

Fréchet 束 に 就 て (I)

小 笠 原 藤 次 郎

(昭和 17 年 11 月 2 日受附)

L. Kantorovitch⁽¹⁾による (o)-連続な計量をもつベクトル束の研究により、ベクトル束の“正則”性⁽²⁾の概念の重要性が明かになった。本論文は、この計量を特殊化して、Banach 束の定義に並行に、Fréchet 束の概念を導入し計量と種々の型の“正則”性との間の関係を調べることを目的とする。

§1 では、Fréchet 束の定義と、Fréchet 束が種々の型の“正則”ベクトル束となるための条件を調べた。§2 では、Banach 束は一種の Fréchet 束になることを注意して、 K_0 型“正則”Banach 束と K -空間⁽³⁾との一致を証明し、 $[0, 1]$ 上の可測函数の S 空間、及び列空間 (s) がノルムの導入により Banach 空間となし得ないと云ふ周知の事実を結論の一部とする様、束論的構成を試みた。§3 では、Bochner 束の構造について簡単な考察を行つた。

§1. “正則”Fréchet 束。

ベクトル束 X の各要素 x に實数 $\rho(x)$ が對應し

(I) $\rho(x) \geq 0$, x が 0 のときに限り $\rho(x) = 0$.

(II) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

(III) $|x| \leq |y|$ のとき $\rho(x) \leq \rho(y)$

を満足するものとする。

λx が λ 或は x の函数と考へて ρ に関して連続にして、且 X が ρ に関して完備のとき、 X を **Fréchet 束**と呼ぶ⁽⁴⁾

補題 1. $x \cup y, x \cap y$ は計量 ρ に関して x, y の一様連続函数である。

(證) $|x \cup y - x' \cup y'| \leq |x - x'| + |y - y'|$, $|x \cap y - x' \cap y'| \leq |x - x'| + |y - y'|$ と (II), (III) から。

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 121-165. §8. 型 R_3 の空間は、 $y_1 < y_2$ のとき $\rho(y_1) < \rho(y_2)$ を $\rho(y_1) \leq \rho(y_2)$ で置きかへても、矢張り“正則”ベクトル束になる。

(2) ベクトル束の正則は“正則”で表し、Banach 空間の正則は單に正則で表す。

(3) L. Kantorovitch and B. Vulich: Compositio Math. **5** (1937), 119-165 の $\mathfrak{R}_2$ 空間と同義のもの。小笠原藤次郎、本紀要, **12** (昭 17), 37-100. 参照。

(4) この定義から Banach 束は Fréchet 束である。

補題 2. $\rho(x_n - x) \rightarrow 0, \rho(y_n - y) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) 且 $x_n \geq y_n$ のとき, $x \geq y$ が成立つ。

(證) 補題 1 から。

定理 1.⁽¹⁾ X が Fréchet 束ならば, ρ に関する収斂と相対一様 (*)-収斂は同義である。

(證) $\rho(x_n - x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) のとき $\rho(n(x_{i_n} - x)) \leq \frac{1}{2^n}$ なる $i_1 < i_2 < \dots$ が存在する。 X は完備なる故, $u = \sum_n n |x_{i_n} - x|$ は存在して, $|x_{i_n} - x| \leq \frac{1}{n} u$ となる。これから, ρ に関する収斂と相対一様 (*)-収斂の同義が容易に證明される。

次の条件を考へる。

(IV) $x_n \downarrow 0$ のとき, $\rho(x_n) \downarrow 0$

条件 (IV) は, $\rho(x)$ が x の函數として (o)-連續 (從て (*)-連續) なることを意味する。

補題 3. X が σ -完全ベクトル束にして, (IV) を満足するとき, X が ρ に関して完備なるための条件は

(V) (o)-有界でない正要素の列 $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ に對して, $\lim_n \lim_p \rho(x_{n+p} - x_n) > 0$. が成立つことである。

(證) X を ρ に関して完備とする。(V) の $\{x_n\}$ に對し, $\lim_n \lim_p \rho(x_{n+p} - x_n) = 0$ とすれば, X の完備から $\rho(x_n - x) \rightarrow 0$ なる x が存在し, 補題 2 により, $\{x_n\}$ は (o)-有界となり, 矛盾が起る。逆に X が (V) を満足するとする。 $\{x_n\}$ を ρ に関する任意の基本列とすると, $\rho(x_{i_n} - x_{i_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ なる $i_1 < i_2 < \dots$ が存在する。 $\{x_{i_n}\}$ は (o)-有界となる。何者, $\{\sum_{p=1}^n |x_{i_p} - x_{i_{p+1}}|\}$ に (V) を適用すればすぐ判る。 $\bar{x}_p = \bigvee_{n \geq p} x_{i_n}, \bar{x} = \bigwedge_n \bar{x}_p, \underline{x}_p = \bigwedge_{n \geq p} x_{i_n}, \underline{x} = \bigvee_n \underline{x}_p$ と置くと,

$$x_{i_n} \cup x_{i_{n+1}} \cup \dots \cup x_{i_m} - x_{i_n} \cap x_{i_{n+1}} \cap \dots \cap x_{i_m} \leq \sum_{j=n}^{m-1} |x_{i_j} - x_{i_{j+1}}|$$

を使つて $\rho(\bar{x}_n - \underline{x}_n) \leq \frac{1}{2^n}$ 故に $\rho(\bar{x} - \underline{x}) = 0$, 即ち $\bar{x} = \underline{x}$ となり $\{x_{i_n}\}$ は $\bar{x}$ に

(1) Banach 束に對してこの定理は G. Birkhoff により證明された。G. Birkhoff: *Lattice theory*, (1940), 定理 7.21.

