Ueber Teilerfremdheit von Idealen.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangan am 15. 1. 1932.)

Verzeichnis einiger häufig zitierter Arbeiten.

E. NOETHER, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen 83 (1921), S. 24-67, zitiert mit „N."

W. KRULL, Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie, Math. Annalen 90 (1923), S. 55-64, zitiert mit „K".

S. MORI, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Jour. of the Hiroshima University, Series A, 1 (1930), S. 159-193, zitiert mit „M. 1".

S. MORI, Ueber Produktzerlegung der Ideale, Jour. of the Hiroshima University, Series A, 2 (1932), S. 1-19, zitiert mit „M. 2".

S. MORI, Minimale Primärideale eines Ideals, Jour. of the Hiroshima University, Series A, 2 (1932), S. 21-32, zitiert mit „M. 3".

In meiner im vorigen Jahre erschienenen Abhandlung[1] war die Eigenschaft der Ringe untersucht worden, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man diese Eigenschaft in verhältnismässig sehr einfacher Form durch Einführung des Teilerfremdbegriffs ausdrücken kann.

Wir legen im folgenden nur solche kommutativen Ringe zugrunde, in denen der Teilerkettensatz erfüllt ist, und unter der *Zerlegung* der Ideale verstehen wir die kürzeste Darstellung der Ideale als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von endlich vielen grössten Primäridealen.

(1) M. 1, §6.

1. Sätze über die Zerlegung der Ideale.

Wir wollen in diesem Paragraphen einige Hilfssätze beweisen, die für unsere spätere Untersuchung nötig sind.

Definition. *Ein Primideal, das kein vom Einheitsideal* $\mathfrak{o}$ *verschiedenes Primideal als echten Teiler besitzt, heisst ein ,, maximales Primideal.''*

Hilfssatz 1. *Besitzt ein maximales Primideal* $\mathfrak{p}$ *einen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler* $\mathfrak{b}$, *und ist* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, *so findet die Eindeutigkeit der Zerlegung jedes Ideals nicht immer statt.*

Nach der obigen Voraussetzung kann der Ring $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzen.(1) Da $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, so wird nach dem in der Fussnote ausgesprochenen Satz(2) für eine endliche genze Zahl ρ

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{\rho}],$$

und diese Darstellung ist die kürzeste durch grösste Primärideale. Aus der Annahme, dass $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal, und $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$ ist, folgt für eine hinreichend grosse Zahl λ ($\geqq \rho$)

$$\mathfrak{o}^{\lambda} \equiv 0 \ (\mathfrak{b}) .$$

Wäre $(\mathfrak{d}, \mathfrak{o}^{\lambda}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{o}^{\lambda+1}) = \ldots.$, so würde damit

$$\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{\lambda}) = (\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{\lambda+1}) = \ldots. \equiv 0 \ (\mathfrak{b}) .$$

Hiermit gäbe es in $\mathfrak{b}_1$ ein Element e von der Art, dass für jedes Element b_1 aus $\mathfrak{b}_1$

$$b_1 e \equiv b_1 \ (\mathfrak{p}) , \qquad e^2 \equiv e \ (\mathfrak{p})$$

ist.(3) Daraus folgte, dass für ein durch $\mathfrak{b}$ unteilbares Element r

$$re - re^2 = e(r - re) \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad e \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad r - re \not\equiv 0 \ (\mathfrak{b}_1)$$

ist. Also erhalten wir einen Widerspruch zu der Eigenschaft des Primideals $\mathfrak{p}$. Hiermit soll

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{\lambda}) \neq (\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{\lambda+1})$$

---

(1) Vgl. M. 1, § 4, Satz 9.

(2) Satz. Ist $\mathfrak{p}$ ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ dann und nur dann teilbar durch jede Potenz von jedem echten Teiler von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, oder $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal vom Ring mit Einheitselement ist. Vgl. M. 2, § 2.

