ベクトル束の表現に關する二三の注意[1]

小笠原藤次郎

(昭和 17 年 11 月 2 日受附)

前田敎授との共著“ベクトル束の表現”[2]に於て，F. Wecken の特性族[3]の考へを用ひて，ベクトル束を連續函數族で表現する二つの方法，即ち主イデヤルを使ふ方法並びに正規イデヤルを使ふ方法を述べた。主イデヤルを使ふ方法では，主イデヤル全體の作る配分束 $\boldsymbol{P}$ の表現空間 Ω_p は一般にはビコムパクトでないため，特に單位をもつ一般なベクトル束の表現には，ビコムパクト空間上の連續函數族による表現との繋りが明瞭とは云へなかつた。この難點を除くため，本論文に於ては，任意のベクトル束の正規イデヤルの全體は完全ブール代數を作ることを注意して，正規イデヤルを使用する方法が一般のベクトル束の連續函數族による表現に利用されることを明かにする。完全(或は σ–完全)ベクトル束に於ては，Ω_p が局所ビコムパクトになることから，列空間に於て見る様に，ベクトル束を局所ビコムパクト空間上の連續函數族で表現することが望しい場合に，主イデヤルを使用する方法が適切な場合があることを注意したい。

完全整閉整域に於ける W. Krull の豫想[4]に對する中山正氏の研究[5]から，ベクトル束を線形–束–同型に實數全體のベクトル束の直和に埋藏する，換言すれば，ベクトル束を實數値(無限大は含まない)函數族で同型表現することが可能なための條件を求めることが問題になる。[6] 本論文に於ては，K_6^- 型正則ベクトル束[7]に對しこの問題が可能なための條件は，“$a_\alpha \frown a_\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ なる部分集合 $\{a_\alpha\}$ が存在し，任意の要素 x が $x = \sum \lambda_\alpha a_\alpha$ (λ_α は可附番個のみが 0 でない實數)の形に表される” なることを證明する。從て我々に有用

(1) 小笠原藤次郎，全國紙上數學談話會，**242** (昭 17), 1297–1307. に本論文の概要を示した。これは，以下引用しない。

(2) 前田文友，小笠原藤次郎，本紀要 **12** (昭 17), 17–35.

(3) F. Wecken, Math. Zeitschr. **49** (1939), 377–404.

(4) 完全整閉整域はその商體に於て特殊賦値環の交りとなる。W. Krull, Crelle Journ. 167 (1932), **170**. Math. Zeitschr. **41**. (1936). 666.

(5) 中山正，學士院紀事，**81** (昭 17), 185–187.

(6) 昭和 17 年 5 月東北帝大に於て開催された，オペレーターの會に於ける中山正氏の講演に據る。

(7) L. Kantorovitch, Recueil Math., **49** (1940), 221. 單に正則ベクトル束とも云ふ。

な函數空間は二三の例を除いて實數値函數族による同型表現が不可能であると云へる。

§1. 正規イデヤル。

L を任意のベクトル束とする。L の部分集合 A のすべての要素に直交する要素の全體を A' で表すとき，$A \to A''$ なる對應は G. Birkhoff の意味の閉苞演算(1)を定める。A がこの閉苞演算で閉ぢてゐるとき，即ち $A=A''$ のとき A を**正規イデヤル**と呼ぶ。正規イデヤルは $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 等の獨逸文字で表す。A の生成する，即ち A を含む最小の正規イデヤルは A'' である。一要素 a の生成する正規イデヤルを $\mathfrak{A}(a)$(2)で表し，**主イデヤル**と呼ぶ。半順序 $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$ を包含關係 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ で定めるとき，正規イデヤルの全體 N は完全束を作ることが知られてゐる(3)が，更に次の定理が成立つ。

定理 1. 正規イデヤルの全體 N は完全ブール代數である。

(證) 對應 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ は N の双對自己同型對應を定める，即ち，$\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})'=\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}'$, $(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})'=\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{B}'$, 且 $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'=0$, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'=1$ となる(4)から，A. Birkhoff の定理(5)により $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}=0$ のとき，$\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}'$ を證明すればよい。$x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{B}$ とすると，$|x| \cap |y| \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}=0$ のため x と y は直交する，即ち $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}'$. 故に本定理が證明された。

注意。 L が半順序群(從てベクトル束，群束はその中にはいる。)のとき，L の正要素の全體を L_+ で表すとき，L_+ の中で正規イデヤルを上述の方法で定義すると，矢張り定理 1 が成立つことは本定理の證明法から明かである。

主イデヤルに對しては次の定理が成立つ。

定理 2.(6) 主イデヤルの全體 P は 0 をもつ配分束であつて，H. Wallman の disjunction property(7)

"$\mathfrak{A}(a) < \mathfrak{A}(b)$ のとき，$\mathfrak{A}(a) \cap \mathfrak{A}(c)=0$, $0 \neq \mathfrak{A}(c) \leqq \mathfrak{A}(b)$ なる $\mathfrak{A}(c)$ が存在する"。

を滿足し，尙次の關係がある。

---

(1) G. Birkhoff, *Lattice theory*, (1940) 第二章。
(2) 以下この記法に於ては常に $a \geqq 0$ と定める。
(3) G. Birkhoff, 前揭, 定理 2.1.
(4) G. Birkhoff, 同上, 25-26.
(5) G. Birkhoff, 同上, 定理 6.11
(6) 前田文友, 小笠原藤次郎, 前揭。定理 1.3.
(7) G. Birkhoff, 前揭, 87 頁の定義に從つた.

$$\mathfrak{A}(a) \frown \mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(a \smile b) = \mathfrak{A}(a+b), \qquad \mathfrak{A}(a) \frown \mathfrak{A}(b) = \mathfrak{A}(a \frown b).$$

注意。 本定理は群束に對しても成立つ。また，L_+ 自身 0 をもつ配分束であり，その H. Wallman 式の L_+ の表現法(1)に於て a, b が同一の basic set に表現される條件は $\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{A}(b)$ になる。(disjunction property を使つて)。故に $\boldsymbol{P}$ の表現空間を求めることは，L_+ の表現空間を求めるに外ならない(2)。

補題 1. Ω を Hausdorff 空間とし，すべての有理數に對し閉且開集合 O_λ が對應し，$\lambda_1<\lambda_2$ のとき $O_{\lambda_1} \subset O_{\lambda_2}$ を滿足するとする。函數 $f(p)$ を，$p \in O_\lambda$ なる λ が存在しないとき，$f(p)=+\infty$ と定め，その他の場合は $f(p)=\text{g.l.b.}(\lambda;\ p \in O_\lambda)$ と定めると $f(p)$ は Ω 上の連續函數であつて，任意の實數 μ に對し

$$(p;\ f(p)<\mu)=\sum_{\lambda<\mu} O_\lambda.$$
$$(p;\ f(p)>\mu)=\Omega-\prod_{\lambda>\mu} O_\lambda.$$

が成立つ。

(證) 最後の二式の成立は殆ど明かであり，且右邊は開集合となることを示してゐるから，本補題が成立つ。

$f(p)$ を，$p \notin O_\lambda$ なる λ の存在しないとき，$f(p)=-\infty$，その他のとき，$f(p)=\text{l.u.b.}(\lambda;\ p \notin O_\lambda)$ と定めても同義なものを得る。

