(a)$ の要素は直交するから互に可換，且 $\mathfrak{A}(a)$ と $\mathfrak{A}(a)$ とは 1 以外に共通要素が存在しない。故に任意の要素 x が $\mathfrak{A}(a)$ 及び $\mathfrak{A}'(a)$ の要素の積として表されることを示せばよい。$x \geqq 1$ として論じて一般性を失はない。このとき $x_1 = \bigvee_n (x \cap a^n)$, $x_2 = x x_1^{-1}$ と置くと，任意の $u \in \mathfrak{A}'(a)$ に對し，

$$x_1 \cap |u| = \bigvee_n (x \cap a^n \cap |u|) \leqq \bigvee_n (x \cap a^n \cap a^{n-1}|u|)$$
$$= \bigvee_n \{x \cap a^{n-1}(a \cap |u|)\} = 1.$$

故に $x_1 \in \mathfrak{A}(a)$. 一方

$$x_2 \cap a = x x_1^{-1} \cap a = (x \cap a x_1) x_1^{-1}$$
$$= \Big(\bigvee_n (x \cap ax \cap a^{n+1})\Big) x_1^{-1}$$
$$= x_1 x_1^{-1}$$
$$= 1$$

故に $x_2 \in \mathfrak{A}(a)$. 本補題の後半は，これから殆ど自明である。

$\mathfrak{A}(a)$ で直積因子であるから，勿論 $\mathfrak{A}(a)$ は不變部分群である。x の $\mathfrak{A}(a)$ に於ける成分をとするとき，yxy^{-1} の $\mathfrak{A}(a)$ に於ける成分は yx_1y^{-1} になることを注意する。

補題 5. $x \geqq y \geqq 1$ なる任意の x, y が可換のとき，G は可換である。

(證) G の任意の正要素 a, b の可換を示せばよい。a と $a \cup b$, 從て a^{-1} と $a \cup b$ の可換に注意すると

$$(a^{-1}b)_+ = a^{-1}b \cup 1 = a^{-1}(a \cup b) = (a \cup b)a^{-1} = 1 \cup ba^{-1} = (ba^{-1})_+.$$

同様にして，$(a^{-1}b)_- = (ba^{-1})_-$. 補題 1 から $a^{-1}b = ba^{-1}$. 故に $ab = ba$ となり，a, b の可換が證明された。

$x \geqq y \geqq 1$ に對し，$a = xyx^{-1}y^{-1}$ と置くと，x, y が可換でないときは，$a_+ > 1$ 又は $a_- > 1$ となる。この何れとしても，矛盾が起ることを云ふ。$a_+ > 1$ に對して云へば，$a_- > 1$ の場合も同様に云へる。$a_+ > 1$ とすれば，y の $\mathfrak{A}(a_+)$ に於ける成分を y_1 とするとき，$a_+ = xy_1x^{-1}y_1^{-1}$. 故に $y_1 > x^{-1}y_1x$. 從つて次の補題を證明すればよい。

補題 6. $x > y > 1$ のとき $y > x^{-1}yx$ は成立しない。

(證) $y > x^{-1}yx$ なりとし，$y_1 = x^{-1}yx$, $y_{n+1} = x^{-1}y_nx$ と置くと，$y_1 > y_2 > \cdots$.

$z=\bigwedge y_n$ とする。$z=1$ としてよい。何者，y の代りに yz^{-1} を考へると，$x^{-1}zx=\bigwedge x^{-1}y_nx=\bigwedge y_{n+1}=z$ のため，x と z は可換。故に $x^{-1}(yz^{-1})x=y_1z^{-1}$, $x^{-1}(y_nz^{-1})x=y_{n+1}z^{-1}$ となり，$\bigwedge y_nz^{-1}=(\bigwedge y_n)z^{-1}=zz^{-1}=1$ となるからである。故に $z=1$ とする。G は完全 (σ-完全) なる故，勿論アルキメデス的である。故に充分大なる自然数 p に對し，$x^{-1}y^px\nleq x$ $c=x^{-1}y^pxx^{-1}$ と置いて，x, y の $\mathfrak{A}(c_+)$ に於ける成分を x', y' とする。

