Ueber allgemeine Multiplikationsringe. I.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 10. 10. 1933.)

Im endlichen algebraischen Zahlkörper gilt der bekannte Satz:

Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ *ein Teiler eines Ideals* $\mathfrak{a}$, *so existiert immer ein drittes Ideal* $\mathfrak{c}$, *so dass*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$$

ist.

Aber für beliebige kommutative Ringbereiche, wie der Bereich aller ganzen algebraischen Zahlen, lässt sich dieser Satz nicht im allgemeinen aussprechen(1). Ein kommutativer Ring, in dem der obige Satz und der Teilerkettensatz gelten, d.h. ein Multiplikationsring, ist mithin ein spezieller Ring, und seine Struktur habe ich schon in meiner Abhandlung „*Axiomatische Begründung des Multiplikationsringes*"(2) ziemlich eingehend untersucht. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Struktur der verallgemeinerten Multiplikationsringe, d. h. der kommutativen Ringe, in denen nur die Gültigkeit des obigen Satzes voraugesetzt ist, nicht aber der Teilerkettensatz. Bei der Behandlung dieses Problems spielt der Begriff des Kerns vom Ideal eine wichtige Rolle, die von W. Krull zuerst in die Idealtheorie für Ringe ohne Endlichkeitsbedingung eingeführt wurde(3). Beim Beweis der Einzelheiten vom isolierten Komponentenideal eines Ideals, das zu einem Primideal gehört, hat W. Krull mit Hilfe des Wohlordnungssatzes die transfinite Induktion angewandt. Im letzten Paragraphen dieser Arbeit müssen wir daher eine besondere Voraussetzung für den Bau des zugrunde gelegten Ringes machen. Aber bei

(1) E. Stiemke, Ueber unendliche algebraische Zahlkörper, Math. Zeitschr. **25** (1926).

(2) Journal of the Hiroshima University **3** (1933), S. 43–59, zitiert mit „M".

(3) W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101** (1929), S. 729–744, zitiert mit „K".

der Untersuchung der Eigenschaften des allgemeinen Multiplikationsringes im ersten Paragraphen ist dieser Ring ganz frei von jeder Bedingung.

Eigenschaften der allgemeinen Multiplikationsringe.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne jede Bedingung. Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ ein *echter* Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, so existiere in $\mathfrak{R}$ immer ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$, so dass

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$$

ist. Dann heisst $\mathfrak{R}$ ein „*allgemeiner Multiplikationsring*".

Satz. 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal* (*einschl.* $\mathfrak{R}$), *und gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}^2$, *so gibt es auch kein Ideal zwischen* $\mathfrak{a}^n$ *und* $\mathfrak{a}^{n+1}$ *für jede ganze Zahl* n.[1]

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, so wird $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}$ für jede ganze Zahl n, und in diesem Fall gilt unsere Behauptung. Im anderen Fall wird

$$\mathfrak{a} = (a,\ \mathfrak{a}^2)\,,$$

wo a ein durch $\mathfrak{a}^2$ unteilbares Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet. Daraus folgt

$$\mathfrak{a}^n = (a^n,\ \mathfrak{a}^{n+1}) \tag{1}$$

für jede ganze Zahl n. Wäre

$$\mathfrak{a}^n > \mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}^{n+1}\,,$$

so würde

$$\mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{a}_1' > \mathfrak{a}^{n+1}\,,$$

wo

$$\mathfrak{a}_1' = ((r+\alpha)a^n,\ \mathfrak{a}^{n+1}), \qquad (r+\alpha)a^n \not\equiv 0(\mathfrak{a}^{n+1}) \tag{2}$$

ist, und r ein Element aus $\mathfrak{R}$, und α eine ganze Zahl bedeutet. Da nach (2) $(r+\alpha)\,a \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}^2)$ sein muss, so sollte

$$\mathfrak{a} = ((r+\alpha)\,a,\ \mathfrak{a}^2)$$

sein. Daher folgte

$$a \equiv 0 \quad \big(((r+\alpha)\,a,\ \mathfrak{a}^2)\big)\,.$$

(1) M. S. 44.

Also würde nach (1) und (2)

$$\mathfrak{a}^n = ((r+a)\mathfrak{a}^n,\ \mathfrak{a}^{n+1}) = \mathfrak{a}_1'\,.$$

Hiermit hätten wir einen Widerspruch zu der Annahme, dass $\mathfrak{a}^n > \mathfrak{a}_1 \geqq \mathfrak{a}_1'$ ist.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring. Dann gibt es in $\mathfrak{R}$ kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal (einschl. $\mathfrak{R}$) ist.*

Zunächst sei $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}$. Wäre $\mathfrak{R} > \mathfrak{a} > \mathfrak{R}^2$, so würde nach den Eigenschaften des Multiplikationsringes

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\mathfrak{a}',$$

wo $\mathfrak{a}'$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist. Da $\mathfrak{R}\,\mathfrak{a}' \equiv 0\ (\mathfrak{R}^2)$ ist, so folgte daraus $\mathfrak{a} \equiv 0\ (\mathfrak{R}^2)$, und es ergäbe sich ein Widerspruch. In diesem Fall ist der Satz damit bewiesen. Im anderen Fall nehmen wir an, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ existiert. Nämlich, es sei

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{a} > \mathfrak{p}^2\,. \tag{1}$$

Da $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so soll auch

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}' \tag{2}$$

sein. Wäre $\mathfrak{a}' \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, so würde $\mathfrak{a} \equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$, und wir hätten einen Widerspruch. Damit existiert in $\mathfrak{a}'$ ein Element a', das durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist. Aus (1) und (2) folgt auch

$$\mathfrak{a}' > \mathfrak{a} > \mathfrak{p}^2\,.$$

Hiermit soll

$$(a',\ \mathfrak{p}^2) \equiv 0\ \ (\mathfrak{a}') \tag{3}$$

sein. Aus (2) und (3) folgt

$$(a'\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}^3) \equiv 0\ \ (\mathfrak{a})\,.$$

Daraus ergibt sich nach (1)

$$(a'\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}^2) \equiv 0\ \ (\mathfrak{a})\,. \tag{4}$$

Andererseits ist $(\mathfrak{a}', \mathfrak{p})$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$, und folglich wird nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{p} = (a', \mathfrak{p})\, \mathfrak{m}$$

Wäre $\mathfrak{m} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, so würde für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element m aus $\mathfrak{m}$

$$a'm \equiv 0\ \ (\mathfrak{p})\,, \qquad a' \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p})\,.$$

Das ist offenbar ein Widerspruch. Wäre $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{m}$, so würde $\mathfrak{m}\,(a', \mathfrak{p}) \subseteqq \mathfrak{m} < \mathfrak{p}$. Das ist auch unmöglich. Damit muss

$$\mathfrak{p} = (a', \mathfrak{p})\mathfrak{p} = (a'\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2) \tag{5}$$

sein. Nach (1), (4) und (5) erhalten wir damit $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Das widerspricht aber der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Also muss es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein Ideal geben.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring, und es sei $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal. Wenn $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist, so ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Wenn $\mathfrak{p}$ (einschl. Nullideal) idempotent ist, so ist jeder echte Primidealteiler von $\mathfrak{p}$, der von $\mathfrak{R}$ verschieden ist, auch ein maximales Ideal, und für ein durch ein idempotentes Primideal $\mathfrak{p}$ teilbares Ideal $\mathfrak{a}$ gilt*

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,,$$

wo $\mathfrak{b}$ einen beliebigen Teiler von $\mathfrak{p}$ bedeutet.