(3) Vgl. M. 1, § 4.

sein, und folglich wird auch

$$(\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda}) \neq (\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda+1}) .$$

Es sei nun c ein gemeinsames Element von $\mathfrak{p}$ und $(\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda})$, dann wird

$$c = p = d + r ,$$

wobei p, d, r die Elemente aus $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{o}^{\lambda}$ sind. Wegen

$$p-d \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \qquad r \equiv 0 \ (\mathfrak{o}^{\lambda}), \qquad \mathfrak{o}^{\lambda} \equiv 0 \ (\mathfrak{o}^{\rho})$$

wird

$$p-d = r \equiv 0 \ (\mathfrak{d}) .$$

Daher folgt $c \equiv 0$ $(\mathfrak{d})$; also wird

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{p},\ (\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda})] . \tag{1}$$

Auf gleiche Weise erhalten wir auch

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{p},\ (\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda+1})] . \tag{2}$$

Da $(\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda})$ und $(\mathfrak{d},\ \mathfrak{o}^{\lambda+1})$ die zu $\mathfrak{o}$ gehörigen verschiedenen Primärideale sind, so existieren zwei verschiedene Zerlegungen (1) und (2) des Ideals $\mathfrak{d}$.

Hilfssatz 2. *Ist jedes Primideal* ($\neq \mathfrak{o}$) *aus dem Ring* $\mathfrak{R}$ *zugleich ein maximales Ideal, so wird für eine endliche ganze Zahl* λ

$$\mathfrak{o}^{\lambda} = \mathfrak{o}^{\lambda+1} .$$

Ist das Nullideal ein Primideal, so muss $\mathfrak{R}$ ein Körper sein; also wird $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$. Im anderen Fall seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die zu (0) gehörigen maximalen Primideale. Setzen wir

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_n] ,$$

so wird für eine endliche ganze Zahl ρ

$$\mathfrak{d}^{\rho} = (0) .$$

Es sei r_1 ein durch $\mathfrak{d}$ unteilbares Element aus $[\mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n]$, dann wird r unteilbar durch Primideal $\mathfrak{p}_1$. Daraus folgt

$$\mathfrak{d} = (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_l), \qquad d_i^{m_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, l) ;$$

$$\mathfrak{d}_1 = (d_1,\ \ldots,\ d_l,\ r_1) , \qquad r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1) .$$

Andererseits folgt auch aus $e_1 \equiv r_1 r_1' \ (\mathfrak{p}_1)$, $r_1 e_1 \equiv r_1 \ (\mathfrak{p}_1)$

$$r_1 \equiv r_1^2 r_1' \ (\mathfrak{d}) , \qquad (r_1 - r_1^2 r_1')^\rho = 0 .$$

Hiermit wird für eine hinreichend grosse Zahl λ_1

$$\left(r_1^{\lambda_1}\right) = \left(r_1^{\lambda_1+1}\right) = \ldots\ldots = \left(r_1^{2\lambda_1}\right) .$$

Auf gleiche Weise können wir $r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ finden, so dass

$$r_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) , \qquad r_i \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1 , \ldots\ldots , \mathfrak{p}_{i-1} , \mathfrak{p}_{i+1} , \ldots\ldots , \mathfrak{p}_n]) ,$$

$$\left(r_i^{\lambda_i}\right) = \left(r_i^{2\lambda_i}\right) \quad (i = 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

ist. Aber es ist

$$\mathfrak{o} = (d_1 , \ldots\ldots , d_l , \ r_1 , \ldots\ldots , r_n) .$$

Denn wenn r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ ist, so wird

$$r = p_1 + a_1 r_1 , \qquad p_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1) .$$

Ferner erhalten wir auch

$$p_1 = p_{12} + a_2 r_2 , \qquad p_{12} \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1 , \mathfrak{p}_2]) ,$$

da $r_2 \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots \mathfrak{p}_n])$ ist. Die Wiederholung des Verfahrens ergibt nach einer endlichen Anzahl von Schritten die folgende Gleichung:

$$r = a_1 r_1 + \ldots\ldots + a_n r_n + d , \qquad d \equiv 0 \ (\mathfrak{d}) .$$

Nehmen wir alles zusammen, so ergibt sich der Beweis unseres Satzes.