集合族 $\{G_\lambda\}$, $\{F_\lambda\}$ が，$\lambda_1<\lambda_2$ に對し $G_{\lambda_1} \subset F_{\lambda_2}$, $F_{\lambda_1} \subset G_{\lambda_2}$ を滿足するとき，本補題の方法で $\{G_\lambda\}$ 及び $\{F_\lambda\}$ により定義される函數は全く一致する。従て $\{G_\lambda\}$, $\{F_\lambda\}$ を夫々開集合族，閉集合族としてとり得るときに連續函數が定義されることになる。

ベクトル束 L の正規イデヤルの完全ブール代數 $\boldsymbol{N}$ の表現ブール空間 $\Omega_{\boldsymbol{N}}$ を考へる。定義から，$\Omega_{\boldsymbol{N}}$ の點は，$\boldsymbol{N}$ の極大双對イデヤルである。之を一般に $\mathfrak{p}$ で表し，$\mathfrak{A} \in \boldsymbol{N}$ に對應する $\Omega_{\boldsymbol{N}}$ の開且閉集合 (**基本開集合**と呼ぶ) を $\mathfrak{A}^*$ で表す。先づ L で單位 e をもつとする。任意の $x \in L$, 及び有理數 λ に對して，$\mathfrak{A}_\lambda^{(x)}=\mathfrak{A}\big((x-\lambda e)_-\big)$ と定義し，補題 1 の O_λ を $\mathfrak{A}_\lambda^{(x)*}$ と考へ，連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ を定義すると

定理 3. $x \to f_x(\mathfrak{p})$ なる對應に於て，次の關係が成立つ。

(1°) $f_x(\mathfrak{p}) \equiv 0$ とすべての n に對し $n|x| \leqq e$ とは同義である。

---

(1) H. Wallman, Ann. of Math. **39** (1938), 422–455.

(2) L が單位 e をもつ σ-完全のときは，e に關する特性要素のブール代數の表現空間を求めるに外ならないことも，これから判る。

(2°) $f_e(\mathfrak{p})\equiv 1$

(3°) $f_x(\mathfrak{p})$, $f_y(\mathfrak{p})$ が異號の無限大でないとき，$f_{x+y}(\mathfrak{p})=f_x(\mathfrak{p})+f_y(\mathfrak{p})$[1]

(4°) $f_{\alpha x}(\mathfrak{p})=\alpha f_x(\mathfrak{p})$，$\alpha$ は 0 でない實數。

(5°) $f_{x\smile y}(\mathfrak{p})=\max\left(f_x(\mathfrak{p}),\, f_y(\mathfrak{p})\right)$

(6°) $f_{x\frown y}(\mathfrak{p})=\min\left(f_x(\mathfrak{p}),\, f_y(\mathfrak{p})\right)$

(7°) 特に L がアルキメデス的のとき，$f_x(\mathfrak{p})$ は非稠密集合上を除いて有限である。

(證) “ベクトル束の表現”[2] に用ひたと同じ論法で證明される。

すべての自然數 n に對し，$n|x|\leqq e$ を滿足する x の全體を N_0 とする。N_0 は G. Birkhoff の意味の正規部分空間である。また，L がアルキメデス的のときは $N_0=0$ となる。L の各要素が e に關して有界のときは，差群 $L-N_0$ はアルキメデス的で，有界な連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ の全體で同型表現される。必要あるときは，$\{f_x(\mathfrak{p})\}$ によつて Ω_N の分離空間を作ると，$L-N_0$ は，ビコムパクト Hausdorff 空間上の一様收斂の意味で稠密な連續函數族で同型表現されることになる。[3]

定理 4. L が單位 e をもつベクトル束で，任意の正要素 x に對し $x=\bigvee_n (x\frown ne)$ が成立つとする。このとき $L-N_0$ はアルキメデス的で $\{f_x(\mathfrak{p})\}$ で同型に表現される。$\{f_x(\mathfrak{p})\}$ は非稠密集合を除いて有限値をとる。

(證) Ω_N は完全ブール代數の表現ブール空間であるから，$x>0$ のとき $F=(\mathfrak{p};\, f_x(\mathfrak{p})=+\infty)$ が非稠密なることを示せば，本定理の成立が容易に判る。[4] 以下その證明。F が非稠密でないとすれば，F は開集合を含むから，$F\supset\mathfrak{A}^*(a)$ なる $a>0$ が存在する。$\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}^*(a)$ のとき $f_x(\mathfrak{p})=+\infty$ から，定義によつて，

$$\mathfrak{A}\left(a\frown(x-ne)_-\right)=\mathfrak{A}(a)\frown\mathfrak{A}\left((x-ne)_-\right)=0.$$

從て
$$a\frown(x-ne)_-=0.$$

この關係を使つて，
$$\begin{aligned}(x+a)\frown ne&=a\frown(ne-x)+x\\&\leqq a\frown(x-ne)_-+x\\&=x.\end{aligned}$$

---

(1) $f_{x+y}(\mathfrak{p})$ は，$\mathfrak{p}$ の任位の近傍で $f_x(\mathfrak{p})$, $f_y(\mathfrak{p})$ が異號の無限大にならない點があるときは，それ等によつて一意に定まる。

(2) 前田文友，小笠原藤次郎，前揭，補題 1.5, 1.6.

(3) 小笠原藤次郎，廣島文理大紀要，**12** (昭 17)，56 頁補助定理 1.

(4) 小笠原藤次郎，同上. 50 頁定理 3 により $f_x(\mathfrak{p})$ の全體がベクトル束になるから。

本定理の假定から，$x+a=\bigvee_n\{(x+a)\frown ne\}\leqq x$. 故に $a\leqq 0$ となり $a>0$ に反する。

本定理から，單位 e をもつベクトル束 L がアルキメデス的となる條件は，$N_0=0$ 且 $x>0$ に對し $x=\bigvee_n(x\frown ne)$ となることが判る。$N_0\neq 0$ のときに對しては，$L-N_0$ が最早 N_0 に相等するものを含まないから，この結果を使つて，$L-N_0$ がアルキメデス的になる條件が得られる。

次に L が單位をもたない場合を考へる。正要素の集合 $\{e^\alpha\}$ を，$e^\alpha\frown e^\beta=0$, $\alpha\neq\beta$, 且 $x\frown e^\alpha=0$ がすべての $e^\alpha=0$ に對して成立つとき $x=0$ なる様にとる。N の表現ブール空間 Ω_N を考へ，この上の連續函數族で L を表現する。任意の有理數に對し

$$\mathfrak{A}_\lambda^{(x)}=\bigvee_\alpha\left\{\mathfrak{A}\left((x-\lambda e^\alpha)_-\right)\frown\mathfrak{A}(e^\alpha)\right\}$$

と定め[1]，$\mathfrak{A}_\lambda^{(x)}$ に對應する Ω_N の基本開集合 (basic open set) を $\mathfrak{A}_\lambda^{(x)*}$ とし，補題 1 の方法で連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ を定義する。このとき，定理 3 に對して，次の定理を得る。

定理 5. $x\rightarrow f_x(\mathfrak{p})$ なる對應に於て次の關係が成立する。

(1°) $f_x(\mathfrak{p})\equiv 0$ と任意の自然數 n に對し $n(|x|\frown e^\alpha)\leqq e^\alpha$ は同義。

(2°) $\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ のとき $f_{e^\alpha}(\mathfrak{p})=1$, 其の他の點では $f_{e^\alpha}(\mathfrak{p})=0$.