Zunächst sei ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ nicht idempotent. Aus der Definition des Multiplikationsringes $\mathfrak{R}$ folgt nach Satz 2, dass es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt. Also ergibt sich für jedes durch $\mathfrak{p}^2$ unteilbare Element p_1 aus $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p} = (p_1, \mathfrak{p}^2)\,, \qquad p_1 \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p}^2)\,. \tag{1}$$

Wäre $\mathfrak{p}^2$ nicht primär, so würde

$$pr \equiv 0\ \ (\mathfrak{p}^2)\,, \qquad r \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p})\,, \tag{2}$$

wo p ein durch $\mathfrak{p}^2$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}$ bedeutet. Da $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring ist, so muss nach dem Beweis des Satzes 2

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}, r) \tag{3}$$

sein. Aus (1), (2) und (3) folgte damit

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}, r) = (p, \mathfrak{p}^2)(r, \mathfrak{p}) \equiv 0\ \ (\mathfrak{p}^2)\,.$$

Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist. Hiermit muss $\mathfrak{p}^2$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal sein. Hätte $\mathfrak{p}$ einen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{a}$, so würde nach der Definition des Multiplikationsringes

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(r, \mathfrak{p}), \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a, \mathfrak{p}), \tag{4}$$

wo r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{R}$, und a ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet. Damit ergäbe sich aus (1) und (4)

$$(r, p_1, \mathfrak{p}^2)(p_1, \mathfrak{p}^2) = (a, p_1, \mathfrak{p}^2)(p_1, \mathfrak{p}^2).$$

Daher folgte unmittelbar

$$(rp_1, \mathfrak{p}^2) = (ap_1, \mathfrak{p}^2).$$

Wir hätten damit

$$rp_1 \equiv a'p_1 \ (\mathfrak{p}^2), \qquad p_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2),$$

wo a' ein Element aus $\mathfrak{a}$ ist. Da $\mathfrak{p}^2$ ein Primärideal ist, so sollte

$$r - a' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \qquad r \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

sein. Das widerspricht der Tatsache, dass r durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist. Hiermit muss jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene nicht-idempotente Primideal $\mathfrak{p}$ stets ein maximales Ideal sein.

Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Ist $\mathfrak{p}$ durch ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}'$ echt teilbar, so soll $\mathfrak{p}'$ ein maximales Ideal sein. Denn für ein beliebiges durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element p' aus $\mathfrak{p}'$ ergibt sich

$$(\mathfrak{p}, p') = \mathfrak{p}'\mathfrak{m}, \qquad \text{oder} \qquad (\mathfrak{p}, p') = \mathfrak{p}'. \tag{5}$$

Hätte $\mathfrak{p}'$ einen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{a}$, so würde

$$\mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}', a)\,\mathfrak{p}', \tag{6}$$

wo a ein durch $\mathfrak{p}'$ unteilbares Element aus $\mathfrak{a}$ ist. Aus (5) und (6) folgte damit

$$(\mathfrak{p}, p')(\mathfrak{p}', a) = (\mathfrak{p}', a)\,\mathfrak{p}'\mathfrak{m} = \mathfrak{p}'\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, p'),$$

oder

$$(\mathfrak{p}, p')(\mathfrak{p}', a) = (\mathfrak{p}', a)\,\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}, p').$$

Daher folgte auch

$$(\mathfrak{p}, p')\mathfrak{R} = (\mathfrak{p}, p').$$

Damit würde

$$(\mathfrak{p},\, p')\mathfrak{R} = (\mathfrak{p},\, p')(\mathfrak{p}',\, a)\,.$$

Für ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element r ergäbe sich damit

$$p'r \equiv a'p' \;\; (\mathfrak{p})\,, \qquad a' \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})\,.$$

Da $p' \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ ist, so folgte daraus

$$r - a' \equiv 0 \;\; (\mathfrak{p})\,.$$

Das widerspricht der Tatsache, dass $r \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Hiermit muss $\mathfrak{p}'$ ein maximales Ideal sein.

Ist $\mathfrak{a}$ durch ein idempotentes Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, so wird

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}'\,,$$

dabei ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ist. Für einen Teiler $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{p}$ gilt auch

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}\,.$$

Daher wird unmittelbar

$$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\,.$$

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *(einschl.* $\mathfrak{R}$*) ein nicht-idempotentes Primideal aus dem allgemeinen Multiplikationsring* $\mathfrak{R}$, *und es sei jedes Element aus* $\mathfrak{p}$ *nilpotent in bezug auf* $\mathfrak{q}$. *Ist ein Teiler* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{q}$ *durch* $\mathfrak{p}$ *teilbar, so muss* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal sein.*

Beweis ist nur notwendig für den Fall, dass

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q}$$

ist, und $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Da $\mathfrak{p}$ nicht-idempotent ist, so soll $\mathfrak{p}$ nach Satz 3 ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$ sein. Jetzt nehmen wir an, dass für zwei Elemente p und r aus $\mathfrak{R}$

$$(1) \qquad pr \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})\,, \qquad r \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{p})\,, \quad p \equiv 0 \;\; (\mathfrak{p})\,, \quad p \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})$$

ist, nämlich dass $\mathfrak{a}$ kein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist. Betrachten wir das Ideal

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a},\, \mathfrak{p}p)\,,$$

so soll

$$(2) \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}')$$

sein. Denn, wäre $p \equiv 0\ (\mathfrak{a}')$, so würde

$$p \equiv pp'\ (\mathfrak{a}), \qquad p' \equiv 0\ (\mathfrak{p}).$$

Daher folgte

$$p \equiv p'^n p\ (\mathfrak{a})$$

für jede ganze Zahl n. Ist n hinreichend gross, so wird $p'^n \equiv 0\ (\mathfrak{q})$, da jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist. Damit ergäbe sich $p \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, und wir hätten einen Widerspruch. Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad p\mathfrak{R} = p(\mathfrak{p}, r) \equiv 0\ (\mathfrak{a}'), \qquad p \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}').$$

Nach der Definition des Multiplikationsringes ergibt sich

$$(4) \qquad (\mathfrak{a}', p) = \mathfrak{R}\mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m} \equiv 0\ (\mathfrak{p}),$$

da $(\mathfrak{a}', p) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist. Aus $\mathfrak{R}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ folgt auch

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathfrak{m}' = \mathfrak{R}\mathfrak{p}\mathfrak{m}' = \mathfrak{R}\mathfrak{m}.$$

Durch Multiplikation von (4) mit $\mathfrak{R}$ ergibt sich damit

$$(5) \qquad \mathfrak{R}(\mathfrak{a}', p) = (\mathfrak{a}', p).$$

Da $\mathfrak{a}' \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist, so wird auch $\mathfrak{R}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$, und folglich wird nach (3)

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{a}', p) = \mathfrak{a}'.$$

Nach (5) erhalten wir endlich

$$(\mathfrak{a}', p) = \mathfrak{a}', \qquad p \equiv 0\ (\mathfrak{a}').$$

Das widerspricht der Beziehung (2). Hiermit ist die Annahme (1) falsch, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring. Dann ist jedes Primärideal aus $\mathfrak{R}$ stets eine endliche Potenz eines Primideals (einschl. $\mathfrak{R}$).*

Es sei $\mathfrak{q}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal.