Hilfssatz 3. *Gibt es ein nicht-maximales Primideal, und ist dieses Primideal kein minimales Primärideal vom Nullideal,*[1] *so gilt nicht die eindeutige Zerlegung jedes Ideals.*

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein nicht-maximales Primideal. Nach der obigen Voraussetzung existiert ein Primärideal $\mathfrak{q}$, das durch $\mathfrak{p}$ echt teilbar ist. Damit können wir in $\mathfrak{p}$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element p finden. Da $\mathfrak{p}$ nicht maximal ist, so ist $\mathfrak{p}$ durch ein maximales Primideal $\mathfrak{p}'$ teilbar. Setzen wir jetzt

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{q}, p\mathfrak{p}') ,$$

so ist $\mathfrak{a} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$, und $\mathfrak{a}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$, da $\mathfrak{q}$ primär ist. Wäre

(1) M. 3, §2.

$p \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, so würde $p \equiv pp'$ $(\mathfrak{q})$ sein; also wäre für ein durch $\mathfrak{p}'$ unteilbares Element r

$$p(r-rp') = rp-rpp' \equiv 0 \ (\mathfrak{q}),$$

dabei ist p' ein Element aus $\mathfrak{p}'$. Da $\mathfrak{q}$ primär ist, so folgte

$$r-rp' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}),$$

folglich würde $r \equiv 0\,(\mathfrak{p}')$ im Widerspruch zur Annhme $r \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}')$. Hiermit ist $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, und ferner ist $\mathfrak{a}$ kein Primärideal, da $p \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, $p\,\mathfrak{p}' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Hieraus folgt

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{a} : (p), \qquad p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Sonst würde für ein hinreichend grosse ganze Zahl λ

$$\mathfrak{o}^{\lambda} p \equiv 0 \ (\mathfrak{a}),$$

also würde für ein durch $\mathfrak{p}'$ unteilbares Element r

$$rp \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \qquad rp \equiv pp' \ (\mathfrak{q}),$$

dabei ist p' ein Element aus $\mathfrak{p}'$. Aus $p \not\equiv o$ $(\mathfrak{q})$ ergäbe sich

$$r-p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \qquad r \equiv 0 \ (\mathfrak{p}')$$

im Widerspruch mit unsrer Annahme. Damit soll $\mathfrak{p}'$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal sein.[1] Anderseits gehört aber ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares Primideal auch zu $\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a} \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ ist. Nach dem in der Fussnote ausgesprochenen Satz[2] ergibt sich damit die Tatsache, dass die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ nicht eindeutig sein kann, womit die Behauptung bewiesen ist.

Zusatz. *Gibt es ein nicht-maximales Primideal, und ist dieses Primideal kein minimales Primärideal vom Nullideal, so wird*

$$(\mathfrak{q}_1, \ \mathfrak{q}_2) \neq \mathfrak{o}$$

für zwei zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale $\mathfrak{q}_1$ *und* $\mathfrak{q}_2$ *derart, dass* $\mathfrak{q}_1 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{q}_2)$, $\mathfrak{q}_2 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{q}_1)$ ist.

Denn das beim Beweise des Hilfssatzes 3 auftretende Ideal $\mathfrak{a}$ besitzt die Primärkomponenten $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$, die die im Satz ausgesprochenen Eigenschaften haben.

---

(1) M. 1, § 3, Satz 6.

(2) Satz. Die kürzeste Darstellung eines Ideals $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{a}$ sich als kleinstes gemeinsames Vielfaches von den minimalen Primäridealen von $\mathfrak{a}$ darstellen lässt. Vgl. M. 3, § 2.