(3°) $f_x(\mathfrak{p})$, $f_y(\mathfrak{p})$ が異號の無限大でないとき，$f_{x+y}(\mathfrak{p})=f_x(\mathfrak{p})+f_y(\mathfrak{p})$,

(4°) $f_{\alpha x}(\mathfrak{p})=\alpha f_x(\mathfrak{p})$, α は 0 でない任意の實數

(5°) $f_{x\frown y}(\mathfrak{p})=\max\left(f_x(\mathfrak{p}),\ f_y(\mathfrak{p})\right)$

(6°) $f_{x\smile y}(\mathfrak{p})=\min\left(f_x(\mathfrak{p}),\ f_y(\mathfrak{p})\right)$

(7°) 特に L がアルキメデス的のとき，$f_x(\mathfrak{p})$ は，非稠密集合上を除いて有限値をとる。

(證) “ベクトル束の表現”[2]に於けると，同樣の方法で證明される。(1°) だけ證明する。$f_x(\mathfrak{p})\equiv 0$ とすべての自然數 n に對し $\bigvee_\alpha\left\{\mathfrak{A}\left(\left(|x|-\frac{1}{n}e^\alpha\right)_+\right)\frown\mathfrak{A}(e^\alpha)\right\}=0$ とは明かに同義である。後の條件から $\left(|x|-\frac{1}{n}e^\alpha\right)_+\frown e^\alpha=0$, 從て $(n|x|-e^\alpha)_+\frown ne^\alpha=0$. 故に

$$n(|x|\frown e^\alpha)\leqq n|x|\frown(n+1)e^\alpha\leqq(n|x|-e^\alpha)_+\frown ne^\alpha+e^\alpha=e^\alpha.$$

---

(1) 前田文友，小笠原藤次郎，前揭，第二節參照。
(2) 前田文友，小笠原藤次郎，前揭，第二節.

逆にすべての自然數 n に對し，$n(|x|\frown e^{a})\leqq e^{a}$ とする。

$$
\begin{aligned}
(n|x|-e^{a})_{+}\frown ne^{a} &= \{(n|x|-e^{a})\frown ne^{a}\}\smile 0\\
&=(n|x|\frown(n+1)e^{a}-e^{a})_{+}\\
&\leqq(e^{a}-e^{a})_{+}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

故に　$\bigvee_{a}\left\{\mathfrak{A}\left(\left(|x|-\frac{1}{n}e^{a}\right)_{+}\right)\frown\mathfrak{A}(e^{a})\right\}=0$　となる。

本定理は最近吉田耕作氏の得られた結果[(1)]と本質的に一致する。空間 Ω_N は必要ある場合 $\{f_x(\mathfrak{p})\}$ による分離空間を考へる。[(2)] (分離空間はビコムパクト Hausdorff 空間である)。

本定理の (1°) に於ける條件，すべての e^{a} とすべての自然數に對し $n(|x|\frown e^{a})\leqq e^{a}$，を滿足する x の全體を N_0 と置く。明かに N_0 は正規部分空間で，差群 $L-N_0$ はベクトル束になる。[(3)] もし $f_x(\mathfrak{p})$ が常に非稠密集合上を除いて有限値をとるときは，$\{f_x(\mathfrak{p})\}$ がベクトル束になる[(4)]から，$L-N_0$ がアルキメデス的となる。

最近吉田耕作氏は我々の表現法[(5)]と比較研究して，極大正規部分空間[(6)]を利用して，一般のベクトル束の表現を論じ，定理 5 と本質的に一致する結果を得られた。この機會に吉田氏の結果と我々のものとの關係を一瞥しやう。

吉田氏の方法は,[(7)] e^{a} に對し，$\mathfrak{q}$ を e^{a} を含まない L の極大正規部分空間とするとき，$L-\mathfrak{q}$ に於ける x に對應する剩餘類を $\bar{x}$ で表す。任意の實數 λ に對し，$\bar{x}\geqq\lambda\bar{e}^{a}$ のとき，$f_x(\mathfrak{q})=+\infty$，然らざるとき $f_x(\mathfrak{q})=\text{g. l. b.}(\lambda;\ \bar{x}\leqq\lambda\bar{e}^{a})$ と定める。すべての e^{a} に對し，かゝる $\mathfrak{q}$ の全體を Ω_1 とすれば，$f_x(\mathfrak{q})$ は Ω_1 上の函數である。$(\mathfrak{q};\ f_x(\mathfrak{q})\neq 0)$ を開集合の底とする様 Ω_1 を位相化し[(8)]，その上で定理 5 が成立することを述べるのである。

今 $\Omega=\dot{\sum_{a}}\mathfrak{A}^{*}(e^{a})$ と置くと，$\Omega_N-\Omega$ は非稠密閉集合であるから，Ω は局所ビ

---

(1) 吉田耕作，學士院紀事，**18** (昭 17)，339–342.
(2) 任意のビコムパクト Hausdorff 空間はブール空間の分離空間であるとの Stone の定理は，我々の表現論からも完全ブール空間の分離空間として得られる。
(3) G. Birkhoff，前掲，定理 7.9.
(4) 小笠原藤次郎，前掲，50 頁　定理 3.
(5) 前田文友，小笠原藤次郎，前掲.
(6) 吉田氏は，極大素イデヤルと呼ぶ。
(7) 此處では便宜上，吉田耕作，前掲，に於ける記法と異なつた記法を用ふる。
(8) Ω_1 は局所ビコムパクト Hausdorff 空間であることが容易に證明される。

コムパクト Hausdorff 空間である。

$$O_\lambda=\sum_\alpha\Big\{\mathfrak{A}^*\Big((x-\lambda e^\alpha)_-\Big)\frown\mathfrak{A}^*(e^\alpha)\Big\}$$

と置くと，O_λ は Ω の開且閉集合である。$\{O_\lambda\}$ に依つて補題 1 の方法で連續函數を定義すると，Ω 上では定理 5 の $f_x(\mathfrak{p})$ と一致するから，定理 5 が Ω 上で成立することになる。

任意の $\mathfrak{p}^\alpha\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ を考へる。$\mathfrak{q}^\alpha=\Big(x\,;\,f_x(\mathfrak{p}^\alpha)=0\Big)$ と置くと，$\mathfrak{q}^\alpha$ は e^α を含まない極大正規部分空間である。$\mathfrak{q}^\alpha$ が e^α を含まない正規部分空間であることは自明である。$\mathfrak{q}^\alpha$ が極大でないときは，$\mathfrak{q}^\alpha$ を純部分として含み，且 e^α を含まない正規部分空間 $\mathfrak{q}$ が存在する。$x\in\mathfrak{q}$，$x\notin\mathfrak{q}^\alpha$ なる正要素 x を考へる。$f_x(\mathfrak{p}^\alpha)>0$ である。$f_x(\mathfrak{p}^\alpha)=+\infty$ のときは $x'=x\frown e^\alpha$ とするとき，$x'\in\mathfrak{q}$，$f_{x'}(\mathfrak{p}^\alpha)=1$ のため，$x'-e^\alpha\in\mathfrak{q}^\alpha$，從て $e^\alpha\in\mathfrak{q}$ となり矛盾が起る。$f_x(\mathfrak{p}^\alpha)$ が有限のときも同じ矛盾が起る。故に $\mathfrak{q}^\alpha$ は e^α を含まない L の極大正規部分空間である。$L-\mathfrak{q}^\alpha$ に於ける x の屬する剩餘類を $\bar{x}$ とすれば，$\bar{x}\leqq\lambda\bar{e}^\alpha$ と $f_{x-\lambda e^\alpha}(\mathfrak{p}^\alpha)\leqq 0$，即ち $f_x(\mathfrak{p}^\alpha)\leqq\lambda$ とは同義であるから，定義によつて $f_x(\mathfrak{q}^\alpha)=f_x(\mathfrak{p}^\alpha)$ となる。この様に $\mathfrak{p}^\alpha\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ には一意的に $\mathfrak{q}^\alpha\in\Omega_1$ が對應する。