I. Es sei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Dann wird nach Satz 2

$$\mathfrak{p} = (p, \mathfrak{p}^2), \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2).$$

Daher folgt unmittelbar

$$\mathfrak{p}^n = (p^n, \mathfrak{p}^{n+1}). \tag{1}$$

Nach der Eigenschaft vom Primärideal $\mathfrak{q}$ wird

$$p^n \equiv 0 \ (\mathfrak{q}) \tag{2}$$

für eine endliche ganze Zahl n. Aus (1) und (2) folgt

$$(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{q}). \tag{3}$$

Wäre

$$\mathfrak{q} > \mathfrak{a} > \mathfrak{p}\mathfrak{q},$$

so würde $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$. Da nach Satz 4 $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist, so sollte $\mathfrak{m} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ sein. Daher folgte $\mathfrak{a} \equiv 0 \,(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$, und wir hätten einen Widerspruch. Damit gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, und folglich wird

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q}, q) = \mathfrak{q}. \tag{4}$$

Daher erhalten wir auch nach (3)

$$(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{p}\mathfrak{q}, q) = (\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^k, \mathfrak{q}), q) \qquad k \geqq n. \tag{5}$$

Wäre

$$(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) \geqq (p_n, \mathfrak{q}) > \mathfrak{q},$$

so würde nach (3) und (5)

$$(p_n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q})\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^k, \mathfrak{q}), q)\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}(p_n, \mathfrak{q}), q\mathfrak{m}),$$

oder

$$(p_n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}), \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}(p_n, \mathfrak{q}), \mathfrak{q})$$

Daraus folgte

$$(p_n, \mathfrak{q}) = (p_n\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (p_n\mathfrak{R}, \mathfrak{q}). \tag{6}$$

Hier müssen wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

a). Es sei $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{p}$. Dann würde für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$

$$rp_n \equiv p_n p' \ (\mathfrak{q}),$$

wo p' ein Element aus $\mathfrak{p}$ ist. Da $\mathfrak{q}$ aber ein Primärideal ist, so folgte daraus

$$r-p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}) .$$

Also würde

$$r \equiv 0 \ (\mathfrak{p}) ,$$

womit wir einen Widerspruch hätten.

b). Es sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}$. Dann würde nach (6)

$$p_n \equiv r'p_n \ (\mathfrak{q}) ,$$

wo r' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Daher folgte

$$p_n \equiv r'^m p_n \ (\mathfrak{q})$$

für jede ganze Zahl m. Da jedes Element aus $\mathfrak{R}$ in diesem Fall nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist, so sollte

$$p_n \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

sein. Das widerspricht der Tatsache, dass $(p_n, \mathfrak{q}) > \mathfrak{q}$ ist.

Hiermit soll

$$(7) \qquad (\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) = \mathfrak{q} , \qquad \mathfrak{p}^n \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

sein.

Wir werden jetzt indirekt beweisen, dass $\mathfrak{q}$ mit einer Potenz von $\mathfrak{p}$ identisch ist. Zu diesem Zweck nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}$ mit keiner Potenz von $\mathfrak{p}$ identisch ist. Nach (7) können wir eine Zahl $\lambda (\geqq 1)$ finden, so dass

$$(8) \qquad \mathfrak{p}^\lambda \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}) , \qquad \mathfrak{p}^{\lambda+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

ist. Da $\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, so existiert auch eine Zahl $\mu (\geqq 1)$, so dass

$$(9) \qquad \mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^\mu) , \qquad \mathfrak{q} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\mu+1})$$

ist. Sonst würde nach (7) $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{q}$. Dabei ist offenbar

$$\mu \leqq \lambda .$$

Nach (1) und (9) wird

$$(10) \qquad q \equiv (r+\alpha)p^\mu \ (\mathfrak{p}^{\mu+1}) , \quad q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\mu+1}) , \quad q \equiv 0 \ (\mathfrak{q}) ,$$

wo r ein Element aus $\mathfrak{R}$, und α eine ganze Zahl bedeutet. Hier müssen wir wieder zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

a). Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{R}$, so wird nach Satz 3 $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper. Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r' aus $\mathfrak{R}$ wird

$$r'(r+\alpha)p^{\mu} \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}^{\mu+1}),$$

da $r' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $(r+\alpha)\,p^{\mu} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{\mu+1})$, und nach Satz 4 $\mathfrak{p}^{\mu+1}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist. Daher folgt

$$r'(r+\alpha) \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}), \tag{11}$$

Durch Multiplikation von (10) mit $r'p^{\lambda-\mu}$ erhalten wir nach (8)

$$r'(r+\alpha)p^{\lambda} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Da $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist, so wird nach (11) $p^{\lambda} \equiv 0\ (\mathfrak{q})$. Nach (1) und (8) erhalten wir damit

$$\mathfrak{p}^{\lambda} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Das widerspricht der Annahme (8).

b). Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{R}$, so folgt aus (10)

$$q \equiv \alpha p^{\mu} \quad (\mathfrak{p}^{\mu+1}), \qquad q \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}^{\mu+1}). \tag{12}$$

Da nach Satz 2 $\mathfrak{R}^2$ ein maximales Ideal ist, so soll $\mathfrak{R} = (\alpha p, \mathfrak{R}^2)$ sein. Also wird

$$p \equiv \beta\alpha p \quad (\mathfrak{R}^2)$$

für eine ganze Zahl β. Durch Multiplikation von (12) mit $\beta p^{\lambda-\mu}$ erhalten wir damit nach (8)

$$p^{\lambda} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Daher folgt nach (1) und (8)

$$\mathfrak{p}^{\lambda} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Das widerspricht auch der Annahme (8).

Hiermit soll $\mathfrak{q}$ mit einer endlichen Potenz vom Primideal $\mathfrak{p}$ identisch sein.

II. Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Wäre $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, so würde

$$\mathfrak{p} \geqq (\mathfrak{q}, p) > \mathfrak{q}, \qquad p \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{q}). \tag{13}$$

a). Es sei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{R}$. Dann folgte aus Satz 3

$$(14) \qquad (p, \mathfrak{q}) = \mathfrak{p}(p, \mathfrak{q}) = (p\mathfrak{p}, \mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (p\mathfrak{p}, \mathfrak{q})\,.$$

Hieraus folgte auch

$$(15) \qquad (p, \mathfrak{q}) = (p\mathfrak{R}, \mathfrak{q})\,.$$

Aus (14) und (15) ergäbe sich

$$rp \equiv p'p \ (\mathfrak{q}), \qquad p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist, so sollte

$$r - p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \qquad r \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

sein, und wir hätten einen Widerspruch.

b). Es sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{R}$. Dann folgte aus (13)

$$(p, \mathfrak{q}) = \mathfrak{R}\mathfrak{m} = \mathfrak{R}^2\mathfrak{m} = \mathfrak{R}(p, \mathfrak{q})\,,$$

oder

$$(p, \mathfrak{q}) = \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(p, \mathfrak{q})\,.$$

Also würde

$$(p, \mathfrak{q}) = (p\mathfrak{R}, \mathfrak{q})\,.$$

Daher folgte

$$p \equiv rp \ (\mathfrak{q})\,, \qquad p \equiv r^m p \ (\mathfrak{q})\,.$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{R}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist, so würde damit $p \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$, und wir hätten auch einen Widerspruch.