(o)-収斂する。従て (IV) により $\{x_n\}$ は $\bar{x}$ に ρ に關して収斂する。これから $\rho(x_n - \bar{x}) \rightarrow 0$ 。

注意 本證明から明かな様に、 X が (IV) を満足する σ -完全ベクトル束のとき、(o)-有界な基本列は X の一要素に ρ に關して収斂する⁽¹⁾。

定理 2. σ -完全ベクトル束が, (I)–(V) を満足するとき, K_6^- 型 “正則” ベクトル束にして, 且 Fréchet 束である。逆に K_6^- 型 “正則” Fréchet 束は (I)–(V) を満足する。

(證) X を (I)–(V) を満足する σ -完全ベクトル束とする。前補題により、 X は ρ に關して完備である。 $\lambda_n \rightarrow 0$ のとき $\lambda_n x \rightarrow 0$ (o) のため、(IV) により、 $\rho(\lambda_n x) \rightarrow 0$ 。また $\rho(x_n) \rightarrow 0$ のとき $\rho(\lambda x_n) \rightarrow 0$ となるから⁽²⁾、 X は Fréchet 束である。 X が K_6^- 型 “正則”⁽³⁾ なることを示すには、次の (1°), (2°) を云へばよい⁽⁴⁾。

(1°) $x_{m,n} \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) のとき、(o)-有界な $\{x_{m,n_m}\}$ が存在する。

(2°) すべての第一級、第二級の順序數に對し定義された正要素の増加超限列 $x_1 < x_2 < \dots < x_a < \dots$ は存在しない。

(1) $x_{m,n} \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) とする。(IV) により、 $\rho(x_{m,n_m}) \leq \frac{1}{2^m}$ なる $\{x_{m,n_m}\}$ が存在する。 $\sum_m m_{m,n_m}$ が存在するから、 $\{x_{m,n_m}\}$ は (o)-有界になる。次に $\{x_a\}$ を (2°) の増加超限列とする。ある正數 ε に對し、 $\rho(x_{a+1} - x_a) \geq \varepsilon$ なる $x_{a_1} < x_{a_2} < \dots$ が存在する。 $\{x_{a_n}\}$ は (o)-有界となるから、その上端が存在する。之を x とすると、 $\rho(x - x_{a_n}) \rightarrow 0$ となる。一方 $\rho(x - x_{a_n}) \geq \rho(x_{a_{n+1}} - x_{a_n}) \geq \varepsilon$ であるから、矛盾が起る。逆に X を K_6^- 型 “正則” Fréchet 束とすれ

(1) 中野秀五郎：學士院紀事，18 (昭 17)，350–353 に於てノルムのある場合にこのことが注意されてゐる。

(2) $|\lambda| < p$ なる自然數 p をとると、 $\rho(\lambda x_n) \leq \rho(p x_n) \leq p \rho(x_n)$ となるから。

(3) 單に “正則” ベクトル束ともいふ。

(4) K_6^- 型 “正則” ベクトル束になる條件は、本文の (1°), (2°) の外、次の (3°) が成立することである。

(3°) 單調増加列、 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ が $\lambda_n \downarrow 0$ なる任意の正數列 $\{\lambda_n\}$ に對し、常に $\lambda_n x_n \rightarrow 0$ (o) のとき、 $\{x_n\}$ は (o)-有界である。

條件 (2°) は中野秀五郎：全國紙上數學談話會，241 (昭 17)，1292–1296 に依る。筆者は (2°) と同義な

(2°)' $x_{m,n} \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) のとき $x_{m,n_m} \rightarrow 0$ (o) なる $\{x_{m,n_m}\}$ が存在する。

を考へてゐたが、充分條件の證明には (2°) の方が簡單である。“正則” 性の條件を考へることは、中野氏より早く折原政江氏が考へてゐた。證明は Kantorovitch：前掲、の所論から殆ど明かである。尙小笠原藤次郎：數物會誌、ベクトル束論、(近刊) 第 8 節參照。