次に $\mathfrak{q}^\alpha$ を e^α を含まない L の任意の極大正規部分空間とする。$\mathfrak{q}^\alpha$ には上述の意味で，ある $\mathfrak{p}^\alpha\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ が對應することを示す。(一般にかゝる $\mathfrak{p}^\alpha$ は無數に存在する)。e^α に關して有界な L の要素の全體を L_b^α とし，L_b^α に屬する N_0 の要素の全體，即ち e^α に關する無限小の全體を N_0^α とすれば，$L_b^\alpha-N_0^\alpha$ は，定理 5 の結果から，$\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ 上の有界連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ のあるベクトル束で同型表現され，且 e^α は $\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ 上の恒等的 1 なる函數で表現される。一方 $x\to f_x(\mathfrak{q}^\alpha)$ は $L_b^\alpha-N_0^\alpha$ から實數空間への $\bar{e}^\alpha$ を 1 に對應させる線形-束-準同型であるから，$\mathfrak{p}^\alpha\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ が存在して $f_x(\mathfrak{q}^\alpha)=f_x(\mathfrak{p}^\alpha)$，$x\in L_b^\alpha$ が成立する。[1] 次に x を L の任意の正要素とすれば，$x\frown ne^\alpha\in L_b^\alpha$，從て

$$\min\,(f_x(\mathfrak{q}^\alpha),\ n)=f_{x\frown ne^\alpha}(\mathfrak{q}^\alpha)=f_{x\frown ne^\alpha}(\mathfrak{p}^\alpha)=\min\,(f_x(\mathfrak{p}^\alpha),\ n)$$

これから $f_x(\mathfrak{q}^\alpha)=f_x(\mathfrak{p}^\alpha)$. x が L の任意の要素のとき，矢張り $f_x(\mathfrak{q}^\alpha)=f_x(\mathfrak{p}^\alpha)$ と

---

(1) $\mathfrak{L}$ をビコムパクト Hausdorff 空間 R 上の 1 を含む有界連續函數のあるベクトル束とする。$\mathfrak{L}$ から實數空間への 1 を 1 に對應させる線形-束-準同型對應 $f\to\xi(f)$，$f\in\mathfrak{L}$ は R の一點で實現される。即ち $\xi(f)=f(p_0)$ なる $p_0\in R$ が存在する。(證) $\xi(f)=0$ なるすべての f の共通の零點 $p_0\in R$ が存在する。存在しないとすれば，R のビコムパクトを使つて，$\xi(1)=0$ なる矛盾を導くことが出來る。$\xi(f)=\lambda$ とすれば $\xi(f-\lambda)=0$，即ち $f(p_0)=\lambda$.

なる。$\mathfrak{q}^{\alpha}$ は e^{α} を含まない極大正規部分空間であるから，前述の意味で $\mathfrak{p}^{\alpha}$ に q^{α} が對應する。

この所論から，$\{f_x(\mathfrak{p})\}$ による Ω の分離空間を作るとき，$\mathfrak{p}^{\alpha}$ と恒等視される點の集合と上述 $\mathfrak{q}^{\alpha}$ のが一對一對應する。吉田氏による Ω_1 の位相化から，Ω_1 は Ω の分離空間と見做される，しかも $\mathfrak{A}^*(e_{\alpha})$ と $\mathfrak{A}^*(e_{\beta})$ $(\alpha \neq \beta)$ の點は恒等視されないから，Ω_1 は局所ビコムパクト Hausdorff 空間である。

以上の如く，吉田氏の方法は局所ビコムパクト Hausdorff 空間上の連續函數族による表現論であつて，我々の所論からすれば，$\sum_{\alpha}\mathfrak{A}^*(e^{\alpha})$ 上の表現を考へ，次いで $\{f_x(\mathfrak{p})\}$ による分離空間上の表現を考へることに外ならない。我々の本來の方法は，Ω_N をかやうな $\mathfrak{A}^*(e^{\alpha})$ に切斷して，その各々の上の表現[1]を繼合せるのではなく，最初から Ω_N そのものの上で表現を論じ，必要あるときは，$\{f_x(\mathfrak{p})\}$ による分離空間上の表現を考へるのであつて[2]，Ω_N 自身 L によつて一意的に定まるから，必ずしも分離空間を作ることを必要としない。

中野秀五郎氏の表現論[3]との關係は §4 で明かにする。

§2. 連續函數のベクトル束。

ビコムパクト Hausdorff 空間とその上の連續函數族のベクトル束の間の位相的，代數的，束論的關係に就ては，前著“ベクトル束論 (1)”[4] 第一編第二章 §1 で論じた。この際，完全ブール代數の表現ブール空間に特に著しい性質を認めた。そこに於ける所論は連續函數の定義されてゐる空間を一般にしても成立つことを注意する。證明は同論法によるから，必要以外は省略する。

定理 1. Ω を完全正則[5] Hausdorff 空間，且任意の空でない開集合は第一種集合でないとする。このとき次の諸條件は互に同義である。

(1°) 任意の開集合の閉苞は開集合である。[6]

---

(1) 任意の $x \in L$, 及び $\mathfrak{p} \in \mathfrak{A}^*(e^{\alpha})$ に對し，$\mathfrak{A}^*((x-\lambda e^{\alpha})_-)$ により補類 1 の方法で $f_x(\mathfrak{p})$ を定めること。

(2) 表現を $\sum \mathfrak{A}^*(e^{\alpha})$ 上で論ずることを不可とするのではない。表現法は當面する問題に最も適切なものをとるべきことは云ふまでもない。列空間の場合などではかやうな表現を考へることは自然であらう。尙 §4 參照。

(3) 中野秀五郎，數物記事 **23** (昭 16), 485-511. 全國紙上數學談話會，**213** (昭 16), 120-140.

(4) 小笠原藤次郎，前揭。

(5) 任意の閉集合 F と之に屬しない點 p_0 に對し，p_0 で 0, F 上で 1, 他の點 p で $0 \leqq f(p) \leqq 1$ なる連續函數 $f(p)$ が存在することを云ふ。M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375-481. 定義 21 參照。

(6) (1°) と (9°) は第一種集合に關する假定なしに同義である。中野秀五郎，學士院紀事，**17** (昭 16), 308-310. に證明されてゐる。

(2°) 任意の Baire の性質をもつ集合は第一種集合を法をして開且閉集合と一致する。

(3°) 任意の Borel 集合は第一種集合を法として開且閉集合と一致する。

(4°) 任意の Baire の性質をもつ Ω 上の函數(無限大値をとつても差支へない)は第一種集合上を除外して，Ω 上の連續函數を一致する。

(5°) 任意の Ω 上の B-可測(Borel 可測の意)函數は第一種集合上を除いて Ω 上の連續函數と一致する。

(6°) (4°) に於て函數を有界としたもの。

(7°) (5°) に於て函數を有界としたもの。

(8°) 非稠密集合を除いて有限値をとる連續函數の全體は完全ベクトル束である。

(9°) (8°) に於て函數を有略としたもの。

(證) (1°)→(2°)→(3°), (2°)→(4°)→(5°), (4°)→(6°)→(7°), (5°)→(8°)→(9°)→(1°) の順序に證明すればよい。(證略)