2. Ueber eindeutige Zerlegung der Ideale.

Durch die im vorigen Paragraphen gewonnenen Ergebnisse sind wir in den Stand gesetzt, folgenden Hauptsatz zu beweisen:

Hauptsatz 1. *Die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus dem Ring* $\mathfrak{R}$ *als kleinstes gemeinsames Vielfaches durch grösste Primärideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Jedes nicht-idempotente maximale Primideal ist zugleich ein maximales Ideal.*

2. *Wenn ein nicht-maximales Primideal* $\mathfrak{p}\ (\neq (0))$ *existiert, so wird*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m},$$

dabei ist wenigstens eines aus $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{m}$ *idempotent.*[1]

Zum Beweis nehmen wir zunächst an, dass die kürzeste Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt ist. Es sei $\mathfrak{p}$ ein nicht-idempotentes maximales Primideal, dann soll $\mathfrak{p}$ nach Hilfssatz 1 zugleich ein maximales Ideal sein, womit die erste Bedingung notwendig ist.

Es sei nun $\mathfrak{p}\,(\neq (0))$ ein nicht-maximales Primideal. Wenn $\mathfrak{p}$ idempotent ist, so wird effenbar

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 .$$

Im anderen Fall existiert ein echter Teiler $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ derart,[2] dass für eine ganze Zahl λ

$$\mathfrak{p} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}^\lambda), \qquad \mathfrak{a}^\lambda \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$$

ist. Dabei ist $\mathfrak{a}^\lambda$ kein Primideal und nach dem Fundamentalsatz ist

$$\mathfrak{a}^\lambda = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s] .$$

Bedeutet $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal, so wird offenbar

$$\mathfrak{a} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

und folglich wird auch

$$\mathfrak{p}_i \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}), \qquad \mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

---

(1) Dieses Ergebnis ist identisch mit dem in M. 1, §6 gewonnenen Resultat. Vgl. den Beweis des Satzes 1 in dieser Note.

(2) M. 2, §2.

Da $\mathfrak{p} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}^{\lambda})$ ist, so wird für eines, etwa $\mathfrak{q}_1$, aus $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$

$$\mathfrak{p} \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_1)\,.$$

Hiermit ist $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_1]$ die kürzeste Darstellung durch die grössten Primärideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1$. Nach der eindeutigen Zerlegbarkeit soll $\mathfrak{q}_1$ ein minimales Primärideal von $\mathfrak{a}'$ sein. Da $\mathfrak{p}_1$ aber kein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}'$ ist, so soll

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}\,, \qquad \mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{o}^{\lambda}, \mathfrak{a}') = (\mathfrak{o}^{\lambda+1}, \mathfrak{a}') = \ldots\ldots$$

sein.(1) In $\mathfrak{q}_1$ existiert damit ein Element e derart, dass für jedes Element q_1 aus $\mathfrak{q}_1$

$$(1) \qquad eq_1 \equiv q_1\ (\mathfrak{a}')\,, \qquad e \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$$

ist. Ferner folgt daraus auch(2)

$$(2) \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_1) = \mathfrak{o}\,.$$

Anderseits ist $\mathfrak{p}$ nach dem Hilfssatz 3 ein minimales Primärideal von (0). Ist (0) primär, so soll offenbar

$$\mathfrak{p} = (0)$$

sein. Das widerspricht der Annahme $\mathfrak{p} \neq (0)$. Im anderen Fall ergibt sich nach dem Fundamentalsatz

$$(0) = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_k']\,.$$

Setzen wir jetzt

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_k']\,,$$

so wird $(0) = [\mathfrak{p}, \mathfrak{d}]$, $\mathfrak{d} \neq (0)$. Damit folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad e\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\,.$$

Wenn $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{d}^2$ ist, so ist ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{d}^2$ Teiler von $(\mathfrak{d}, \mathfrak{p})$. Alle zu $\mathfrak{d}$ gehörigen höchsten Primideale $\mathfrak{p}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{p}_l'$ sind auch die höchsten Primideale von $\mathfrak{d}^2$. Aus $(\mathfrak{p}_2' \ldots\ldots \mathfrak{p}_l')^{\rho} \equiv 0\ (\mathfrak{d}^2)$ folgt, dass wenigstens eines aus $\mathfrak{p}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{p}_l'$ durch $\mathfrak{p}'$ teilbar ist. Nach der eindeutigen Zerlegung von $\mathfrak{d}^2$ und (0) folgt damit

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}\,.$$

---

(1) M. 3, § 2.
(2) M. 1, § 4.