Hiermit soll $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ sein, und der Satz ist in allen Teilen vollständig bewiesen.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring. Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ vom Nullideal verschieden und idempotent, so existiert in $\mathfrak{a}$ ein idempotentes Element, das von Null verschieden ist.*

Es sei a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$, das von Null verschieden ist. Dann wird aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, und aus der Eigenschaft des Multiplikationsringes $\mathfrak{R}$

$$(a) = \mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{a}(a)\,.$$

Daher folgt die Existenz eines Elementes a' aus $\mathfrak{a}$ von der Art, dass

$$a = aa'$$

ist. Wären alle Elemente aus $\mathfrak{a}$ nilpotent, so würde daraus

$$a = aa'^n = 0 .$$

Das widerspricht unserer Voraussetzung, dass $a \neq 0$ ist. Damit gibt es in $\mathfrak{a}$ ein nicht-nilpotentes Element. Es sei $\mathfrak{h}$ die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{a}$, dann wird

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{h} .$$

Wir können damit ein durch $\mathfrak{h}$ unteilbares Element a_1 aus $\mathfrak{a}$ finden. Aus der Eigenschaft des Multiplikationsringes $\mathfrak{R}$ folgt

$$(\mathfrak{a}_1 , \mathfrak{h}) = \mathfrak{a}(a_1 , \mathfrak{h}) ,$$

da $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ist. Folglich wird für ein Element a_1' aus $\mathfrak{a}$

$$a_1 \equiv a_1 a_1' \ (\mathfrak{h}) , \qquad a_1(a_1' - a_1'^2) \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) . \tag{1}$$

Zunächst sei $a_1' \equiv a_1'^2 \ (\mathfrak{h})$. Da jedes Element aus $\mathfrak{h}$ nilpotent ist, so soll

$$(a_1' - a_1'^2)^n = 0 , \qquad a_1'^n = a_1'^{2n} a''$$

sein. Setzen wir $e = a_1'^n a''$, so wird

$$e = e^2 \neq 0 , \qquad e \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) .$$

Zweitens sei $a_1' \not\equiv a_1'^2 \ (\mathfrak{h})$. Es sei auch $\mathfrak{m}_1$ die Gesamtheit aller Elemente m_1 aus $\mathfrak{a}$ derart, dass $a_1 m_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{h})$ ist. Dann ist $\mathfrak{m}_1$ offenbar ein Ideal, das durch $\mathfrak{a}$ teilbar und ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ ist, da nach (1) $a_1' - a_1'^2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}), \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_1)$ ist. Ferner ist

$$[(a_1 , \mathfrak{h}) , \mathfrak{m}_1] = \mathfrak{h} , \qquad a_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{m}_1) . \tag{2}$$

Es sei wieder $\mathfrak{m}_2$ die Gesamtheit aller Elemente m_2 aus $\mathfrak{a}$ von der Art, dass $m_2 \mathfrak{m}_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{h})$ ist. Dann ist $\mathfrak{m}_2$ ein durch $\mathfrak{a}$ teilbares Ideal und ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$, da $a_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_2)$ ist. Es wird ferner auch

$$[\mathfrak{m}_1 , \mathfrak{m}_2] = \mathfrak{h} . \tag{3}$$

Aus $(\mathfrak{h}, a_1) \equiv 0 \;((\mathfrak{h}, a_1, \mathfrak{m}_1))$, $(\mathfrak{h}, a_1, \mathfrak{m}_1) \equiv 0 \;(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ folgt nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$

$$(4) \qquad (\mathfrak{h}, a_1) = (\mathfrak{h}, a_1, \mathfrak{m}_1)\,\mathfrak{m}\mathfrak{a}\,.$$

Daraus folgt $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}\mathfrak{a} \equiv 0 \;((a_1, \mathfrak{h}))$, und folglich wird nach (2)

$$\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}\mathfrak{a} \equiv 0 \;\;(\mathfrak{h})\,.$$

Daher ergibt sich nach der Struktur von $\mathfrak{m}_2$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{a} \equiv 0 \;\;(\mathfrak{m}_2)\,.$$

Aus (3) und (4) folgt damit

$$(\mathfrak{h}, a_1) = ((\mathfrak{h}, a_1)\mathfrak{m}_2\,, \mathfrak{h})\,.$$

Damit wird für ein Element m_2' aus $\mathfrak{m}_2$

$$a_1 \equiv a_1 m_2' \;\;(\mathfrak{h})\,, \qquad a_1(m_2' - m_2'^2) \equiv 0 \;\;(\mathfrak{h})\,.$$

Also ist

$$m_2' - m_2'^2 \equiv 0 \;\;(\mathfrak{m}_1)\,.$$

Nach (3) wird daher

$$m_2' - m_2'^2 \equiv 0 \;\;(\mathfrak{h})\,.$$

Dabei ist m_2' nicht nilpotent in bezug auf $\mathfrak{h}$, sonst würde $a_1 \equiv 0 \;(\mathfrak{h})$. Wir können damit genau wie beim vorigen Fall die Existenz eines idempotenten Elementes, das nicht Null ist, beweisen, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0), so ist $\mathfrak{R}$ idempotent, und $\mathfrak{R}$ wird eine direkte Summe*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2\,,$$

wo $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement ($\neq 0$) besitzt, und $\mathfrak{m}_2$ idempotent oder Nullideal ist.

Existiert in $\mathfrak{R}$ ein von (0) verschiedenes idempotentes Primideal, so existiert nach Satz 6 ein idempotentes Element $e_1(\neq 0)$. Damit wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2\,,$$

wo $\mathfrak{m}_1$ das Element e_1 als das Einheitselement besitzt.

