Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 3, 2, 1931.)

Wohl als ein Fundamentalsatz der Noetherschen allgemeinen Idealtheorie kann der folgende Satz angesehen werden: ,,*Jedes Ideal lässt eine kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primärkomponenten zu.*''[1] Dabei sind aber die zugehörigen grössten Primärkomponenten eines Ideals im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, in welchen Ringen die zugehörigen grössten Primärkomponenten jedes Ideals stets eindeutig bestimmt sein können. Um die allgemeinste Antwort auf die Frage zu geben, müssen vorerst die Ringe ohne Endlichkeitsbedingung[2] betrachtet werden. Im folgenden wird aber das Problem nur in kommutativen Ringen mit Teilerkettensatz untersucht.

Am Anfang werden die neuen Beweise der Fundamentalsätze der allgemeinen Idealtheorie ganz unabhängig von Fräulein E. Noether und Herrn W. Krull gegeben. Dabei ist der Begriff ,,*halbprimes Ideal*'' sehr wichtig, den Herr Krull in seiner Arbeit[3] abgeleitet hat. In §3 und §4 werden einige Eigenschaften von zugehörigen Primidealen und von idempoteten Idealen gezeichnet. Aus diesen gewonnenen Ergebnissen folgt endlich die Tatsache, dass die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement durch grösste Primärideale dann und nur dann eindeutig bestimmt ist,

---

(1) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen **83** (1921).
W. Krull, Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie Math. Annalen **90** (1923).
E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1927).

(2) W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Edlichkeitsbedingung, Math. Ann. **101** (1929).

(3) Do.

wenn $\mathfrak{R}$ direkte Summe von endlich vielen Idealen wird, in welchen der Vielfachenkettensatz modulo jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal erfüllt ist.

Wenn $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzt, so werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen die folgenden.

I. In der direkten Summe $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{R}_n$ ist höchstens ein Ideal nilpotent und andere Ideale sind direkt unzerlegbar und nicht nilpotent. Ferner besitzen wenigstens $n-1$ Ideale Einheitselement.

II. In jedem Ring $\mathfrak{R}_i$ besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{R}$ stets einen *kommutativen Ring mit Teilerkettensatz* und $\mathfrak{o}$ bezeichnet das *Einheitsideal,* das aus allen Elementen von $\mathfrak{R}$ besteht.

Ein Element e aus einem Ideal $\mathfrak{a}$ heisst *Einheitselement inbezug auf* $\mathfrak{a}$, wenn für jedes Element a aus $\mathfrak{a}$ $ea=a$ wird.

Ist $\mathfrak{a}'$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ und ist jeder Teiler von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}'$ echt unteilbar, so sagen wir: ,, *Es git kein Ideal zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}'$."

Ein Element a heisst ,, *Totalnullteiler*." wenn $\mathfrak{o}a=(0)$ ist.

§ 1. Zugehöriges halbprimes Ideal.

Ist $\mathfrak{a}$ ein gegebenes Ideal aus dem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$, so bildet die Gesamtheit $\mathfrak{h}$ aller Elemente h von der Eigenschaft, dass eine Potenz von h durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, ein Ideal. Ferner ist $\mathfrak{h}$ ein halbprimes Ideal und durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt; damit soll $\mathfrak{h}$ als ,, *zugehöriges halbprimes Ideal*[1] *von* $\mathfrak{a}$ " bezeichnet werden.

Der folgende Satz ist nur ein einfacher Spezialfall des Noetherschen Fundamentalsatzes. Wir wiederholen aber hier kurz diesen Beweis, weil wir die Hauptsätze der Idealtheorie unabhängig von Noether und auch von Krull beweisen wollen.

Satz 1. *Jedes halprime Ideal* $\mathfrak{h}$ *lässt sich als kürzester Durchschnitt von endlich vielen Primidealen eindeutig darstellen.*

Ist $\mathfrak{h}$ kein Primideal, so gibt es ausserhalb von $\mathfrak{h}$ zwei Elemente r, r', so dass $rr'\equiv 0\,(\mathfrak{h})$ wird, und der Idealquotient $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(r)$ ist folglich ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Setzen wir $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}:\mathfrak{h}_1$, so ergibt sich,

(1) W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung.

dass $\mathfrak{h}_2$ auch ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ ist und ferner, dass $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ ist, da $\mathfrak{h}$ ein halbprimes Ideal ist. Damit wird auch $r''\mathfrak{h}_2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{h})$ für jedes Element r'', das nicht durch $\mathfrak{h}_1$ teilbar ist. Da $\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{h})$ und $\mathfrak{h}$ halbprim ist, so muss $\mathfrak{h}_1$ auch wieder ein halbprimes Ideal sein und durch Durchschnitt von zwei echten Teiler darstellbar sein. So fortfahrend erhalten wir nach dem Teilerkettensatz eine Darstellung