注意。(8°) に於て函數の和は有限値をとる點で定まる様に定義されるものとする[1]。

本定理の條件の何れかが成立するときは，開且閉集合(この場合正則開集合[2]と一致する)の全體は包含關係で半順序を定めるとき，完全ブール代數となることが容易に判る[3]。また，第一種集合上を除いて一致する函數と對等と定めるとき，第一種集合上を除いて有限値をとる Baire の性質をもつ(或は B-可測)函數の全體は (8°) のベクトル束と同義な完全ベクトル束になる。定理 1 から次の定理 2, 3 を得る。

定理 2. ビコムパクト Hausdorff 空間が前定理の何れかの條件を滿足する條件は，完全ブール代數の表現ブール空間となることである。

定理 3. 局所ビコムパクト Hausdorff 空間が定理 1 の條件の何れかを滿足するための條件は，制限的完全廣義ブール代數の表現空間になることである。

完全ベクトル束の主イデヤルの全體 $\boldsymbol{P}$ は制限的完全廣義ブール代數であ

---

(1) 小笠原藤郎，前揭，50 頁定理 3 の注意參照。

(2) 開集合の閉苞の內點の集合として表される開集合のこと。

(3) Ω が完全不連結のとき，これが定理 1 の何れの條件とも同義になる。

るから，$\boldsymbol{P}$ の表現空間 Ω_{P} に對しては定理 1 の條件の何れも成立する。尙このとき，正規イデヤルの完全ブールの代數 $\boldsymbol{N}$ の表現ブール空間 Ω_{N} との關係は，Ω_{P} を Ω_{N} の部分集合と考へたとき，$\Omega_{N}-\Omega_{P}$ は非稠密閉集合となる。從て Ω_{P} の任意の連續函數は Ω_{N} の連續函數に一意的に擴大せられることになる。

定理 4. Ω を正規[1] Hausdorff 空間とし，且任意の空でない開集合は第一種集合でないとする。このとき次の諸條件は互に同義である。

(1°) 開集合が F_{σ} 集合のとき，その閉苞は開集合である。[2]

(2°) Ω 上の任意の Baire の函數 (無限大値をとつても差支くない) は第一種集合上を除いて Ω 上の連續函數 (無限大値をとることを許す) と一致する。

(3°) (2°) に於て函數を有界としたもの。

(4°) 非稠密集合を除いて有限値をとる連續函數の全體は σ-完全ベクトル束を作る。

(5°) (4°) に於て函數を有界としたもの。

注意 (4°) に於ては函數の和は有限値をとる點で定まるものとする。

(證) (1°)→(2°)→(3°)，(2°)→(4°)→(5°)，(5°)→(1°) の順序に證明すればよい。(1°)→(2°) だけ證明する。[3] $\{f_{n}(p)\}$ を連續函數の單調增加列，$f(p)$ をその極限とする。有理數 λ に對し，$E_{\lambda}=\left(p;\, f(p)<\lambda\right)$，$B_{\lambda}=\sum_{1}^{n}\left(p;\, f_{n}(p)<\lambda\right)$ と置くと，$\lambda_{1}<\lambda_{2}$ に對し，$E_{\lambda_{1}}\subset B_{\lambda_{1}}\subset E_{\lambda_{2}}$ となるため，B_{λ} を使つて §1，補題 1 の方法で函數を定義するとき，その函數は $f(p)$ と一致することが判る。然るに B_{λ} は F_{σ} 集合[4]であるから，(1°) により B_{λ} の閉苞 $\bar{B}_{\lambda}$ は開集合で $\bar{B}_{\lambda}-B_{\lambda}$ は非稠密 (從て第一種集合) である。$\bar{B}_{\lambda}$ を使つて §1，補題 1 の方法で連續函數 $g(p)$ を定義すると ，$\sum_{\lambda}(\bar{B}_{\lambda}-B_{\lambda})$ 上を除いて $f(p)=g(p)$ となる。$\{f_{n}(p)\}$ が Baire の函數の單調增加列で各 $f_{n}(p)$ は第一種集合上を除いて連續函數 $g_{n}(p)$ と一致するとする。$f(p)$，$g(p)$ を夫々 $\{f_{n}(p)\}$，$\{g_{n}(p)\}$ の極限函數とすれば，明かに $f(p)$ と $g(p)$ は第一種集合上を除いて一致し，$g(p)$ は

---

(1) 互に共通點のない閉集合 F_1, F_2 に對し，$F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$, $G_1G_2=0$ なる開集合 G_1, G_2 が存在するとき正規と云ふ。

(2°) 第一種集合に關する假定なしに，(1°)，(5°) が同義になる。中野秀五郎，學士院紀事，**17** (昭16)，308–310. 參照。

(3°) 小笠原藤次郎，前掲，53 頁，定理 1 參照.

(4) $(p;\, f_n<\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(p;\, f_n(p)\leq\lambda-\dfrac{1}{i}\right)$ から。

上述によつて連續函數と第一種集合上を除いて一致するから $f(p)$ に就いても同様である。單調減小列に就ても同様のことが成立つから，Baire の函數に對して (2°) が成立つ。

注意 (5°)→(1°) を除いて空間が正規である條件を使つてゐない。[1]

定理 5.[2] Ω がビコムパクト Hausdorff 空間のとき，前定理の何れかの條件が成立つたもの條件と，Ω が σ-ブール代數の表現ブール空間となることとは同義である。

定理 6. Ω が局所ビコムパクト Hausdorff 空間のとき，Ω が制限的 σ-完全廣義ブール代數の表現空間であるとの條件は定理 4 の何れの條件とも同義である。

(證) Ω に對し定理 4 の (5°) が成立つとする。Ω が完全不連結なることを云へば，Ω が制限的 σ-完全廣義ブール代數の表現空間であることは，前定理から容易に判る。Ω の一點 p_0 をとり，閉苞がビコムパクトな p_0 の任意の近傍 G を考へる。p_0 で 1, $\Omega-G$ で 0, 他の點で $0\leqq f(p)\leqq 1$ なる連續函數 $f(p)$ を考へる。$g=\bigvee(nf\frown 1)$ で定義される連續函數は明かに特性函數で $g(p_0)=1$, 且 $\Omega-G$ では 0 となるから，Ω が完全不連結になる。逆に Ω を制限的 σ-完全廣義ブール代數 A の表現空間とする。即ち Ω の點 $\mathfrak{p}$ は A の極大双對イデヤルからなる。$a\in A$ に對する Ω の集合を $\mathfrak{E}(a)$ で表すと，$\mathfrak{E}(a)$ はビコムパクトな開集合である。G を開集合且 F_σ 集合とする。$\mathfrak{E}(a)G$ も開集合且 F_σ 集合となるから前定理により，$\mathfrak{E}(a)\overline{G}=\overline{\mathfrak{E}(a)G}$ は $\mathfrak{E}(a)$ に於て，從て Ω に於て開集會となる。$\mathfrak{E}(a)$ は任意であるから $\overline{G}$ が開集合になり，定理 4 の (1°) が成立する。定理 4 の注意から，本定理の成立が判る。

定理 1, 4 に於て Ω が第一可附番性公理を滿足するときは，定理の條件 (1°) が成立するならば，Ω は弧立點の集合からなることが容易に判る。故に完全ブール代數の表現ブール空間で第一可附性公理を滿足すれば，この空間は有限個の點からなる。廣義の完全ブール代數の表現空間が第一可附番性公理を滿足すれば，孤立點のみからなる。制限的 σ- 完全(廣義)ブール代數の表現空間に就いても同様のことが云へる。