$$c_+=x^{-1}y'^pxx'^{-1}>1$$

から
$$x^{-1}y^px\geqq x^{-1}y'^px>x'\geqq y'\geqq 1.$$

この不等式が成立するため $y'>1$, 從て $x'>1$ である。又 $x=x^{-1}xx$ から $x'=x^{-1}x'x$ となるから，x と x' は可換になる。故に任意の自然數 n に對し $y_n^p>x'$. 然るに

$$\bigwedge_n y_n^p=(\bigwedge_n y_n)^p=1.$$

從て $1\geqq x'>1$ となり矛盾が起る。

以上によつて，完全（或は σ-完全）群束は可換なることが完全に證明された。

§2. アルキメデス的半順序群の切斷による完全化。

群が右及び左からの積を作ることによつて，半順序が保存される半順序系で，a, b と共に $a\leqq c$, $b\leqq c$ なる c を含むとき**半順序群**と云ふ。

半順序群に於て，すべての自然數に對し，$1\leqq a^n\leqq b$ のとき $a=1$ となるとき，この半順序群はアルキメデス的と云ふ。

以下 G をアルキメデス的半順序群とする。A, B が共に空でない G の部分集合で

(1) $a\in A$, $b\in B$ のとき $a\leqq b$.

(2) A のすべての上界の集合の下界は A に屬する。

(3) B のすべての上界の集合の上界は B に屬する。

が成立つとき $[A, B]$ を**切斷**と云ひ，A 及び B をこの切斷の夫々**下類**，**上類**と云ふ。

A を G の任意の上方有界部分集合とし，A の上界の集合の下界の全体を $\underline{A}$ で表すと，$A\rightarrow\underline{A}$ は G. Birkhoff 意味の閉苞演算を定め，$A=\underline{A}$ と A がある切斷の下類とは同義になる。下方有界な B に對し，$\bar{B}$ を上述の双對的定義によつて定めると，$B=\bar{B}$ と B がある切斷の上類とは同義になる。

G_1 を切斷全体の集合とし，切斷 $[A,B]$, $[C,D]$ の間の半順序 $[A,B]\leqq[C,D]$ を $A\subset C$, 或は之と同義な $B\supset D$ に依つて定義すると，G_1 は制限的完全束であり，G の要素と，これが生成する切斷 $\bigl(A,B$ を $A=(x;\ x\leqq a)$, $B=(y;\ y\geqq a)$ に選んだもの$\bigr)$ とを恒等視するとき，G は半順序，上端，下端を保存して G_1 に埋藏される。(1) G_1 に積を定義して G_1 を群束にし，群として G が G_1 に埋藏されることを云へば，G が完全群束 G_1 に埋藏されることになる。$A=\{a_\alpha\}$, $B=\{b_\beta\}$ の記法を使ふ。

補題 1. 切斷 $[A,B]$ に對し，$\bigwedge a_\alpha^{-1}b_\beta=\bigwedge b_\beta a_\alpha^{-1}=1.$

(證) 明かに $a_\alpha^{-1}b_\beta\geqq 1$. c を $\{a_\alpha^{-1}b_\beta\}$ の下界，且 $c\geqq 1$ とすると，$b_\beta\geqq a_\alpha c$. 切斷の定義から $a_\alpha c\in A$. これから任意の自然數 n に對し，$a_\alpha c^n\in A$. 故に $a_\alpha^{-1}b_\beta\geqq c^n$. アルキメデス的の假定から $c=1$ となる。故に $\bigwedge a_\alpha^{-1}b_\beta=1$. 同様にして，$\bigwedge b_\beta a_\alpha^{-1}=1$ が證明される。

補題 2. $\bigwedge a_\alpha^{-1}b_\beta=\bigwedge b_\beta a_\alpha^{-1}$ なる A, B に對し，$[\underline{A}, \bar{B}]$ は切斷を定める。