Es sei jedes von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedene Primideal nicht idempotent, und es sei $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes Primideal. Ist das Nullideal auch prim, so wird für ein von Null verschiedenes Element p aus $\mathfrak{p}$

$$(p) = \mathfrak{R}(p),$$

da nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{p}=\mathfrak{R}\mathfrak{p}$, $(p)=\mathfrak{m}\mathfrak{p}$ (oder $(p)=\mathfrak{p}$) sind. Daher folgt unmittelbar

$$p = pr, \qquad p(r-r^2) = 0.$$

Da das Nullideal prim ist, so soll

$$r = r^2, \qquad (r) = \mathfrak{R}$$

sein. Ist das Nullideal nicht prim, so betrachten wir das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von (0).[1] Dann ist offenbar

$$\mathfrak{h} \equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}).$$

Ist $\mathfrak{h}$ nicht prim, so existieren zwei Elemente r_1 und r_2, so dass

$$r_1 r_2 \equiv 0 \ \ (\mathfrak{h}), \qquad r_1 \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{h}), \qquad r_2 \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{h})$$

ist. Es seien $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{h} : (r_1)$, $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{h} : \mathfrak{r}_2$, dann wird

$$(1) \qquad [(\mathfrak{h}, r_1), \mathfrak{r}_2] = \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2] = \mathfrak{h},$$

da $\mathfrak{h}$ halbprim ist. Dabei ist $\mathfrak{r}_2$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ und durch $(\mathfrak{h}, r_1)$ unteilbar. Damit wird nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$

$$(2) \qquad (r_1, \mathfrak{h}) = (r_1, \mathfrak{r}_2)\,\mathfrak{m}.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{r}_2\mathfrak{m} \equiv 0 \ \ ((r_1, \mathfrak{h})).$$

Nach (I) wird damit

$$\mathfrak{r}_2\mathfrak{m} \equiv 0 \ \ (\mathfrak{h}).$$

Hiermit wird auch $\mathfrak{m} \equiv 0$ $(\mathfrak{r}_1)$. Aus (2) folgt damit

$$(r_1, \mathfrak{h}) = (r_1\mathfrak{r}_1, \mathfrak{h}).$$

---

(1) Das Ideal $\mathfrak{h}$, das aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz zum Ideal $\mathfrak{a}$ gehört, heisst das „*zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$“. Vgl. K. S. 735.

Daher wird für ein Element r'_1 aus $\mathfrak{r}_1$

$$r_1 \equiv r_1 r'_1 \ (\mathfrak{h}) , \qquad r_1(r'_1 - r'^2_1) \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \qquad r'_1 - r'^2_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{r}_2) .$$

Nach (I) erhalten wir damit

$$r'_1 - r'^2_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \qquad r'_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}) .$$

Aus der Struktur von $\mathfrak{h}$ folgt

$$(r'_1 - r'^2_1)^n = 0$$

für eine endliche ganze Zahl n. Daher folgt die Existenz eines idempotenten Elementes $e_1 (\neq 0)$, und folglich wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 ,$$

wo $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement e_1 besitzt. Ist $\mathfrak{h}$ prim, so ist $\mathfrak{h}$ nach Satz 3 ein maximales Ideal, da $\mathfrak{h}$ nicht idempotent ist. Daher folgt

$$\mathfrak{R} = (r, \mathfrak{h}) , \qquad r - r^2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}) .$$

Da $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von (0) ist, so muss für eine endliche ganze Zahl m

$$(r - r^2)^m = 0$$

sein. Daher folgt nach der im vorigen Fall befolgten Methode

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 ,$$

wo $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement besitzt.

Endlich müssen wir beweisen, dass $\mathfrak{m}_2$ idempotent ist. Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ folgt $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{R}\mathfrak{m}_2$, da $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement besitzt. Folglich wird

$$\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_2^2 .$$

Also soll $\mathfrak{R}$ auch idempotent sein, und damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 8. *Es sei der allgemeine Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ als eine direkte Summe*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 , \qquad \mathfrak{m}_1 \neq (0) , \qquad \mathfrak{m}_2 \neq (0)$$

darstellbar, und es sei $\mathfrak{m}_1$ direkt unzerlegbar. Dann besitzt $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement, und $\mathfrak{m}_2$ ist ein idempotentes Ideal.

Es sei m_1 ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{m}_1$, dann folgt aus $\mathfrak{m}_2=(m_1, \mathfrak{m}_2)\mathfrak{m}$

$$m_1\mathfrak{m} = (0)\,.$$

Folglich wird

$$\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_2^2\,.$$

Da $\mathfrak{m}_2 \neq (0)$ ist, so können wir wieder denselben Schluss

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1^2$$

machen.

Nach Satz 6 besitzt $\mathfrak{m}_1$ damit das von Null verschiedene idempotente Element e_1. Wäre für ein Element $m_1(\neq 0)$ aus $\mathfrak{m}_1$

$$e_1 m_1 = 0\,,$$

so würde $\mathfrak{m}_1$ direkt zerlegbar, was aber unmöglich ist. Damit soll e_1 das Einheitselment in bezug auf $\mathfrak{m}_1$ sein.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die allgemeinen Multiplikationsringe.

In diesem Paragraphen werden wir einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$, dessen Elemente in irgendeiner Wohlordnung gegeben sind, zugrunde legen. Im Ring $\mathfrak{R}$ besitzt jedes Ideal damit höchste Primideale, und jede isolierte Primärkomponente eines Ideals ist durch ihr zugehöriges Primideal eindeutig bestimmt. Ferner ist in $\mathfrak{R}$ jedes Halbprimideal als Durchschnitt aller höchsten Primideale darstellbar.[1]

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring, und es gebe in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0). Dann wird*

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{a}$$

für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$, das nicht prim ist.

Es sei $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}$, so wird $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, und folglich wird nach Satz 5

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^n\,.$$

(1) K. S. 732, S. 735–737.

Ist $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{h}$ kein Primideal, da $\mathfrak{a}$ nicht prim ist, und da es in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0) gibt. Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes können wir in $\mathfrak{R}$ zeigen, dass $\mathfrak{h}$ als Durchschnitt seiner höchsten Primideale darstellbar ist.(1) Damit muss in $\mathfrak{R}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal existieren, da $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{R}$ ist. Das ist aber unmöglich, und damit soll $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}$ sein.

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring. Dann ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ stets mit seinem Kern identisch.*(2)

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{a}$ durch kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ teilbar, so wird nach Satz 9 $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, und folglich ist die Behauptung einleuchtend.

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ durch ein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{a}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, dann besitzt $\mathfrak{a}$ nach Satz 3 ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares höchstes Primideal. Sind $\mathfrak{p}_a, \mathfrak{p}_b, \ldots$ alle höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$, so sind sie auch nach Satz 3 idempotent oder ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$. Ferner ist jeder Primidealteiler eines idempotenten Primideals ein maximales Ideal, oder $\mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{q}_i$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, und es sei $\mathfrak{a}^*$ der Kern von $\mathfrak{a}$. Hier müssen wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$$

beweisen.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, dass $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^*$ ist. Dann ist für ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element a^* aus $\mathfrak{a}^*$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (a^*)$$

ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$.(3) Damit ist das höchste Primideal von $\mathfrak{a}'$ auch ein echter Teiler eines höchsten Primideals von $\mathfrak{a}$. Da es in $\mathfrak{a}'$ ein Element gibt, das durch das höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ unteilbar ist,(4) so soll das höchste Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{a}'$ ein maximales Ideal, oder $\mathfrak{R}$ sein.

I. Es sei $\mathfrak{p}'=\mathfrak{R}$. Dann ist nach Satz 9 $\mathfrak{a}'$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, und nach Satz 5 wird

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{R}^n .$$

---

(1) K. S. 735–736.

(2) Der Durchschnitt $\mathfrak{a}^*$ der sämtlichen isolierten Primärkomponenten vom Ideal $\mathfrak{a}$ heisst „*Kern von* $\mathfrak{a}$". Vgl. K. S. 738. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{a}^*$ eine kürzeste Darstellung, so sagen wir „*der Kern* $\mathfrak{a}^*$ *ist eine kürzeste Darstellung*".