(1) 中野秀五郎，前揭。

§3. C 空間の切斷による完全化。

[0, 1] 上の有界連續函數の全體 C の切斷による完全化を [0, 1] 上の函數族で表現すれば如何なるものになるか。これは，第一種集合上を除いて一致する函數(以後對等な函數と云ふ)を恒等視するとき，[0,1] 上の有異な，Baire の性質をもつ函數の全體からなる。これを稍々一般にして論ずる。

R を完全正則空間とし，C を R 上の有界連續函數の全體とする。

補題 1. C の正規イデヤルの完全ブール代數と，R の正則開集合のブール代數は束同型である。

(證) C の正規イデヤルの作る完全ブール代數を $\boldsymbol{N}_c$ とする。$\mathfrak{A}\in\boldsymbol{N}_c$ に開集合 $G(\mathfrak{A})=\sum_{f\in\mathfrak{A}}(p;\ |f(p)|>0)$ を對應させる。$g\in\mathfrak{A}'$ のとき，明かに $G(\mathfrak{A})\big(p;\ |g(p)|>0\big)=0$, 即ち $G(\mathfrak{A})G(\mathfrak{A}')=0$. G_1 を $G(\mathfrak{A}')$ と共通點をもたぬ任意の開集合とし，任意の點 $p_0\in G_1$ を考へる。R の完全正則性から，p_0 で 1, $R-G_1$ で 0, 他の點で $0\leqq f(p)\leqq 1$ なる連續函數 $f(p)$ が存在する。明かに $f\in\mathfrak{A}$, 從て $p_0\in G(\mathfrak{A})$ となる。故に $G(\mathfrak{A})$ は正則開集合である。[1] 逆に任意の正則開集合には $G(\mathfrak{A})$ と書き表される $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{N}_c$ の存在も容易に云へるから本補題が成立することになる。

以下 $G(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ に對應する正則開集合と呼ぶ。本補題により正則開集合のブール代數の表現空間は Ω_{N_c} となる。

更に R の如何なる空でない開集合も第一種集合でないとする。B を R 上の Baire の性質をもつ有界函數の全體とし，第一種集合上を除いて一致する函數を對等と云ひ，對等な函數を恒等視して，B をベクトル束にする。C の切斷による完全化 $\bar{C}$ を Ω_{N_c} の有界連續函數に 1 が 1 に對應する樣表現する。$\bar{C}$ をかゝる連續函數の全體と見做す。$f\in B$ とする。任意の有理數に對し，$(p;\ f(p)<\lambda)$ と第一種集合を法として一致する正則開集合を G_λ とすると，$\lambda<\lambda'$ なる有理數 λ' に對し，$G_\lambda\subset G_{\lambda'}$, 充分小なる λ に對し $G_\lambda=0$, 充分大なる λ に對し，$G_\lambda=R$. また $\sum_{\lambda<\lambda'}G_\lambda$ と $G_{\lambda'}$ は第一種集合を除いて一致する。§1, 補題 1 の方法で G_λ を使つて函數を定義すれば，明かに $f(p)$ と對等なものを得る。特に $f(p)$ が連續函數のときは一致する。G_λ に對應する $\boldsymbol{N}_c$ の要素を $\mathfrak{A}_\lambda$ と置くと，補題 1 により $\mathfrak{A}_\lambda$ は G_λ に對應した性質をも

(1) G. Birkhoff, 前揭, 102 頁。

つ。$\mathfrak{A}_\lambda$ を使つて §1 に述べた方法[1]で $\bar{C}$ の函數を定めこれを $f(\mathfrak{p})$ と置く。この對應は B と $\bar{C}$ の線形-束-同型對應で，特に C の要素を不變にすることは容易に知られる。故に B が C の切斷による完全化である。

Ω_{N_c} 上非稠密點集合を除いて有限値をとる連續函數全體の完全ベクトル束に，上述の方法を適用すると，R 上第一種集合を除いて有限値をとる Baire の性質をもつ函數の全體に於て對等なものを恒等視して生ずる函數族と線形-束-同型になる。また上述の構成から，Baire の性質をもつ函數の代りに B-可測函數に限つてよいことが判る。

§4. ベクトル束の表現に於ける表現函數。

先づ，L をアルキメデス的ベクトル束とし，§1 に於て述べた，$\{e^\alpha\}$, $\mathfrak{A}_\lambda^{(x)}=\bigvee_\alpha\left\{\mathfrak{A}\left((x-\lambda e^\alpha)_-\right)\frown\mathfrak{A}(e^\alpha)\right\}$ を使つて，L を Ω_N の非稠密集合上を除いて有限値をとる連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ のベクトル束で表現する。$f_x(\mathfrak{p})$ は $\{e^\alpha\}$ の選び方によつて異り得るものである。$\left(\mathfrak{p};f_x(\mathfrak{p})<\lambda\right)$, $\left(\mathfrak{p};f_x(\mathfrak{p})>0\right)$, $\left(\mathfrak{p};f_x(\mathfrak{p})<0\right)$, $\left(\mathfrak{p};f_x(\mathfrak{p})\neq 0\right)$ と對等な[2]基本開集合は，$f_x(\mathfrak{p})$ の定義から，$\mathfrak{A}_\lambda^{(x)*}$, $\mathfrak{A}^*(x_+)$, $\mathfrak{A}^*(x_-)$, $\mathfrak{A}^*(|x|)$ なることが容易に知られる。a を L の任意の正要素とする。$\mathfrak{A}^*(a)$ に於て $\dfrac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$ と對等な連續函數を，$\dfrac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$ 自身で表すことにすれば，$\mathfrak{A}^*(a)$ に於て

$$\left(\mathfrak{p};\ \frac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}<\lambda\right),\quad \left(\mathfrak{p};\ f_x(\mathfrak{p})<\lambda f_a(\mathfrak{p})\right),\quad \mathfrak{A}^*\left((x-\lambda a)_-\right)\mathfrak{A}^*(a)$$

は互に對等な集合である。從て $\mathfrak{A}^*(a)$ に於て，$\mathfrak{A}^*\left((x-\lambda a)_-\right)$ を使つて，§1，補題 1 の方法により連續函數を定義すると，これは $\dfrac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$ と一致する。即ち $\dfrac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$ は $\{e^\alpha\}$ の選擇に無關係である，即ち a を $\mathfrak{A}^*(a)$ 上で 1 となる様な表現に於ける，x の $\mathfrak{A}^*(a)$ 上の表現函數に外ならない。a が正要素でないときも，$\dfrac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$ は $\mathfrak{A}^*(|a|)$ 上で $\{e^\alpha\}$ の選擇に無關係なることが判る。中野秀五郎氏の記法に從つて[3]

(1) 219 頁。
(2) 第一種集合を法として一致する集合，第一種集合上を除いて一致する函數は互に對等と云ふ。
(3) 中野秀五郎，數物記事，**23** (昭 16), 485-511. 中野氏は σ- 完全ベクトル束の $\Omega_{\mathfrak{p}}$ 上で $\left(\dfrac{x}{a},\mathfrak{p}\right)$ なる記法を導入した。

$$\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}^*(|a|)\quad に對し,\quad \left(\frac{x}{a},\ \mathfrak{p}\right)=\frac{f_x(\mathfrak{p})}{f_a(\mathfrak{p})}$$

と定める。

$\{e^\alpha\}$ の代りに同様の性質をもつ $\{u^\delta\}$ による x の表現函數を $g_x(\mathfrak{p})$ とすれば, $g_x(\mathfrak{p})$ の定義から

$$\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}^*(u^\delta)\quad に對して\quad g_x(\mathfrak{p})=\left(\frac{x}{u^\delta},\ \mathfrak{p}\right)=\frac{f_x(\mathfrak{p})}{f_{u^\delta}(\mathfrak{p})}$$