(證) $\underline{A}$, $\bar{B}$ も本補題の假定を明かに滿足してゐるから，$A=\underline{A}$, $B=\bar{B}$ として論ずる。A^+, B^* を夫々 A の上界及 B の下界の集合とすると，$B\subset A^+$, $A\subset B^*$. 故に $B^*\subset A$ が證明出來れば，$A=B^*$ となり，$[A, B]$ は切斷となる。以下 $B^*\subset A$ の證明。$\bigwedge a_\alpha^{-1}b_\beta b_{\beta^*}^{*-1}a_{\alpha^+}^+=\bigwedge a_\alpha^{-1}(b_\beta b_{\beta^*}^{*-1})a_{\alpha^+}^+=\bigwedge a_\alpha^{-1}a_{\alpha^+}^+=1.$ 故に $1=\bigwedge(a_\alpha^{-1}b_\beta)(b_{\beta^*}^{*-1}a_{\alpha^+}^+)=\bigwedge b_{\beta^*}^{*-1}a_{\alpha^+}^+$. 從て，$a_{\alpha^+}^+\geqq b_{\beta^*}^*$, 即 B^* は A^{+*} に含まれる。然るに $A^{+*}=\underline{A}=A$. 故に $B^*\subset A$.

$A\cdot B$ で A の要素と B の要素のこの順に於ける積の全体を，A^{-1} で A の要素の逆要素の全体を表すことにする。

切斷 $[A,B]$, $[C,D]$ に對し

$$\bigwedge(a_\alpha c_\gamma)^{-1}(b_\beta d_\delta)=\bigwedge c_\gamma^{-1}(a_\alpha^{-1}b_\beta)d_\delta=\bigwedge c_\gamma^{-1}d_\delta=1$$

$$\bigwedge(b_\beta d_\delta)(a_\alpha c_\gamma)^{-1}=\bigwedge b_\beta(d_\delta c_\gamma^{-1})a_\alpha^{-1}=\bigwedge b_\beta a_\alpha^{-1}=1.$$

故に $[\underline{A\cdot C}, \overline{B\cdot D}]$ は切斷を定める。(補題 2)。$[A,B]$, $[C,D]$ の積として $[\underline{A\cdot C}, \overline{B\cdot D}]$ と定義すると，G に於ける積はこの定義で保存されることがすぐ判る。G の單位 1 に對する G_1 の要素を矢張り 1 と書くと，$[A,B]$ が切斷のとき $[B^{-1}, A^{-1}]$ も切斷で $[A, B]\cdot[B^{-1}, A^{-1}]=1$ なることが判る。G_1 で結合則の成立を證明する。切斷 $[A,B]$, $[C,D]$, $[E,F]$ に對し，

(1) G. Birkhoff：前掲，定理 2, 13. こゝでは A 或は B が空なものも考へられる。

$$[A, B]\cdot([C, D]\cdot[E, F])=[A, B]\cdot[\underline{C\cdot E},\ \overline{D\cdot F}]=[\underline{A\cdot(C\cdot E)},\ \overline{B(D\cdot F)}]$$

$$=[\underline{A\cdot C\cdot E},\ \overline{B\cdot D\cdot F}] \qquad (\text{補題 } 2)$$

$$([A, B]\cdot[C, D])\cdot[E, F]=[\underline{A\cdot C},\ \overline{B\cdot D}]\cdot[E, F]=[\underline{(A\cdot C)\cdot E},\ \overline{(B\cdot D)\cdot F}]$$

$$=[\underline{A\cdot C\cdot E},\ \overline{B\cdot D\cdot F}] \qquad (\text{補題 } 2)$$

から結合則が成立つ。次に右及び左からの積に對しては,

$$[C,\ D]\geqq[E,\ F] \text{ とすると } C\cdot A\supset E\cdot A,$$

従て $[C, D]\cdot[A, B]\geqq[E, F]\cdot[A, B]$. 左からの積による半順序の保存も同様に證明される。

以上によつて，アルキメデス的半順序群 G は完全群束 G_1 に埋藏されることが判つた。よつて次の定理(1)を得る。

定理 1. アルキメデス的半順序群 G は積，半順序，上端，下端を保存して，完全群束 H に埋藏される。もし H の各要素が G の要素のある集合の下端のとき，H は切斷による完全化 G_1 になる。

本定理の後半は殆ど自明である。

完全群束の可換性から,

定理 2. アルキメデス的半順序群は可換である。

の成立が判る。

本研究に於て御懇切な御指導を賜つた前田教授に深く感謝する。尙本研究は文部省科學研究費の補助によつてなつものである。

廣島文理大數學教室

---

(1) Clifford: 前掲，定理 3. Clifford のアルキメデス的の條件は本節に述べたものと形の上で異なるが，全く同義のものであることは容易に確められる。定理 1 は定理 2 により，Clifford の定理 3 に過ぎない。