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n],$$

wo jedes $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal ist. Eine solche Darstellung ist auch eine kürzeste. Wäre $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n] \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$, so würde $\mathfrak{p}_j \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_j$. Andererseits erhalten wir auch be dem obigen Verfahren die Beziehungen

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_1''],\ \mathfrak{h}_1'' = [\mathfrak{h}_2', \mathfrak{h}_2''],\ \ldots,\ \mathfrak{h}_{m-1}'' = [\mathfrak{h}_m', \mathfrak{p}_i],$$

wobei alle $\mathfrak{h}_i''$ durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar sind. Weiter muss wenigstens eines aus $\mathfrak{h}_i'$ durch $\mathfrak{p}_j$ teilbar sein. Es sei jetzt damit $\mathfrak{h}_k' \equiv 0\,(\mathfrak{p}_j)$. Wegen $\mathfrak{h}_k'\mathfrak{h}_{k+1}' \ldots \mathfrak{h}_m'\mathfrak{p}_i \equiv 0\,(\mathfrak{h}_{k-1}'')$ ergäbe sich dann also

$$\mathfrak{h}_k'\mathfrak{h}_{k+1}' \ldots \mathfrak{h}_m' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_{k-1}''),$$

da $\mathfrak{h}_{k-1}''$ ein halbprimes Ideal ist. Aus $\mathfrak{h}_k'' = \mathfrak{h}_{k-1}'' : \mathfrak{h}_k'$ folgte auch

$$\mathfrak{h}_{k+1}' \ldots \mathfrak{h}_m' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_k'').$$

So fortfahrend hätten wir endlich $\mathfrak{h}_m' \equiv 0\,(\mathfrak{h}_{m-1}'')$ mit Widerspruch, da $\mathfrak{h}_m'$ ein echter Teiler xon $\mathfrak{h}_{m-1}''$ sein soll.

Die Eindeutigkeit der kürzesten Darstellung von $\mathfrak{h}$ ist ganz klar.(1)

Satz 2. *Besitzen die Ideale* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *alle dasselbe zugehörige halbprime Ideal* $\mathfrak{h}$, *so haben* $\mathfrak{d} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, $\mathfrak{t} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ *auch* $\mathfrak{h}$ *zum zugehörigen halbprimen Ideal.*

Zum Nachweis des ersten Teiles der Behauptung sei h ein beliebiges Element aus $\mathfrak{h}$. Dann werden

$$h^{n_1} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1), \ldots, \quad h^{n_n} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_n),$$

also ist $h^{n_1+n_2+\cdots+n_n} \equiv 0\,(\mathfrak{d})$. Wäre $r^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{d})$ für ein Element r ausserhalb von $\mathfrak{h}$, so würde $r^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1)$ mit Widerspruch. Hiermit soll $\mathfrak{h}$ das zugehörige halbprime Ideal von $\mathfrak{d}$ sein.

---

(1) Alle und nur diejenigen Primideale, die zum halbprimen Ideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$ gehören, sind die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$.

Sei r wieder ein Element ausserhalb $\mathfrak{h}$. Wäre $r^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{t})$ für eine Zahl λ, so würde $r^\lambda = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$, wo a_i die Elemente aus $\mathfrak{a}_i$ sind. Da $\mathfrak{a}_i \equiv 0\,(\mathfrak{h})$ sind, so hätten wir $r^{\lambda t} \equiv 0\,(\mathfrak{a}_1)$ für eine endliche Zahl t; womit ein Widerspruch nachgewiesen ist. Eine Potenz jedes Elementes aus $\mathfrak{h}$ ist offenbar durch $\mathfrak{t}$ teilbar, daraus folgt die zweite Behauptung.

§ 2. Ein neuer Beweis vom Fundamentalsatz.

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{h}$ das zugehörige halbprime Ideal eines Ideals $\mathfrak{a}$, und sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots., \mathfrak{p}_m\ (m > 1)$ die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}$, so werden*

$$\mathfrak{t}_i = \mathfrak{a} : (\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1} \ldots. \mathfrak{p}_m)^k = \mathfrak{a} : (\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1} \ldots. \mathfrak{p}_m)^{k+1} = \ldots.$$
$$(i = 1, 2, \ldots., m)$$

für eine ganze Zahl k und $\mathfrak{t}_i$ haben $\mathfrak{p}_i$ zum zugehörigen halbprimen Ideal und ferner gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{t}_i$ und $\mathfrak{a}$.