Aber nach der Eigenschaft von Primärideal und (3) soll jede Primärkomponente von $\mathfrak{d}^2$ zugleich Teiler von $\mathfrak{d}$ sein. Das widerspricht dem Fundamentalsatz; also soll

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^2\,, \qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{p}+\mathfrak{d}$$

sein. Hiermit ist die Bedingung 2 auch notwendig.

Umgekehrt sind auch die Bedingungen hinreichend. Denn wenn $\mathfrak{a}$ ein nicht-primäres Ideal ist, so ist im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ das Nullideal kein Primärideal. Wenn in $\mathfrak{R}'$ kein von (0) verschiedenes nicht-maximales Primideal existiert, so ist Hilfssatz 2 zufolge die Zerlegung von $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt.[1] Im anderen Fall wird der Ring $\mathfrak{R}'$ nach der Bedingung 2 direkte Summe

$$\mathfrak{o}' = \mathfrak{p}_1'+\mathfrak{m}_1'\,;$$

dabei ist wenigstens eines von $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{m}_1'$ idempotent, und $\mathfrak{p}_1'$ ein nicht-maximales Primideal. Daraus ist klar ersichtlich, dass jedes zu einem maximalen Primideal $\mathfrak{p}''$ gehörige Primärideal Teiler vom durch $\mathfrak{p}''$ echt teilbaren Primideal ist. Damit sind die zugehörigen Primideale von (0) im Ring $\mathfrak{R}'$ die höchsten Primideale von (0), oder $\mathfrak{o}'$. Ist $\mathfrak{o}'$ das zugehörige Primideal von (0), so existiert ein Element n von der Art, dass

$$\mathfrak{o}'n = (0)\,, \qquad n \neq 0 \tag{1}$$

ist. Da $\mathfrak{p}_1'$ ein Primideal ist, so soll $n \equiv o\ (\mathfrak{p}_1')$ sein. Daher folgt

$$\mathfrak{p}_1'^2 \neq \mathfrak{p}_1'\,, \qquad \mathfrak{m}_1'^2 = \mathfrak{m}_1'\,.$$

Wenn $\mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_l'$ alle anderen nicht-maximalen Primideale sind, so wird auch

$$\mathfrak{o}' = \mathfrak{p}_i'+\mathfrak{m}_i'\,, \qquad \mathfrak{m}_i' = \mathfrak{m}_i'^2 \ (i = 2, 3, \ldots, l)\,.$$

Damit ergibt sich

$$\mathfrak{o}' = \mathfrak{m}_1'+\mathfrak{m}_2'+\ldots+\mathfrak{m}_l'+\mathfrak{d}'\,, \qquad \mathfrak{d}' = [\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l']\,;$$

folglich ist jedes Primideal im Restklassenring $\mathfrak{o}' \mid \mathfrak{m}_1'+\ldots+\mathfrak{m}_l'$ maximal. Nach (1) und Hilfssatz 2 wird

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{n}'+\mathfrak{m}'\,, \qquad \mathfrak{m}'^2 = \mathfrak{m}'\,, \qquad \mathfrak{n}'^{\rho} = (0)\,.$$

(1) Existiert in $\mathfrak{R}'$ ein von (0) verschiedenes idempotentes Primideal, so ist $\mathfrak{o}'$ kein zugehöriges Primideal von (0) in $\mathfrak{R}'$, da es in $\mathfrak{R}'$ keinen Totalnullteiler gibt.

Hiermit ist die kürzeste Darstellung von (0) in $\mathfrak{R}'$ eindeutig bestimmt, womit der Hauptsatz bewiesen ist.