となる。

次に L を完全ベクトル束とする。その主イデヤルの作る制限的完全廣義ブール代數 P の表現空間 Ω_P は一般には局所ビコムパクトである。$\sum_\alpha\mathfrak{A}^*\left((x-\lambda e^\alpha)_-\right)\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ と對等な開且閉集合の族で, §1 補題 1 の方法で連續函數 $f(\mathfrak{p})$ を定義すれば, $f_x(\mathfrak{p})$ は非稠密集合上を除いて有限値をとり, L と線形–束–同型なベクトル束を作る。また $|\varphi(\mathfrak{p})|\leqq|f_x(\mathfrak{p})|$ なる任意の連續函數 $\varphi(\mathfrak{p})$ は, ある要素の表現函數となることが云へる。かゝる $f_x(\mathfrak{p})$ に對しても前述の所論が適用される。この表現は主イデヤルによる表現法である。

L が σ-完全ベクトル束の場合も上述と同様に $\{e^\alpha\}$ をとり, Ω_P を考へる。x の $\mathfrak{A}^*(a)$ 上 a を 1 とする表現[1]を, 中野氏の記法で $\left(\frac{x}{a},\ \mathfrak{p}\right)$ とする。L の同型表現を得るために, $\Omega=\sum_\alpha\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ と置き, 任意の $\mathfrak{p}\in\Omega$ に對し, $\mathfrak{p}\in\mathfrak{A}^*(e^\alpha)$ なる e^α が存在する。$f_x(\mathfrak{p})=\left(\frac{x}{e^\alpha},\ \mathfrak{p}\right)$ と置くとき, $x\to f_x(\mathfrak{p})$ により L の同型表現が得られる。$\{e^\alpha\}$ が可附番, 或は L が完全ベクトル束のときは, Ω 上の任意の連續函數は Ω_P 上の連續函數に一意的に擴大されることを法意する。これは中野氏の表現法[2]と本質點に一致するものである。

§5. ベクトル束の有限値實函數族による表現。

今 A を完全ブール代數, Ω_A をその表現ブール空間, $a\in A$ に對應する基本開集合を $\mathfrak{E}(a)$ で表す。Ω_A の點は A の極大双對イデヤルである。Ω_A 上非稠密集合を除いて有限値をとる連續函數全體の作る完全ベクトル束を $\mathfrak{L}_A$ とする。有界連續函數全體のベクトル束を $\mathfrak{L}_{bA}$ で表す。

補題 1. $\mathfrak{L}_A$ から實數空間への線形–束–準同型對應(群束としての準同型を

---

(1) 即ち, $\mathfrak{A}^*\left((x-\lambda e^\alpha)_-\right)$ により §1, 補題 1 の方法で連續函數を定義する。

(2) 中野秀五郎, 全國紙上數學談話, **213** (昭 16), 120–140. アルキメデス的ベクトル束の表現は切斷による完全化により σ–完全の場合に歸着せしめられるとするものである。

考へても同じことになる)が，恒等的に 0 に對應させる trivial なもの以外に存在しない條件と，次の何れの條件も同義である。

(1°) 任意の $\mathfrak{p}_0 \in \Omega_A$ に對し，$f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる $f \in \mathfrak{L}_A$ が存在する。

(2°) A の任意の極大双對イデヤルは下端が 0 になる可附番部分集合をもつ。

(證) ある $\mathfrak{p}_0 \in \Omega_A$ に對し，$f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる $f \in \mathfrak{L}_A$ が存在しないときは，$f \to f(\mathfrak{p}_0)$ は non-trivial な準同型對應である。次に如何なる $\mathfrak{p}_0 \in \Omega_A$ に對しても，$f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる $f \in \mathfrak{L}_A$ が存在するとする。今 $\xi(f)$ を non-trivial な對應を與へるものとする。$\xi(1) \neq 0$ のときは，$\xi(1)=1$ として差支へない。$\mathfrak{L}_{bA}$ の函數に共通に Ω_A の一點 $\mathfrak{p}_0$ が存在して，$f \in \mathfrak{L}_{bA}$ のとき $\xi(f)=f(\mathfrak{p}_0)$.[(1)] 今 $f \in \mathfrak{L}_A$ を $f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる正値函數とする。$f_n(\mathfrak{p})=\min\big(f(\mathfrak{p}), n\big)$ と置くと，$f_n \in \mathfrak{L}_{bA}$. $\xi(f_n)=\min\big(f(\mathfrak{p}_0), n\big)=n$ となるから，$\xi(f)=+\infty$ となり矛盾が起る。$\xi(1)=0$ のときは，$\xi(\varphi)=1$ なる正値函數 φ をとる。$\big(1+\varphi(\mathfrak{p})\big)f(\mathfrak{p}) \to f(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{L}_A$ の自己同型對應であるから，$\xi'(f)=\xi\big((1+\varphi)f\big)$ で定められる準同型對應 $\xi'(f)$ を考へると，$\xi'(1)=1$ となり，上述によつて矛盾が起る。故に non-trivial な準同型對應の存在しない條件は (1°) になる。從て (1°), (2°) の同義を證明すればよい。

(1°)→(2°) (1°) が成立つとする。$\mathfrak{p}_0$ に對し，$f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる正値函數 $f \in \mathfrak{L}_A$ をとる。$\big(\mathfrak{p};\, f(\mathfrak{p})>n\big)$ と對等な基本開集合を $\mathfrak{E}(a_n)$ とすると，$\mathfrak{E}(a_n) \subset \big(\mathfrak{p};\, f(\mathfrak{p}) \geqq n\big)$ のため，$\prod_n \mathfrak{E}(a_n)$ は非稠密である。故に $\bigwedge a_n=0$. 然るに $\mathfrak{p}_0$ は A の極大双對イデヤルであるから，$a_n \in \mathfrak{p}_0$ となる。

(2°)→(1°). (2°) が成立つとする。任意の $\mathfrak{p}_0$ に對し，$a_n \in \mathfrak{p}_0$, $\bigwedge a_n=0$ なる $\{a_n\}$ をとる。こゝに $a_n > a_{n+1}$ としてよい。このとき $\prod_n \mathfrak{E}(a_n)$ は非稠密となる。$f(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p} \in \Omega_A - \mathfrak{E}(a_1)$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{E}(a_n)-\mathfrak{E}(a_{n+1})$, $\mathfrak{p} \in \prod_n \mathfrak{E}(a_n)$ なるに從つて，0, n, $+\infty$ とすれば，$f \in \mathfrak{L}_A$ 且 $f(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ となる。

これで本補題の證明が完結した。

A に於て次の條件を考へる。

(3°) A の任意の獨立な部分集合[(2)]は可附番集合である。

(1) 223 頁，脚註 (1) 參照。
(2) 任意の二要素が互に直交する 0 でない要素からなる集合の意。

(4°) A の任意の増加超限列 $a_1 < a_2 < \cdots < a_\omega < \cdots < a_\alpha < \cdots$ は可附番である。[1]

(5°) (4°) の双對命題。

(6°) A の任意の部分集合は，之と上端を同じくするその可附番部分集合をもつ。

(7°) (6°) の双對命題。

(8°) A は可分である，即ち A の可附番部分集合 $\{v_n\}$, $v_n > 0$ が存在し，任意の A の要素 $a > 0$ は $\{v_n\}$ のある部分集合の上端になる。