(3), (4) K. S. 738.

Daher folgt, dass $\mathfrak{R}^n(a^*)$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Also gibt es einen Totalnullteiler von $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathfrak{a}$, und die Gesamtheit dieser Totalnullteiler bildet ein Ideal $\mathfrak{a}_1$, das ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Wäre

$$\mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_1' > \mathfrak{a}\,,$$

so würde nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}_1\mathfrak{m}\,, \qquad \mathfrak{a}_1\mathfrak{R} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,.$$

Daher folgte $\mathfrak{a}_1' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$. Damit gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$. Da der Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}|\mathfrak{a}$ ein von $\mathfrak{R}'$ und (0) verschiedenes Primideal hat,(1) so existiert nach Satz 7 ein idempotentes Element $r(\neq 0)$ in $\mathfrak{R}'$. Das Ideal $(\mathfrak{a}_1, r)$ aus $\mathfrak{R}$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$, da $\mathfrak{a}_1^2 \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Aus der Eigenschaft des Multiplikationsringes $\mathfrak{R}$ folgt damit

$$\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a}_1\,,\, r)\,\mathfrak{m}\,.$$

Wäre $\mathfrak{m} \equiv 0$ $(\mathfrak{a}_1)$, so würde $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$. Hiermit soll $\mathfrak{m} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a}_1)$ sein. Ferner soll

$$(1) \qquad rm \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,, \qquad rm \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)$$

für ein durch $\mathfrak{a}_1$ unteilbares Element m aus $\mathfrak{m}$ sein. Sonst würde $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$. Aus $r\mathfrak{a}_1 \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, $r \equiv r^2$ $(\mathfrak{a})$ und (I) folgt

$$r^2m \equiv rm \equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,.$$

Also erhalten wir einen Widerspruch. Hiermit ist in diesem Fall unsere Annahme falsch, dass $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^*$ ist.

II. Es sei $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{R}$. Da jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}'$ echter Teiler eines höchsten Primideals von $\mathfrak{a}$ ist, so müssen alle höchsten Primideals von $\mathfrak{a}'$ maximales Ideal von $\mathfrak{R}$ sein. Folglich ist $\mathfrak{a}'$ nach dem ersten Fall mit seinem Kern identisch. Da nach Satz 5 jedes Primärideal eine endliche Potenz eines Primideals ist, und da jedes nicht-maximale Primideal idempotent ist, so wird nach Satz 3

$$(\mathfrak{a},\, a^*) = \mathfrak{q}_i'(\mathfrak{a},\, \mathfrak{a}^*)\,,$$

wo $\mathfrak{q}_i'$ ein beliebige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}'$ bedeutet. Daher folgt

(1) Ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring, so wird $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ auch ein allgemeiner Multiplikationsring.

$$(\mathfrak{a},\, a^*) = \mathfrak{q}'_a(\mathfrak{a},\, a^*) = \mathfrak{q}'_j(\mathfrak{a},\, a^*)\,,$$

oder

$$a^* \equiv q'_a a^* \equiv q'_j a^* \;\; (\mathfrak{a}) \;\; (j = b,\, c, \ldots .)\,,$$

wo q_j' ein Element aus $\mathfrak{q}_j'$ bedeutet. Daher folgt

$$q'_a - q'_j \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}')\,, \qquad q'_a \equiv 0 \;\; (\mathfrak{q}'_j)\,,$$

da $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (a^*)$ ist. Also ist q'_a durch $\mathfrak{a}'$ teilbar, da $\mathfrak{a}'$ mit seinem Kern identisch ist. Aus $a^* \equiv q'_a a^* \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ folgt damit, dass

$$(a^*,\, \mathfrak{a})\, \mathfrak{a}' \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})$$

ist. Das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (a^*)$ ist; also ist unsere Annahme $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^*$ in diesem Fall auch falsch, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

Satz 11. *Es sei jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch. Ist $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$, so wird*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

Zum Beweis nehmen wir an, dass $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist. Da jedes Element aus $\mathfrak{a}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist, so ist das Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ mit dem Halbprimideal von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ identisch, und ferner ist jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ zugleich ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, und umgekehrt. Folglich ist $\mathfrak{b}$ durch kein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ teilbar. Weiter existiert ein Element a derart, dass

$$a \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})\,, \qquad a \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

ist. Ist $\mathfrak{q}$ eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, so wird nach der Eigenschaft des Primärideals

$$a \equiv 0 \;\; (\mathfrak{q})\,,$$

da $\mathfrak{b}$ durch das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal unteilbar ist, und da $a\mathfrak{b} \equiv 0\,(\mathfrak{q})$ ist. Hiermit soll a durch jede isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ teilbar sein. Also ist a durch den Kern von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ teilbar. Aber aus unserer Voraussetzung, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mit seinem Kern identisch ist, folgt damit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.$$

Das widerspricht der zuerst angegebenen Voraussetzung. Damit muss $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ sein.

Satz 12. *Es sei jedes Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *mit seinem Kern identisch, und es sei* $\mathfrak{p}$ *ein von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenes Primideal, das kein maximales Ideal ist. Dann wird für jedes durch* $\mathfrak{p}$ *teilbare Ideal* $\mathfrak{a}$ (*einschl.* $\mathfrak{p}$)

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}\,.$$

Ist $\mathfrak{p}=(0)$, so ist die Behauptung einleuchtend. Es sei damit $\mathfrak{p}\neq(0)$, und wir nehmen an, dass

$$(1) \qquad \mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}\mathfrak{p}$$

ist. Es seien $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ die Kerne von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$, dann werden nach unserer Voraussetzung

$$(2) \qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{d}\,, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{p}=\mathfrak{d}'\,.$$

Da das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ mit dem zugehörigen Halbprimideal von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ identisch ist, so ist jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ zugleich ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ und umgekehrt. Für ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{a}$ ergibt sich die Tatsache, dass die zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ von der zu $\mathfrak{p}_1$ gehörigen isolierten Primärkomponente $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ verschieden sein muss; sonst würde nach (2) $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ entgegen (1). Aus (1) folgt auch die Existenz eines Elementes a derart, dass

$$(3) \qquad a\equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,, \qquad a\not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}\mathfrak{p})$$

ist.

I. Es sei $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_1$. Dann folgt aus (2) und (3)

$$a\equiv 0 \ (\mathfrak{q})\,.$$

Aber aus der Eigenschaft des Primärideals $\mathfrak{q}'$ und aus $a\mathfrak{p}=0\,(\mathfrak{q}')$, $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_1$ folgt auch

$$a\equiv 0 \ (\mathfrak{q}')\,.$$

II. Es sei $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$. Dann soll $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$ sein, sonst würde $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$. Es sei damit p ein durch $\mathfrak{q}'$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}$, dann wird p nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}'$, da $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$ ist. Ist $\mathfrak{a}_1$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedener echter Teiler von $\mathfrak{p}$, so wird nach Satz 11 $(p, \mathfrak{q}')=\mathfrak{a}_1(p, \mathfrak{q}')$, also wird

$$(4) \qquad p\equiv pa_1 \ (\mathfrak{q}')\,, \qquad p(a_1-a_1^2)\equiv 0 \ (\mathfrak{q}')\,,$$

wo a_1 ein Element aus $\mathfrak{a}_1$ ist. Wäre $a_1 \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, so würde

$$p \equiv a_1^m p \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}')\,,$$

da jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}'$ ist. Das ist aber unmöglich, und folglich soll $a_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ sein. Da $\mathfrak{q}'$ ein Primärideal ist, so soll nach (4) und $p \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}')$

$$a_1 - a_1^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{p})\,, \qquad a_1 \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$$

sein. Daher folgt, dass

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1$$

sein muss. Also soll $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$ sein, und das widerspricht unserer Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ kein maximales Ideal ist. Ist $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}'$, so ist dieser Fall damit unmöglich.