3. Ueber die Teilerfremdheit der Primärideale.

Definition. *Zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *heissen, „teilerfremd," wenn* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{o}$ *ist.*[1]

Satz 1. *In jeder kürzesten Darstellung eines Ideals aus einem Ring* $\mathfrak{R}$ *durch grösste Primärideale sind diejenigen Primärkomponenten dann und nur dann stets paarweise teilerfremd, wenn in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Jedes nicht-idempotente maximale Primideal ist zugleich ein maximales Ideal.*
2. *Gibt es in* $\mathfrak{R}$ *ein nicht-maximales Primideal* $\mathfrak{p}(\neq (0))$, *so wird*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m} ;$$

dabei ist wenigstens eines aus $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{m}$ *idempotent.*

Zunächst nehmen wir an, dass die Bedingungen erfüllt sind. Nach dem Teilerkettensatz existiert eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ durch direkte Summe

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n ,$$

worin jedes nicht-nilpotente Ideal direkt-unzerlegbar ist, und es höchstens ein nilpotentes Ideal gibt. Wären $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_j$ nicht idempotent, so gäbe es nach der Bedingung 2 in $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{m}_j$ kein nicht-maximales Primideal. Im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_{i-1} + \mathfrak{m}_{i+1} + \dots + \mathfrak{m}_{j-1} + \mathfrak{m}_{j+1} + \dots + \mathfrak{m}_n$ gäbe es damit kein idempotentes Primideal und kein nicht-maximales Primideal, und folglich würde nach Bedingung 1 und Hilfssatz 2

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{o}'^{\lambda} + \mathfrak{m}', \qquad \mathfrak{o}'^{\lambda} = \mathfrak{o}'^{2\lambda}$$

gegen die Voraussetzung. Damit besitzen wenigstens $n-1$ Ideale aus $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ ein Einheitselement resp. für die Ringe $\mathfrak{m}_i$. Ferner gibt es in jedem $\mathfrak{m}_i$ kein vom Nullideal verschiedenes nicht-maximales Primideal. Sind $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale, und ist

$$\mathfrak{q}_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_2) , \qquad \mathfrak{q}_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_1) ,$$

(1) Bei dieser Definition ist die Existenz des Einheitselementes nicht erforderlich. Vgl. N. §8.

so wird nach Hilfssatz 2

$$(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2) = \mathfrak{o},$$

da jedes $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ $(n-1)$ Ideale aus $\mathfrak{m}_i$ enthält, und in jedem $\mathfrak{m}_i$ kein idempotentes Primideal und kein nicht-maximales Primideal ausser dem Nullideal existiert. In der kürzesten Darstellung eines Ideals $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s]$$

sind diejenigen Primärideale hiermit paarweise teilerfremd.

Umgekehrt nehmen wir an, dass die Primärkomponenten in jeder Zerlegung eines Ideals immer paarweise teilerfremd sind. Es sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal und sei ferner $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Wenn $\mathfrak{p}$ einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{b}$ besitzt, so wird für eine ganze Zahl[1] λ

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{o}^\lambda, \mathfrak{p}], \quad \mathfrak{p} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{o}^\lambda), \quad \mathfrak{o}^\lambda \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{o}^\lambda \equiv 0 \ (\mathfrak{b});$$

folglich wird

$$(\mathfrak{o}^\lambda, \mathfrak{p}) \equiv 0 \ (\mathfrak{b}).$$

Damit sind zwei Primärideale in der kürzesten Darstellung von $\mathfrak{a}$ nicht teilerfremd mit Widerspruch; also ist die Bedingung I notwendig.

Nach dem Zusatz unter Hilfssatz 3 ist jedes nich-maximale Primideal $\mathfrak{p}$ ein minimales Primärideal von (0). Wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, so ist für ein zum Primideal $\mathfrak{p}'$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}', \mathfrak{p}], \quad \mathfrak{p} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}'), \quad \mathfrak{q}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p});$$

dabei ist $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$. Aus unserer Voraussetzung folgt unmittelbar

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{o} = (\mathfrak{o}^2, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{o}^3, \mathfrak{p}) = \ldots .$$

In $\mathfrak{R}$ existiert damit ein Element e derart, dass für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$

$$er \equiv r \ (\mathfrak{p})$$

ist. Daraus folgt für jede ganze Zahl λ

$$(\mathfrak{o}e^\lambda, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}. \tag{1}$$

---

(1) Vgl. die Fussnote von S. 104.