ば, (o)-収斂と相対一様収斂の一致から (IV) が成立する。また (V) は補題 3 により成立つ。

定理 3. (I)–(IV) を満足する, 単位をもつ σ -完全ベクトル束は, ρ による完備化により, K_0 型 “正則” Fréchet 束になる。

(證) X を (I)–(IV) を満足し, 単位 e をもつ σ -完全ベクトル束とする。 X の ρ による完備化を X_1 とすれば, X_1 はベクトル束で (I)–(III) を満足する。⁽¹⁾ $0 \leq x \in X_1$ とすると, $\rho(x_n - x) \rightarrow 0$ なる $0 \leq x_n \in X$ が存在する。 $\rho(x \cap ne - x_p \cap ne) \leq \rho(x - x_p) \rightarrow 0$ ($p \rightarrow +\infty$), $\rho(x_p - x_p \cap ne) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) から $x \cap ne \in X$ ⁽²⁾, $\rho(x - x \cap ne) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) となる。次に $\{x_n\}$ を $x_n \in X_1$, $x_n \downarrow 0$ とする。充分大な自然数 m に對し, $\rho(x_1 - x_1 \cap me) \leq \varepsilon$ ならしめる。 $x_n - x_n \cap me \leq x_1 - x_1 \cap me$ のため $\rho(x_n - x_n \cap me) \leq \varepsilon$ 。然るに $x_n \cap me \downarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), $x_n \cap me \in X$ のため $\rho(x_n \cap me) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) となる。故に $\rho(x_n) \rightarrow 0$ 。故に (IV) が成立つ。故に X_1 が σ -完全ベクトル束であることを示せば, 補題 3 により (V) が成立つから, 前定理により, X_1 は K_0 型 “正則” ベクトル束になる。 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x$, $x \in X_1$ として $\{x_n\}$ の上端の存在を云へばよい。 $m_1 < m_2 < \dots$ を $\rho(x - x \cap m_p e) \leq \frac{1}{p}$ となる様にとる。 $x_n \cap m_{p+q} e - x_n \cap m_p e \leq x_n - x_n \cap m_p e \leq x - x \cap m_p e$ 。今 $y_p = \bigvee_n (x_n \cap m_p e)$ と置くと, $y_p \in X$, $\rho(y_{p+q} - y_p) \leq \rho(x - x \cap m_p e) \leq \frac{1}{p}$, y を $\{y_p\}$ の極限とすると, $x_n \leq y \leq x$, となり y が $\{x_n\}$ の上端であることが云へる。

注意. (I)–(IV) を満足する σ -完全ベクトル束は常に完全ベクトル束である。

次に条件 (VI) を導入する。

(VI) (o)-有界でない正要素の單調増加列 $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ に對し, 常に $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_n \rho(\lambda x_n) > 0$ 。

定理 4. σ -完全ベクトル束が (I)–(VI) を満足するとき, K_0 型 “正則” ベクトル束にして, 且 Fréchet 束である。逆に K_0 型 “正則” Fréchet 束は (I)–(VI) を満足する。

(證) X を (I)–(VI) を満足する σ -完全ベクトル束とする。定理 2 によ

(1) 河田敬義: 數物會誌, 16 (昭 17), 154–169. §12 の證明参照。

(2) 補題 3 の注意から。

り、次の (3') を證明すればよい⁽¹⁾

(3') $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ が $\lambda_n \downarrow 0$ なる任意の正數列をとるとき $\lambda_n x_n \rightarrow 0(o)$ ならば、 $\{x_n\}$ は (o) -有界である。(3') の假定が成立するに拘らず、 $\{x_n\}$ が (o) -有界でないとする。 $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_n \rho(\lambda x_n) > \varepsilon$ となる正數 ε が存在する。明かに $\rho\left(\frac{1}{n}x_{i_n}\right) > \varepsilon$ なる $i_1 < i_2 < \dots$ が存在する。然るに $\frac{1}{n}x_{i_n} \rightarrow 0(o)$ となるから $\rho\left(\frac{1}{n}x_{i_n}\right) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) となり矛盾が起る。故に X は K_6 型 “正則” Fréchet 束である。逆に X を K_6 型 “正則” Fréchet 束とする。(VI) が成立しないとすると、 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ なる (o) -有界でないある $\{x_n\}$ に對し $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_n \rho(\lambda x_n) = 0$ となる。 $\{\lambda_n\}$ を任意の $\lambda_n \downarrow 0$ なる正數列とする。 $\rho(\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^n}$ なる $i_1 < i_2 < \dots$ が存在する。 $\sum_n \lambda_{i_n} x_{i_{n+1}}$ が存在することになり、 $\lambda_{i_n} x_{i_{n+1}} \rightarrow 0(o)$ 。然るに $i_n \leq p < i_{n+1}$ に對して $\lambda_p x_p \leq \lambda_{i_n} x_{i_{n+1}}$ 。故に $\lambda_n x_n \rightarrow 0(o)$ 。從て $\{x_n\}$ は (o) -有界となり矛盾が起る。定理 2 を使つて、 X は (I)–(VI) を満足する。

$\rho(x)$ が (o) -有界でない任意の正要素の單調増加列 $\{x_n\}$ に對し常に $\rho(x_n) \rightarrow +\infty$ となるならば、(V) (VI) は常に満足される。故に次の定理を得る。

定理 5. (I)–(IV) を満足する σ -完全ベクトル束が、更に、 (o) -有界でない任意の正要素の單調増加列 $\{x_n\}$ に對し、常に $\rho(x_n) \rightarrow +\infty$ のとき⁽²⁾、 K_6 型 “正則” Fréchet 束である。