Unter der Voraussetzung $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ ist nur der erste Fall damit möglich, und daher folgt nach (2)

$$a \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{p})\,,$$

und wir haben auch einen Widerspruch gegen (3). Also muss $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ sein, womit unsere Behauptung richtig ist.

Satz 13. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem jeder Kern eine kürzeste Darstellung ist, und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*

2. *Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist*

$$(\mathfrak{b}^n,\ \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1},\ \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}\,,$$

so gibt es in $\mathfrak{b}$ ein Element b der Art, dass

$$b \equiv b^2 \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{a})$$

ist.

3. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist immer mit seinem Kern identisch. Dann ist $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner Multiplikationsring.*

Mit Hilfe des Satzes 12 folgt aus der Bedingung 3, dass jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal aus $\mathfrak{R}$ ein maximales Ideal oder idempotent ist. Es sei $\mathfrak{q}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, dann ist jedes

Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$. Aber dann folgt aus der Bedingung 1

$$\mathfrak{p}^n = (p^n, \mathfrak{p}^{n+1})$$

für jede ganze Zahl n. Ist n hinreichend gross, so wird damit $p^n \equiv 0\,(\mathfrak{q})$. Also wird

$$(1) \qquad (\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^{n+1}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^{n+2}, \mathfrak{q}) = \dots\dots .$$

Wäre

$$(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{q}\,,$$

so existierte in $\mathfrak{p}$ nach der Bedingung 2 ein Element p von der Art, dass

$$p \equiv p^2 \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{q})$$

ist. Das widerspräche der Tatsache, dass jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist. Daher folgt

$$(2) \qquad \mathfrak{p}^n \equiv 0 \ \ (\mathfrak{q})\,.$$

Wir nehmen an, dass $\mathfrak{p}^n$ kein Primärideal ist. Dann muss $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal und nicht idempotent sein. Sonst würde $\mathfrak{p}$ das Einheitsideal oder idempotent, und folglich würde $\mathfrak{p}^n$ Primärideal. Nach der Bedingung 3 muss $\mathfrak{p}^n$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes höchstes Primideal $\mathfrak{p}_1$ besitzen, da $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal von $\mathfrak{p}^n$ ist. Aus $\mathfrak{p}^n \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$ folgt unmittelbar

$$\mathfrak{p} \equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}_1)\,, \qquad \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1\,.$$

Aber $\mathfrak{p}$ ist ein maximales Ideal aus $\mathfrak{R}$, und damit soll $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{R}$ sein. Das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{p}^n$ sind. Hiermit muss jede Potenz eines Primideals stets Primärideal sein.

Jetzt müssen wir beweisen, dass ein Primärideal $\mathfrak{q}$ mit einer endlichen Potenz seines zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ identisch ist. Ist $\mathfrak{p}$ idempotent, so folgt aus (2) unmittelbar

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\,.$$

Es reicht damit hin, die Behauptung zu beweisen, falls $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist. Aus der Bedingung 1 und der Beziehung (2) können wir das Problem ganz genau in der beim Beweis des Satzes 5 (S. 9–10) befolgten Methode behandeln, da $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal oder das Einheitsideal ist, und da jede Potenz von $\mathfrak{p}$ ein Primärideal ist. Hiermit erhalten wir

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^m . \tag{3}$$

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Ideale aus $\mathfrak{R}$, und es sei $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{R}$ das höchste Primideal von $\mathfrak{a}$, so wird

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}^n, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{R}^m \qquad (n > m),$$

und folglich wird

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{R}^{n-m} .$$

Im folgenden sei daher jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ nicht das Einheitsideal. Dann können wir nach der Bedingung 3 und der Beziehung (3) die folgenden Darstellungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ finden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \left[\mathfrak{p}_a^{\lambda_a}, \mathfrak{p}_b^{\lambda_b}, \ldots, \mathfrak{p}_a'^{\sigma_a}, \mathfrak{p}_b'^{\sigma_b}, \ldots\right], \\ \mathfrak{a} &= \left[\mathfrak{p}_a^{\mu_a}, \mathfrak{p}_b^{\mu_b}, \ldots, \mathfrak{p}_a''^{\nu_a}, \mathfrak{p}_b''^{\nu_b}, \ldots\right], \end{aligned} \tag{4}$$

wo $\mathfrak{p}_i''$ zu $\mathfrak{a}$, aber nicht zu $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{p}_i'$ zu $\mathfrak{b}$, aber nicht zu $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{p}_i$ zu beiden Idealen gehören. Hier können wir annehmen, dass die Exponenten $\lambda_a, \lambda_b, \ldots, \mu_a, \mu_b, \ldots, \nu_a, \nu_b, \ldots, \sigma_a, \sigma_b, \ldots$ die kleinsten sind, die die Darstellungen (4) erfüllen. Dann werden offenbar

$$\lambda_i \leqq \mu_i , \tag{5}$$

da $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Wir betrachten das Ideal

$$\mathfrak{m} = \left[\mathfrak{p}_a^{\tau_a}, \mathfrak{p}_b^{\tau_b}, \ldots, \mathfrak{p}_a''^{\nu_a}, \mathfrak{p}_b''^{\nu_b}, \ldots\right], \qquad \tau_i = \mu_i - \lambda_i . \tag{6}$$

Dabei ist es unmöglich, dass alle Exponenten $\tau_a, \tau_b, \ldots, \nu_a, \nu_b, \ldots$ verschwinden, da $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist.

Jetzt werden wir beweisen, dass

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{m}$$

ist. Jedes Element aus $\mathfrak{b}\mathfrak{m}$ ist durch jedes aus $\mathfrak{p}_a^{\tau_a}\mathfrak{p}_a^{\lambda_a}, \mathfrak{p}_b^{\tau_b}\mathfrak{p}_b^{\lambda_b}, \ldots, \mathfrak{p}_a''^{\nu_a}, \mathfrak{p}_b''^{\nu_b}, \ldots$ teilbar; also ist offenbar

$$\mathfrak{b}\mathfrak{m} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) . \tag{7}$$