Hier sind zwei Fälle möglich, je nachdem (0) primär ist oder nicht. Im ersten Fall wird offenbar

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 = 0$$

gegen die Voranssetzung. Im zweiten Fall wird nach dem Fundamentalsatz[1]

$$(0) = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n].$$

Setzen wir jetzt $\mathfrak{m} = [\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$, so wird

$$(2) \qquad (0) = [\mathfrak{p}, \mathfrak{m}], \qquad \mathfrak{m} \neq (0).$$

Daraus folgt

$$(3) \qquad e\mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Ist $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, so ist ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{m}^2$ Teiler von $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p})$, da aus $\mathfrak{m}\mathfrak{p} = (0)$

$$(4) \qquad \mathfrak{p}' = \mathfrak{m}^2 : (m), \qquad m \equiv 0 \ (\mathfrak{m}), \qquad m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{m}^2)$$

folgt.[2] Alle höchsten Primideale $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ von $\mathfrak{m}$ sind zugleich die höchsten Primideale von $\mathfrak{m}^2$. Aus $(\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_k)^\rho \equiv 0 \ (\mathfrak{m}^2)$ folgt, dass eines aus $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ durch $\mathfrak{p}'$ teilbar ist. Anderseits wird wegen der Teilerfremdheit der Primärkomponenten

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i) = \mathfrak{o} \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

Damit erhalten wir

$$(5) \qquad \mathfrak{p}' = \mathfrak{o}.$$

Aus (3) und (5) folgt, dass jedes zu $\mathfrak{p}'$ gehörige Primärideal stets Teiler von $\mathfrak{m}$ ist. Weiter ist wegen (4) und (5) jede zu einem von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Primideal gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{m}^2$ Teiler von $(m, \mathfrak{m}^2)$. Diese Tatsache widerspricht dem Fundamentalsatz; also soll

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2, \qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$$

sein, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

(1) M. 3, § 2, Satz 5.
(2) M. 1, § 3.

Aus Satz 1 und Hauptsatz 1 ergibt sich schliesslich

Hauptsatz 2. *Die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus einem Ring* $\mathfrak{R}$ *durch grösste Primärideale ist dann und nur dann stets eindeutig bestimmt, wenn in jeder Zerlegung eines Ideals die grössten Primärkomponenten immer paarweise teilerfremd sind.*

Definition. *Zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *heissen „relativprim", wenn* $\mathfrak{a}$ *relativprim zu* $\mathfrak{b}$ *ist, oder* $\mathfrak{b}$ *relativprim zu* $\mathfrak{a}$. *Ist sowohl* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$, *wie* $\mathfrak{b}$ *zu* $\mathfrak{a}$ *relativprim, so heissen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *„gegenseitig relativprim".*[1]

Definition. *Zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *heissen „gegenseitig unteilbar", wenn* $\mathfrak{a} \not\equiv 0\ (\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ *ist.*

Durch Einführung dieser Definitionen können wir den Hauptsatz 2 in folgender Weise fassen:

Hauptsatz 2′. *Die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus einem Ring* $\mathfrak{R}$ *durch grösste Primärideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn zwei relativprime und gegenseitig unteilbare Primärideale aus* $\mathfrak{R}$ *stets teilerfremd sind.*

4. Ueber teilerfremde Ideale.

In diesem Paragraphen sollen noch einige Bemerkungen über Teilerfremdheit der gegenseitig relativprimen Ideale gemacht werden.

Satz 2. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring, in dem die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind. Ist ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *relativprim und teilerfremd zu den Primäridealen* $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$, *so wird*

$$(\mathfrak{a}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]) = \mathfrak{o}\,.$$

Aus der beim Beweise von Satz 1 gemachten Bemerkung folgt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_n\,,$$

worin die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes nicht-nilpotente Ideal ist direkt-unzerlegbar, und es gibt höchstens ein nilpotentes Ideal.
2. Wenigtens $n-1$ Ideale besitzen ein Einheitselement resp. in bezug auf sich selbst.
3. In jedem Ideal besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen echten Teiler ausser diesem Ideal.