この場合 Kantorovitch の “正則” 性の非本義的公理⁽³⁾を満足することも容易に判る。

次に、(I)–(IV) を満足する單位 e をもつ σ -完全ベクトル束 L を考へる。 e を恒等的に 1 にする L の表現を考へ、第一種集合上を除いて有限値をとる連續函數全體のベクトル束を L_1 とし L を L_1 に埋藏する。 $x \in L_1$ に對し、表現を利用して $\frac{|x|}{e+|x|}$ を作り、 $\rho_1(x) = \rho\left(\frac{|x|}{e+|x|}\right)$ と定義する。 $\rho_1(x)$

(1) 237 頁脚註 (3) 参照。

(2) σ -完全をベクトル束に對する條件から除去するには、“ $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ $\lim_n \rho(x_n) < +\infty$ のとき $\forall x_n$ が存在する” とすればよい。

(3) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 138. 部分集合列 $\{E_n\}$ が $\sup E_n = +\infty$ のとき、 E_n から有限部分集合 E'_n を $\sup_n \{\sup E'_n\} = +\infty$ なる様にとれ出すことが出来る。

は (I)–(VI) を満足することが容易に確かめられる。故に L_1 は ρ_1 により、 K_6 型 “正則” Fréchet 束になる。尚 K_6 型 “正則” Fréchet 束の二三の例を挙げやう。

例 1. ベクトル束 X の各要素に實数 $\|x\|_p$ $p=1, 2, 3, \dots$ が對應し

- (1) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$
- (2) $|x| \leq |y|$ のとき $\|x\| \leq \|y\|$
- (3) $x_n \downarrow 0$ のとき $\|x_n\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)
- (4) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots, \lim_n \|x_n\|_p < +\infty, p=1, 2, 3, \dots$ なるとき $\forall x_n$ が存在する。

を満足するとする。 $\rho(x)$ として

$$\rho(x) = \sum \frac{1}{2^p} \frac{\|x\|_p}{1 + \|x\|_p}$$

と定めると、 X は ρ に関して、(I)–(VI) を満足する σ -完全ベクトル束なることが容易に判る。故に X は ρ により K_6 型 “正則” Fréchet 束になる。

これの特別の場合として、ベクトル束に高々可附番個の正線形汎函数 $F_p(x)$ $p=1, 2, 3, \dots$ が存在し、条件 (L)

$$(L) \quad \begin{cases} (1) & x_n \downarrow 0 \text{ のとき } F_p(x_n) \rightarrow 0 \text{ } (n \rightarrow +\infty) \\ (2) & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots, \lim_n F_p(x_n) < +\infty, p=1, 2, \dots \text{ のとき } \forall x_n \\ & \text{が存在する。} \end{cases}$$

を満足するとき、ベクトル束は K_6 型 “正則” ベクトル束になる。上の例で $\|x\|_p = F_p(|x|)$ とすればよい。条件 (L) を満足するベクトル束は **Bochner 束** と呼ぶ⁽¹⁾

例 2. $\mathfrak{H}$ の可分 Hilbert 空間とする。 $\mathfrak{M}$ を互に可換な有界自己随伴作用素の、次の如き性質をもつ環とする。 $\mathfrak{M}'$ で $\mathfrak{M}$ と可換な有界線形作用素の全體とするととき $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}'$ と可換なあらゆる有界自己随伴作用素からなるとする。 $\mathfrak{M}$ は positive semi-definite の自己随伴作用素、即ち、 $(Af, f) \geq 0, f \in \mathfrak{H}$ となる $A \in \mathfrak{M}$ を $A \geq 0$ と定めるとき、恒等作用素 1 に関して各要素が有界な完全ベクトル束になる⁽²⁾ $\mathfrak{R}$ を $\mathfrak{M}'$ と可換な自己随伴作用素の全體とす

(1) S. Bochner: Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **26** (1940), 29–31 に於て条件 (L) が導入された。小笠原藤次郎: 本紀要 **12** (昭 17), 37–100 参照。

(2) この束論的證明は、吉田耕作: 全國紙上數學談話會, **241** (昭 17), 吉田耕作, 中山正, 同上 **242** (昭 17). 小笠原藤次郎: ベクトル束論, 數物會誌 (近刊) 参照。

ると、 $\mathfrak{R}$ は 1 を恒等的に 1 にする $\mathfrak{M}$ の、連続関数による表現を考へるとき、非稠密集合上を除いて有限値をとる連続関数全体で表現される。 $A \in \mathfrak{R}$ に對し、 $H = \frac{|A|}{1+|A|} \in \mathfrak{M}$. $\{f_i\}$ を $\mathfrak{S}$ の単位球で稠密を要素列とし

$$\rho(A) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \|Hf_n\|$$

と定めると $\mathfrak{R}$ は、 K_6 型 “正則” ベクトル束になる。 $\mathfrak{R}$ は環束となつてゐることを注意する。

§2. Kantorovitch 空間

ベクトル束の各要素に實數 $\|x\|$ が對應し⁽¹⁾

- (i) $\|x\| \geq 0$, $x=0$ のときに限り $\|x\|=0$
- (ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $|x| \leq |y|$ のとき $\|x\| \leq \|y\|$
- (iv) $x_n \downarrow 0$ のとき $\|x_n\| \rightarrow 0$
- (v) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$, $\lim_n \|x_n\| < +\infty$ のとき Vx_n が存在する