補題 2. (3°)－(7°) は互に同義である。

(證) (4°), (5°) の同義，(6°), (7°) の同義は自明。

(3°)→(4°) (3°) が成立つとする。(4°) の超限列に對し $\{a'_\alpha \frown a_{\alpha+1}\}$ は (1°) により可附番となり (4°) が成立つ。

(4°)→(3°) (4°) が成立つとする。非可附番な獨立な部分集合が存在するとすれば，超限歸納法により非可附番な増加超限列を作ることが出來る。

(5°)→(7°) (5°) が成立するとする。E を A の任意の部分集合とし，E の可附番部分集合の下端として表される A の要素の集合を E_1 とする。E_1 の中に最小の要素が存在しないときは，E_1 の要素で非可附番減少超限列を作れることになる。

(7°)→(5°) (7°) が成立するとする。非可附番な減少超限列 $\{a_\alpha\}$ が存在するとす。a_α は第一級，第二級の順序數に對し定義されてゐるとしてよい。$\{a_\alpha\}$ と下端を等しくする可附番部分集合が存在するとすると，ある第二級の順序數 β が存在し，常に $a_\alpha > a_\beta$ となり矛盾が起る。

補題 3. (8°)→(3°) が成立つ。

(證) 殆ど自明。

補題 4. A が原子的要素を含まず，且 (3°)－(7°) の何れかが成立つとき，(2°) が成立つ。

(證) 殆ど自明。

補題 5. A が原子的要素を含まず，且 (8°) が成立つとき (2°) が成立つ。

(證) 殆ど自明。

(1) 前田文友，廣島文理大紀要，**10** (昭 15), 7-36 に於ては (3°)－(5°) の同義をもつと一般化して論ぜられてゐる。

以上は A を完全ブール代數としたが，A を σ-完全ブール代數としても上のすべての補題が成立つことは證明から明かである。

L を單位 e をもつ，完全ベクトル束とし，主イデヤルのブール代數 $\boldsymbol{P}$ の表現ベール空間を Ω_P とする。

補題 6. $\boldsymbol{P}$ が $(3^\circ)-(7^\circ)$ の何れかを滿足するための條件は次の何れかである。

(i) L の上方有界部分集合は上端を同じくする可附番部分集合をもつ。

(ii) (i) の双對命題

(證) (ii)$\rightarrow(7^\circ)$ $\boldsymbol{P}$ は e に關する特性要素の作るブール代數と束同型である。從て (ii) が成立するとき，(7°) が成立する。

$(7^\circ)\rightarrow$(ii) E を 0 を下端とする L の部分集合とする。單位を e 適當にとることによつて，$x\in E$ に對し，$0\leqq x\leqq e$ としてよい。$x\in E$ に對し，$\mathfrak{A}\left((x-\frac{1}{n}e)_+\right)$ への e の射影を考へる。かゝる集合の下端は 0 であるから，(7°) によりこれから可附番分集合の下端が 0 になる。かゝる要素に對應する E の正要素を $\{x_{n,m}\}$ $m=1,2,\dots$ とする。$\bigwedge_m x_{n,m}\leqq\frac{1}{n}e$. 故に $\bigwedge_{n,m}x_{n,m}=0$. 從て (ii) が成立する。

(i), (ii) の條件はまた夫々 (4°), (5°) の形の條件で表すことが出來る。

正則ベクトル束は常に (i), (ii) を滿足する。これ等の補題から non-trival を準同型對應を許さない。ベクトル束の例を作ることは容易である。

例 1. A として $[0,1]$ 上の正則開集合の完全ブール代數[(1)]をとるとき，A は補題 5 の條件を滿足する。$\mathfrak{L}_A$ は $[0,1]$ 上第一種集合を除いて有限値をとる B-可測函數の完全ベクトル束になる。

例 2. A として $[0,1]$ 上の Lebesque 可測集合の零測度集合を法とする完全ブール代數とすると，A は補題 4 の條件を滿足する。$\mathfrak{L}_A$ は殆ど到る所有限値をとる B-可測函數の作る完全ベクトル束になる。

次に L を正則ベクトル束[(2)]とする。$\mathfrak{A}(a)$ が $\boldsymbol{N}$ の原子的要素のとき，換言すれば，任意の $x\in\mathfrak{A}(a)$ が $x=\lambda a$ の形に書かれるとき，a を孤立要素と云ふ。$\{a_\alpha\}$ が $a_\alpha\frown a_\beta=0$, $\alpha\neq\beta$, 且任意の $x\in L$ が $x=\sum\lambda_\alpha a_\alpha$ (可附番個の λ_α の

---

(1) 中山正，前揭，186 頁。

(2) 詳しくは K_6^- 型正則ベクトル束。

みが 0 でない) の形に書かれるとき L は**廣義の列空間**と云ふ。

定理 1. 正則ベクトル束 L が實數空間へ non-trivial な線形-束-同型對應を許すための條件は L が孤立要素を含むことである。

(證) L が孤立要素 a を含むとき $P_{\mathfrak{A}(a)}x=\lambda a$ の形になるから $x\to\lambda$ が non-trivial な準同形對應である。L が孤立要素を含まぬとする。$\xi(x)$ が non-trivial な對應を與へるものとすると矛盾の起ることを示す。$\xi(x)=1$ を滿足する正要素の一つを e とする。主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ を考へる。ことにより $L=\mathfrak{A}(e)$ として一般性を失はない。e を恒等的に 1 にする樣 L を Ω_N の連續函數で表現すると，補題 1 の證明で示した樣に $\xi(x)=f_x(\mathfrak{p}_0)$ なる $\mathfrak{p}_0\in\Omega$ が存在する。$f_x(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なる x の存在を證明すればよい。假定により，N には孤立點が存在しないから，$\mathfrak{A}(e_\alpha)\in\mathfrak{p}_0$ なる特性要素の全體を $\{e_\alpha\}$ とすると $\bigwedge e_\alpha=0$ となる。從て $e_n\downarrow 0$ なる $\{e_\alpha\}$ の部分集合 $\{e_n\}$ が存在する。$\{e_n\}$ は 0 に相對一様收斂するから，$e_n\leqq\lambda_n u$ $\lambda_n\downarrow 0$ なる u が存在する。必要あれば部分列を作ることによつて $\lambda_n=\dfrac{1}{2^n}$ としてよい。$x=\sum e_n$ と置くと $f_x(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ となり(1)矛盾が起る。これで證明が完了した。

正則ベクトル束 L の正規イデヤルの完全ブール代數 N を N_1, N_2 の直和に分解し，N_1 は原子的ブール代數，N_2 は原子的要素のないブール代數とする。N_2 が空でなければ，定理 1 により，L を有限値實函數で線形-束-同型表現が出來ない。よつて次の定理を得る。

定理 2. 正則ベクトル束が有限値實函數族で線形-束-同型表現されるための條件は，このベクトル束が廣義の列空間になることである。特に單位をもつ場合は列空間になることである。

正則ベクトル束の例としては，(S) 空間，L_p 空間，$1\leqq p<+\infty$ K-空間，K^--空間(2)等を擧げることが出來る。從て我々に有用な函數空間に二三の例を除いて，有限値實函數で同型表現が不可能になると云へる。

本研究に於て御懇切な御指導を賜つた前田教授に深く感謝する。尙本研究は文部省科學研究費の補助に依つてなされたものである。

廣島文理科大學數學教室

(1) $x=u$ と置いてもよい。

(2) 小笠原藤次郎，全國紙上數學談話會，**240** (昭 17), 1192–1231.