---

(1) N. §6.

Wenn jedes $\mathfrak{m}_i$ ein Einheitselement besitzt, so ist die Behauptung einleuchtend.(1) Wir nehmen an, dass $\mathfrak{m}_n$ kein Einheitselement besitzt. Alle zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$ sind unteilbar durch das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörigen Primideal,(2) da $\mathfrak{a}$ relativprim zu $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ ist. Ist $\mathfrak{m}_n \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, so folgt aus der Existenz des Einheitselements in $\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_{n-1}$

$$(\mathfrak{a}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]) = \mathfrak{o}.$$

Im anderen Fall sind zwei Fälle möglich, je nachdem $[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_n] = (0)$ ist oder nicht. Im ersten Fall folgt aus $\mathfrak{m}_n \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$$(\mathfrak{a}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]) = \mathfrak{o}.$$

Im zweiten Fall sei $\mathfrak{d} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$, dann wird nach Hilfssatz 2

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{d} = \mathfrak{m}'_1 + \ldots + \mathfrak{m}'_{n'};$$

dabei ist höchstens nur ein Ideal nicht-idempotent. Ist $\mathfrak{m}'_{n'}$ nicht-idempotent, so ist $\mathfrak{m}'^{\rho}_{n'} = (0)$. Daraus folgt

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{a}, [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]),$$

da $\mathfrak{o}$ nicht zu jedem $\mathfrak{q}_i$ gehört.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind. Sind zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ gegenseitig relativprim, so sind sie zugleich teilerfremd.*

Offenbar genügt es, den folgenden Hilfssatz zu beweisen: *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ gegenseitig relativprim zu einem Primärideal $\mathfrak{q}$, so wird* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = \mathfrak{o}$. Denn wenn diese Behauptung erwiesen ist, so können wir nach Satz 2 aus

$$\mathfrak{b} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n], \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{o} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

leicht den Satz ableiten.(3) Um die Richtigkeit dieses Hilfssatzes darzutun, ziehen wir die Darstellung von $\mathfrak{R}$ durch eine direkte Summe heran. Es sei

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_n.$$

(1) N. §8. Für Ringe ohne Einheitselement gilt nicht die Behauptung, dass zwei teilerfremde Ideale immer gegenseitig relativprim sind.

(2) K. §3.

(3) N. §6, Satz 10. Denn aus unserer Voraussetzung ist die Darstellung $\mathfrak{b} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ eine reduzierte.

Da $\mathfrak{a}$ gegenseitig relativprim zu $\mathfrak{q}$ ist, so ist jedes zugehörige Primideal von $\mathfrak{a}$ durch das zugehörige Primideal von $\mathfrak{q}$ unteilbar und umgekehrt.[1] Hiermit gehört $\mathfrak{o}$ nicht zu jedem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$. Ist $\mathfrak{q}$ ein nicht-maximales Primideal oder ein idempotentes Primideal, so wird etwa

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n ;$$

folglich soll $\mathfrak{m}_1 \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ sein ; also ist

$$(\mathfrak{a},\ \mathfrak{q}) = \mathfrak{o} .$$

Im anderen Fall ist das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ ein nicht-idempotentes maximales, und $\mathfrak{p}$ besitzt keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler. Infolgedessen ist auch

$$(\mathfrak{a},\ \mathfrak{q}) = \mathfrak{o} .$$

Denn wenn $\mathfrak{m}_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$ ist, so setzen wir $\mathfrak{d} = [\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{q}]$, dann ist in $\mathfrak{m}_1' = \mathfrak{m}_1 | \mathfrak{d}$ das Nullideal kein nicht-maximales Primideal. Daraus folgt nach dem Hilfssatz 2 und $(\mathfrak{a},\ \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$ die obige Behauptung.

(1) K. §3.