を満足するとき **K -空間 (Kantorovitch 空間)** と云ふ⁽²⁾

(v) から K -空間は σ -完全ベクトル束である。§1 定理 5 により K -空間は K_6 型 (詳しくは更に非本義的の正則性の公理も満足する) “正則” Banach 束である。

定理 1. Banach 束が K_6 型 “正則” なるための條件は、 K -空間になることである。

(證) §1, 定理 4 を使つて容易に判る。

(i)–(iv) を満足する σ -完全 Banach 束を **K^- -空間** と呼ぶと、

定理 2. Banach 束が K_6 型 “正則” なるための條件は、 K^- -空間になることである。

(證) §1, 定理 2 を使つて容易に判る。

定理 3. σ -完全ベクトル束が (i)–(iv) を満足するとき、ノルムによる完備化により、 K^- -空間になる。

(證) §1, 定理 3 を使つて

(1) (i) は他の條件から出る。

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, 12 (昭 17), 37–100. 尙 K -空間に関するその後の研究は近く本紀要に發表の豫定である。

補題 1. Fréchet 束がノルムの導入により Banach 空間になるならば、ノルムを適當にとると、Banach 束になる。

(證) X を $\rho(x)$ により定められた Fréchet 束とし、 $\|x\|$ により Banach 空間になるとする。 $\|x\| \leq \delta_1 \rightarrow \rho(x) \leq \delta_2 \rightarrow \|x\| \leq \delta_3$ が常に成立つ正数 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ が存在する。

$$\|x\|_1 = \text{l. u. b.} (\|x'\|; |x'| \leq |x|)$$

と定めると、明かに $\|x\| \leq \|x\|_1$. 實数 λ に對し $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$ も自明。 $\|x\| \leq \delta_1$ のとき $\|x\|_1 \leq \delta_3$, 從て任意の $x \in X$ に對し、 $\|x\|_1 \leq \frac{\delta_3}{\delta_1} \|x\|$ となる。また、 $|z| \leq |x| + |y|$ のとき $z = z_1 + z_2$, $|z_1| \leq |x|$, $|z_2| \leq |y|$ と書かれるから⁽¹⁾, $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ となる。これ等からは x は $\|x\|_1$ により Banach 束になる。

定理 4. K_6 型 “正則” Fréchet 束がノルムの導入により Banach 空間になるときは、ノルムを適當に定めると K -空間になる。

(證) 定理 1, 補題 1 を使つて。

定理 5. K_6 型 “正則” Fréchet 束がノルムの導入により Banach 空間になるときは、ノルムを適當に定めると K -空間になる。

(證) 定理 2, 補題 1 を使つて。

補題 2. Banach 束が e を單位とする環束⁽²⁾を作るとき、各要素は e に関して有界で、ノルムを適當にとると、

$$\|e\| = 1, \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

を満足する Banach 束になる。また、かゝるノルムは一意的に定まる。即ち、 $\|x\| = \text{g. l. b.} (\lambda; |x| \leq \lambda e)$.

(證) ノルムによる收斂と相對一樣(*)-收斂の同義から、 xy はノルムに關して x, y の連續函數である。從て、 $\|xy\| \leq c \|x\| \|y\|$ なる正数 c が存在する。 $\|x\|_1 = \text{l. u. b.} (\|xy\|; \|y\| \leq 1)$ と定めると、明かに

$$\frac{1}{\|e\|} \|x\| \leq \|x\|_1 \leq c \|x\|, \quad \|e\|_1 = 1, \quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1$$

となるから、最初から

$$\|e\| = 1, \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

(1) $z_1 = z + \bigcap |x| - z - \bigcap |x|$, $z_2 = z - z_1$ とすればよい。

(2) 小笠原藤次郎：本紀要，12 (昭 17), 37-100. 第一編第三章参照。

を満足するとして、一般性を失はない。 $\|x\| < 1$ なる正要素 x を考へる。 $x \leq e$ が成立しないとすれば、 $\|x^n\| \leq \|x\|^n \rightarrow 0$ にも拘らず、 $x^n \geq a > 0$, $n = 1, 2, \dots$ なる a が存在すること⁽¹⁾になり矛盾が起る。故に $x \leq e$ となる。これから直ちに任意の x に對し、 $\|x\| = \text{g.l.b.}(\lambda; |x| \leq \lambda e)$ なることが判る。

補題 3. 単位 e をもつ K_6^- 型 “正則” ベクトル束は、その各要素が e に關して有界のとき、有限次元になる。

(證) e に關する特性要素のブール代數に於て、互に獨立な要素からなる集合は有限集合なることを云へばよい。 $\{e_n\}$ をかゝる獨立な要素からなる列があるとすると、 $a_n = \sum_{m \geq n} e_m$ するととすれば $a_n \downarrow 0$ 。故に $a_n \leq \lambda_n u$, $\lambda_n \downarrow 0$ なる正要素 u が存在する。明かに u は e に關して有界でない。

定理 6. K^- 空間が e を単位とする環束のとき、有限次元である。

(證) 補題 2 及び補題 3 を使つて。

定理 7. K_6^- 型 “正則” Fréchet 束が e を単位とする環束を作るとする。もしノルムを導入して Banach 空間とすることが出来るならば、この Fréchet 束は有限次元である。