Da jedes Ideal nach der Bedingung 3 als Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellbar ist, so wird

$$(8)\qquad \mathfrak{bm} = \left[\mathfrak{p}_a^{\mu'_a},\ \mathfrak{p}_b^{\mu'_b},\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_a''^{\nu'_a},\ \mathfrak{p}_b''^{\nu'_b},\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_a'''^{k_a},\ \mathfrak{p}_b'''^{k_b},\ \ldots\ldots\right],$$

wo $\mathfrak{p}_i'''$ zu $\mathfrak{bm}$, aber nicht zu $\mathfrak{m}$ gehört. Dabei sind $\mu'_a, \mu'_b, \ldots\ldots, \nu'_a, \nu'_b, \ldots\ldots, k_a, k_b, \ldots\ldots$ auch die kleinsten Exponenten, die die Darstellung (8) erfüllen. Nach der Bedingung I folgt

$$(9)\qquad \left(p_i^{\mu_i}, \mathfrak{p}_i^{\mu_i+1}\right) = \mathfrak{p}_i^{\mu_i} \qquad (i = a, b, \ldots\ldots).$$

Da $p_i^{\lambda_i} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{\lambda_i})$, $p_i^{\tau_i} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{\tau_i})$ sind, und da $\mathfrak{p}_i^{\lambda_i}$ bzw. $\mathfrak{p}_i^{\tau_i}$ die isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{m}$ ist[1], so soll

$$p_i^{\lambda_i} r_1 \equiv 0\ (\mathfrak{b}),\quad p_i^{\tau_i} r_2 \equiv 0\ (\mathfrak{m}),\quad r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i),\quad r_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$$

sein, also wird

$$(10)\qquad p_i^{\mu_i} r_1 r_2 \equiv 0\ (\mathfrak{bm}),\qquad r_1 r_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i).$$

Da $\mathfrak{p}_i^{\mu'_i}$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{bm}$ ist, so soll nach (10) $p_i^{\mu_i} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{\mu'_i})$ sein, und folglich wird nach (7) und (9)

$$\mathfrak{p}_i^{\mu_i} = \mathfrak{p}_i^{\mu'_i},$$

da $\mu'_i \geqq \mu_i$ ist. Da $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}_i''$ unteilbar ist, so folgt aus $\mathfrak{bm} \equiv 0(\mathfrak{p}_i''^{\nu'_i})$

$$\mathfrak{m} = 0\ \left(\mathfrak{p}_i''^{\nu'_i}\right).$$

Nach (6) wird damit

$$\mathfrak{p}_i''^{\nu'_i} = \mathfrak{p}_i''^{\nu_i}.$$

Da nach (4), (6) und (7) $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}_i'''$ unteilbar sind, so soll $\mathfrak{bm}$ auch durch $\mathfrak{p}_i'''^{k_i}$ unteilbar sein. Damit besitzt $\mathfrak{bm}$ kein höchstes Primideal, das von $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i''$ verschieden is. Hiermit erhalten wir endlich

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{bm}.$$

---

(1) Denn jeder Kern ist eine kürzeste Darstellung, und es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.

Aus den Sätzen 2, 6, 10 und 13 ergibt sich schliesslich

Satz 14. *Der kommutative Ring $\mathfrak{R}$, in dem jeder Kern eine kürzeste Darstellung ist, ist dann und nur dann ein allgemeiner Multiplikationsring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden von einander unabhängigen Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*

2. *Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist*

$$(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}\,,$$

so gibt es in $\mathfrak{b}$ ein Element b derart, dass $b \equiv b^2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$ ist.

3. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist stets mit seinem Kern identisch.*

Unabhängigkeit dieser drei Bedingungen.

In diesem Paragraphen werden wir an Beispielen zeigen, dass die drei Bedingungen in Satz 14 von einander unabhängig sind.

Beispiel 1. Es sei $\mathfrak{R}_1$ der Polynomring der Unbestimmten x, y mit ganz rationalzahligen Koeffizienten. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}_1$ derart, dass

$$\mathfrak{a} = (5,\ x^2,\ y^2,\ xy)$$

ist. Dann ist im Restklassenring $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_1 \,|\, \mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{p}' = (x, y)$ ein einziges von $\mathfrak{R}_1'$ verschiedenes Primideal. Da in $\mathfrak{R}_1'$

$$\mathfrak{p}' > (x) > \mathfrak{p}'^2$$

ist, so gilt die erste Bedingung nicht in $\mathfrak{R}_1'$. Jedes Element aus $\mathfrak{R}_1'$ ist nilpotent oder eine Einheit, und $\mathfrak{R}_1'$ ist endlich. Folglich ist in $\mathfrak{R}_1'$ die zweite Bedingung erfüllt. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}_1'$ ist primär, und folglich gilt in $\mathfrak{R}_1'$ auch die dritte Bedingung.

Beispiel 2. Es sei $\mathfrak{R}_2$ der Polynombereich von abzählbar vielen Unbestimmten $x_i (i=1, 2, \ldots.)$ mit ganz rationalzahligen Koeffizienten, und es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal derart, dass

$$\mathfrak{a} = (2,\ x_1^2,\ x_1 - x_2^2,\ x_2 - x_3^2,\ \ldots.)$$

ist. Dann wird im Restklassenring $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2 \mid \mathfrak{a}$

$$(1) \qquad 2x_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots.), \ x_1^2 = 0, \ x_1 = x_2^2, \ x_2 = x_3^2, \ldots . .$$

Jedes Primideal $\mathfrak{p}'$ aus $\mathfrak{R}_2'$ muss nach (1) alle $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ enthalten, und damit ist das Primideal $\mathfrak{p}'$

$$\mathfrak{p}' = (x_1, x_2, x_3, \ldots.), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{R}_2'.$$

Nach (1) wird

$$(2) \qquad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'^2.$$

Da $\mathfrak{R}_2'$ das Einheitselement besitzt, so wird auch

$$\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'^2.$$

Hiermit gilt in $\mathfrak{R}_1'$ die erste Bedingung. Da jedes Element aus $\mathfrak{p}'$ nilpotent ist, so existiert in $\mathfrak{p}'$ kein idempotentes Element, das von Null verschieden ist. Nach (2) ist damit in $\mathfrak{R}_2'$ nicht die zweite Bedingung erfüllt. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}_2'$ ist immer primär, und folglich ist in $\mathfrak{R}_2'$ die dritte Bedingung erfüllt.

Beispiel 3. Es sei $\mathfrak{R}_3$ auch der Polynombereich der Unbestimmten x und y mit rationalen ganzzahligen Koeffizienten, in dem keine natürliche Zahl als Element auftritt, und es sei

$$\mathfrak{a} = (x - x^2, 5x, 5y, y^2, xy)$$

ein Ideal aus $\mathfrak{R}_3$. Dann wird im Restklassenring $\mathfrak{R}_3' = \mathfrak{R}_3 \mid \mathfrak{a}$

$$5x = 0, \ 5y = 0, \ y^2 = 0, \ xy = 0, \ x = x^2.$$

Damit wird $\mathfrak{R}_3'$ die direkte Summe

$$\mathfrak{R}_3' = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}', \qquad \mathfrak{m}' = (x), \qquad \mathfrak{n}' = (y).$$

Dabei ist $\mathfrak{m}'$ ein Körper, und $\mathfrak{n}'$ nilpotent. Ferner gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}'^2$. Damit gelten in $\mathfrak{R}_3'$ offenbar die erste und die zweite Bedingung. Aber das Nullideal in $\mathfrak{R}_3'$ ist nicht primär und nicht mit seinem Kern identisch, also gilt in $\mathfrak{R}_3'$ nicht die dritte Bedingung.