(證) 定理 5, 定理 6 から。

本定理により S 空間, (s) 空間はノルムの導入によつて、Banach 空間とすることは出来ない。

§ 3. Bochner 束

以下 X を Bochner 束とする⁽²⁾ 即ち、高々可附番個の正線形汎函數 $F_p(x)$ が存在して、條件 (L):

$$(1) \quad x_n \downarrow 0 \text{ のとき, } \lim_n F_p(x_n) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

$$(2) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \quad \lim_n F_p(x_n) < +\infty \quad p = 1, 2, 3, \dots \text{ のとき,}$$

$\bigvee_n x_n$ が存在する。

§ 1 で示した様に $\rho(x) = \sum \frac{1}{2^p} \frac{F_p(|x|)}{1 + F_p(|x|)}$ と置くとき、 X は K_6 型 “正則” Fréchet 束になる。

X の正規イデアルの作る完全ブール代數 N の表現ブール空間 Ω_N を考へ

(1) e を恒等的に 1 にする表現を考へれば、 a の存在が容易に判る。

(2) § 1 例 1 参照。

る⁽¹⁾ Ω_N の点 p は N の極大双対イデアルである。主イデアル $\mathfrak{A}(a)$ に對應する Ω_N の基本開集合を $\mathfrak{A}^*(a)$ で表す。 a が $\mathfrak{A}^*(a)$ の特性函數となる様 X を Ω_N の連續函數で表現する。暫く $\mathfrak{A}^*(a)$ の上で考へるため $\Omega = \mathfrak{A}^*(a)$ と置く。 Ω 上でベクトル値測度函數 $\mu(E)$ を考へる。即ち E は Ω の, Baire の性質をもつ部分集合にして, E と第一種集合を法として一致する $\mathfrak{A}^*(e)$ を e が a に関する特性要素となる様に選り $\mu(E)=e$ で定義する。 $\mu(E)$ は完全加法的である。 $m_p(E)=F(\mu(E))$ と置き, 正數列 $\{a_p\}$ を $\sum a_p m_p(\Omega) < +\infty$ なる様にとり, $\omega(E)=\sum a_p m_p(E)$ と置く。 $\omega(E)=0$ と E は第一種集合とは同義になるから, Ω 上では, “殆ど”, “對等” の定義は ω -測度零を法とした場合と第一種集合を法とした場合とは同義になる。従てこの兩者を區別しないで使ふことに定める。

$X_1=\mathfrak{A}(a)$ と置き, 表現函數 $f_x(p)$ が測度 ω に關し, 可積分となる $x \in X_1$ の全體を X_ω で表し, $\|x\| = \int_\Omega |f_x(p)| d\omega$ と定める。前著“ベクトル束論(1)”⁽²⁾ に於て, ω に關し Ω 上の如何なる可積分函數も X_ω のある要素の表現函數と對等であることを證明した。即ち X_ω は L 空間である。 X_ω を通して X の性質が幾分明かになる⁽³⁾

定理 1. Bocher 束 X から K -空間 Y への線形作用素 $U(x)$ に就いて, 次の條件は互に對等である。

- (1°) $U(x)$ は正線形作用素の差として表される⁽⁴⁾
- (2°) $U(x)$ は (o)-收斂列を (o)-收斂列に變換する。(之を (o)-連續と呼ぶ)。
- (3°) $U(x)$ は (*)-收斂列を, (*)-收斂列に變換する。(之を (*)-連續と呼ぶ)。
- (證) (1°) $\leftrightarrow$ (2°) は Kantorovitch の定理から⁽⁵⁾
- (2°) $\rightarrow$ (3°) は殆ど自明。

(3°) $\rightarrow$ (1°) $U(x)$ を (*)-連續線形作用素とする。 x_0 を X の任意の正要素とする。 a を $x_0 \in X_\omega$ なる様にとる。 $U(x)$ は X_ω から Y への有

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎: 本紀要 **12** (昭 17), 17-35, 小笠原藤次郎: 同上 **12** (昭 17), 37-100.

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要 **12** (昭 17), 37-100. 第二編第三章。

(3) 小笠原藤次郎: 同上, 例へば, Bochner 束の任意の區間は, 列的弱コンパクトである。

(4) L. Kantorovitch: Recueil Math. **49** (1940), 209-284. § 3 ではかゝる作用素を正則作用素 (regular operation) と呼ぶ。

(5) L. Kantorovitch: 同上, 定理 8.

界線形作用素なることに注意して Kantorovitch の定理⁽¹⁾を使ふと、 $|U|(x)$ が存在する。故に U は正線形作用素の差として表される。

定理 2. Bochner 束 X は弱完備である。

(證) 任意の (o) -有界線形汎函数 $F(x)$ に對し、 $\lim_n F(x_n)$ が有限確定のとき、この極限值が $F(x_0)$ として表される x_0 の存在を示せばよい。 E を Ω の可測集合とする。 $F_E(x) = F(P_{\mathfrak{A}(\mu(E))}x)$ と定めると、 $F_E(x)$ は完全加法的集合函数である。 $\lim_n F_E(x_n) = \nu(E)$ と置くと、 $\nu(E)$ も完全加法的集合函数になる。 a を $x_n \in \mathfrak{A}(a)$, $n=1, 2, \dots$ なる様にとる。 $\{F_p\}$ は $F_1 \leq F_2 \leq \dots$ として一般性を失はない。 $F_p(e) = F_p(a)$ を満足する a に関する特性要素 e の下端を a_p とし、 $\Omega_p = \mathfrak{A}^*(a_p)$ と置く。 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$, 且 $\Omega - \sum \Omega_p$ は第一種集合となる。 $m(E) = F(\mu(E))$ と置くと、 $x \in X_1$ に對し、 $F(x) = \int_{\Omega} f_x(p) dm$ と書かれる。また、 Ω_p 上では、 $m(E)$ は $m_p(E)$ に關し絶對連續のため、 $m(E) = \int_E \varphi_p(p) dm_p$ の形に書かれる連續函数 $\varphi_p(p)$ が存在するから、

$$F_{\Omega_p}(x) = \int_{\Omega_p} f_x(p) dm = \int_{\Omega_p} f_x(p) \varphi_p(p) dm_p.$$

p を固定し、 F を適當にとると、 φ_p は Ω_p 上の任意の有界連續函数となるから、可積分函数空間の弱完備性から、 $\nu(E\Omega_p) = \int_{E\Omega_p} \xi_p(p) \varphi_p(p) dm_p = \int_{E\Omega_p} \xi_p(p) dm$ なる Ω_p 上で定義せられた殆ど到る所有有限値をとる連續函数 $\xi_p(p)$ が存在する。⁽²⁾ $p < q$ とするとき、 $E \subset \Omega_p$ に對し $\int_E \xi_p(p) dm = \int_E \xi_q(p) dm$. $\xi_p(p)$, $\xi_q(p)$ の連續性から、 Ω_p 上で $\xi_p(p) = \xi_q(p)$ となる。故に Ω_N 上殆ど到る所有有限値をとる連續函数 $\xi(p)$ が存在し、 $\Omega_N - \Omega$ 上では 0, Ω_p 上では $\xi_p(p)$ と一致する。⁽³⁾ これから、任意の可測集合 $E \subset \Omega$ に對し、 $\nu(E) = \int_E \xi(p) dm$ となること が判る。 F として F_p , $p=1, 2, \dots$ をとることにより、 $\int_{\Omega} |\xi(p)| dm_p$ の存在から、條件 (L) を使つて、 $f_{x_0}(p) = \xi(p)$ なる $x_0 \in X_1$ が存在する。故に $\lim_n F(x_n) = \nu(\Omega) = \int_{\Omega} f_{x_0}(p) dm = F(x_0)$ となる。これで定理の證明が完結した。

一般に、ベクトル束が $\mathfrak{S}$, $\alpha \neq \beta$ のとき $e_\alpha \cap e_\beta = 0$ なる $\{e_\alpha\}$ が存在し、任

(1) L. Kantorovitch: 同上, §3 定理 11.

(2) 小笠原藤次郎, 本紀要, **12** (昭 17), 75, 定理 1 の證明の論法参照.

(3) 小笠原藤次郎: 同上. 51 頁, 定理 1.

意の要素 x が, $x = \sum \lambda_a e_a$ (可附番個の λ_a が 0 でない實數) となるととき**廣義と列空間**と呼び, 特に $\{e_a\}$ が可附番集合のとき, 單に**列空間**と呼ぶことに定める。

補題 1. Bochner 束が廣義の列空間になるための條件は, その任意の區間⁽¹⁾が $(*)$ -位相でコンパクトになることである。

(證) 必要條件であることは殆ど自明であるから, 充分であることを證明する。 X を $(*)$ -位相で任意の區間がコンパクトな Bochner 束とし, 任意の正要素 a に對し, X_a を考へると, 區間 $(x; 0 \leq x \leq a)$ は X_a でノルムに關してコンパクトになる。故に a に關する特性要素のブール代數は, 原子的である⁽²⁾。これから X が廣義の列空間になることが判る。

補題 2. 弱收斂と $(*)$ -收斂の同義な Bochner 束は廣義の列空間である。

(證) Bochner 束の任意の區間は弱コンパクトであるから, 前補題を使つて容易に判る。

注意。補題 1, 補題 2 に於て單位をもつ Bochner 束の場合は列空間である。

補題 3. 環束⁽³⁾を作る Bochner 束は列空間である。

(證) a を環束の單位とし, X_a を考へる。任意の正線形汎函數 $F(x)$ に對し, $m(E) = F(\mu(E))$ と定めると $m(E) = \int_E \varphi(p) d\omega$ を満足する, $\mathcal{Q}$ 上殆ど到る所有有限値をとる連續函數 $\varphi(p)$ が存在する。 $F(x) = \int_{\mathcal{Q}} f_x(p) dm = \int_{\mathcal{Q}} f_x(p) \varphi(p) d\omega$, $x \in X_a$ と書かれる。 y を X の任意の要素とするとき, $F(yx)$ は x の (o) -連續線形汎函數である。 $F(yx) = \int_{\mathcal{Q}} f_x(p) f_y(p) dm = \int_{\mathcal{Q}} f_x(p) f_y(p) \varphi(p) d\omega$ となる。 λ を任意の正數とし, $\mathcal{Q}_\lambda = \{p; \varphi(p) > \lambda\}$ と對等な基本開集合を $\mathfrak{A}^*(e_\lambda)$ と置く, 但し e_λ は a に關する特性要素である。 $\mathcal{Q}_\lambda$ 上で $\int_{\mathcal{Q}_\lambda} f_x(p) f_y(p) d\omega$ が存在するから, $\mathcal{Q}_\lambda$ 上の可積分函數の全體は環束を作ることになり, 有限次元ベクトル束となる⁽⁴⁾。故に e_λ に關する特性要素は有限ブール代數となる。 a に關

(1) $a \leq x \leq b$ を満足する x の集合を區間と云ふ。Banach 束に對しては, 之に對應する定理に小笠原藤次郎: 本紀要, 11 (昭 17) 127 頁, 定理 4 がある。

(2) 小笠原藤次郎: 本紀要, 11 (昭 17), 127 頁定理 4 の證明参照。

(3) 小笠原藤次郎: 本紀要, 12 (昭 17), 37-100. 本文の補題 3 に於ては積の結合則を假定することとは不要である。小笠原藤次郎: 全國紙上數學談話會, 232 (昭 17), 800-804 参照。

(4) §2, 定理 7.

する特性要素のブール代数が原子的なることを云へば, Bochner 束 X が列空間になることは殆ど明かである。そのため, e を a に関する任意の特性要素とし, F を $F(e) > 0$ なる正線形汎函数とする。上述の $\varphi(p)$ を考へる。 λ を適當にとると, $\mathfrak{A}^*(e \cap e_\lambda)$, $e \cap e_\lambda \neq 0$, 上で $\varphi(p) > \lambda > 0$ となるから, 上述の所論により $e \cap e_\lambda$, 従て e に含まれる a に関する原子的特性要素が存在する。これで証明が完結した。

以上の補題により, Bochner 束の構造を調べて見やう。条件 (L) の正線形汎函数 $F_p(x)$ が唯一個と見做し得る場合, 例へば X にノルムの導入により Banach 空間となる様な場合には, 明かに抽象 L_1 空間になる。之に對して更に補題 2 の条件が成立つならば廣義の列空間 (廣義の l_1 空間) になる。更に單位が存在するときは l_1 空間になる。次に $F_p(x)$ が唯一個と見做し得ない場合を考へる。最も簡単な場合は $F_p \cap F_q = 0$, $p \neq q$ のときしある。このとき X は可附番の正現イデアル $\mathfrak{A}_p$, $p=1, 2, \dots$ の直和として表され, 任意の $x \in \mathfrak{A}_p$ に對して, $F_q(x)=0$, $p \neq q$ となる⁽¹⁾ $\mathfrak{A}_p$ 自身は F_p によつて, 抽象 L_1 空間となる。 $x \in X$ に對し, 計量函数 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^p} - \frac{F_p(P_{\mathfrak{A}_p}|x|)}{1 + F_p(P_{\mathfrak{A}_p}|x|)}$$

と書かれる。更に X が環束を作るときは, 各々の $\mathfrak{A}_p$ は有限次元になるから⁽²⁾, X は (s)-空間となる。

一般の場合は, $\{e^\alpha\}$ を, $e^\alpha \cap e^\beta = 0$, $\alpha \neq \beta$, 且すべての e^α に對し $x \cap e^\alpha = 0$ のとき $x=0$ となる様にとり, X の正規イデアルの完全ブール代数 N の表現ブール空間 Ω_N を考へ, e^α を $\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ の特性函数となる様に X を Ω_N の連続函数で表現する⁽³⁾ Baire の性質をもつ集合 E に對し, E の特性函数に對等な連続函数を表現函数とする X の要素 e が存在するとき, $\mu(E)=e$ と定め, 然らざるとき $\mu(E)=+\infty$ と置く, $F_p(+\infty)=+\infty$ と定めるとき, 測度函数 $m_p(E)=F_p(\mu(E))$ を得る。このとき X の表現函数は, すべての m_p に関して可積分な可測函数と對等になることで特性づけられる⁽⁴⁾

(1) 小笠原藤次郎: 本紀要, 12 (昭 17), 37-100. 81 頁, 定理 1 證明参照。

(2) § 2, 定理 7.

(3) 前田文友, 小笠原藤次郎: 前掲。

(4) 小笠原藤次郎: 本紀要, 12 (昭 17), 37-100. 87 頁定理 2 の證明参照。

(s) 空間になる場合を定理として掲げると

定理 3. Bochner 束が (s)-空間になる条件は、環束を作り、条件 (L) の F_p を, $p \neq q$ に對し $F_p \cap F_q = 0$ となる様, 可附番無限個の F_p が選ばれることである。

本研究に於て賜つた御懇切な御指導に對し, 前田教授に深く感謝する。尙本研究は, 文部省科學研究費の補助によつてなされた。

廣島文理科大學數學教室