Aus dem Teilerkettensatz folgt offenbar der erste Teil des Satzes. Da $\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_i \ldots. \mathfrak{p}_m \equiv 0\,(\mathfrak{h})$; $\mathfrak{h}^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ für eine Zahl λ sind, so wird

$$(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots. \mathfrak{p}_i \ldots. \mathfrak{p}_m)^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{a}) \quad \text{für} \quad \lambda \geqq k,$$

daraus folgen $\mathfrak{p}_i^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{t}_i)\ (i = 1, 2, \ldots., m)$. Wäre $\mathfrak{t}_l \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_l)$ für ein festes $\mathfrak{t}_l$, so gäbe es in $\mathfrak{t}_l$ ein Element t_l ausserhalb $\mathfrak{p}_l$, derart, dass

$$(1) \qquad t_l(\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{l-1}\mathfrak{p}_{l+1} \ldots. \mathfrak{p}_m)^k \equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

also würde

$$(t_l\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{l-1}\mathfrak{p}_{l+1} \ldots. \mathfrak{p}_m)^k \equiv 0\ (\mathfrak{a}); \qquad t_l^k \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_l).$$

Nach der Definition von $\mathfrak{h}$ ergäbe sich

$$t_l\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{l+1} \ldots. \mathfrak{p}_m \equiv 0\ (\mathfrak{h}),$$

damit würden wegen $\mathfrak{p}_1 \ldots. \mathfrak{p}_{l-1}\,\mathfrak{p}_{l+1} \ldots. \mathfrak{p}_m \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_l)$; $\mathfrak{h} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_l)$

$$t_l p' \equiv 0\ (\mathfrak{p}_l); \quad t_l \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_l); \quad \mathfrak{p}' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_l)$$

mit Widerspruch. Hiermit sollen $\mathfrak{p}_i$ das zugehörige halbprime Ideal von $\mathfrak{t}_i$ sein.

Es sei nun $\mathfrak{q}$ ein Primärideal, das ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, dann ist $\mathfrak{q}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, da $m > 1$ ist. Wenn $\mathfrak{t}_l$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$ wäre, so würde $\mathfrak{p}_l$ auch das zugehörige Primideal von $\mathfrak{q}$. Nach (1) folgten $t_l p'' \equiv 0\,(\mathfrak{q})$; $t_l \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$; $p''^n \not\equiv 0\,(\mathfrak{q})$ für jedes n, wobei p'' ein Element aus $(\mathfrak{p}_1 \ldots . \mathfrak{p}_{l-1}\,\mathfrak{p}_{l+l} \ldots . \mathfrak{p}_m)^k$ ausserhalb von $\mathfrak{p}_l$ bedeutet. Das stellt einen Widerspruch gegen die Eigenschaft vom Primärideal $\mathfrak{q}$ dar.

Ein Primärideal, das zu einem höchsten Primideal $\mathfrak{p}$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ gehört, Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, und kein echtes Primäridealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, heisst „ *minimales Primärideal von* $\mathfrak{a}$."[1]

Hilfssatz 2. *Ist das zugehörige halbprime Ideal* $\mathfrak{h}$ *eines nicht primären Ideals* $\mathfrak{a}$ *prim, so wird* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{a}']$, *wo* $\mathfrak{q}$ *das zu* $\mathfrak{h}$ *gehörige minimale Primärideal von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}'$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}'$ *durch* $\mathfrak{h}$ *unteilbar ist.*

Aus der Voraussetzung folgt $\mathfrak{h}^n \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ für eine Zahl n. Da $\mathfrak{a}$ nicht primär ist, so folgt damit die Existenz von zwei Elementen r_1 und h_1 derart, dass

$$r_1 h_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,; \quad r_1 \not\equiv 0 (\mathfrak{h})\,; \quad h_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{h})\,; \quad h_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})\,,$$

da aus der Voraussetzung $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{o}$ folgt. Bilden wir nun den Idealquotient

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} : (r_1)\,,$$

so ist $\mathfrak{a}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und durch $\mathfrak{h}$ teilbar, da $\mathfrak{h}$ ein Primideal ist. Wenn $\mathfrak{a}_1$ noch nicht primär ist, so können wir auch zwei Elemente r_2, h_2 finden, sodass

$$r_2 h_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)\,; \quad r_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h})\,; \quad h_2 \equiv 0 (\mathfrak{h})\,; \quad h_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)\,.$$

Der Idealquotient $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} : (r_1 r_2)$ ist auch ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$ und durch $\mathfrak{h}$ teilbar. Nach dem Teilerkettensatz bricht die Fortsetzung des Verfahrens aber im Endlichen ab; also erhalten wir endlich ein Primärideal

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{a} : \ (r_1 r_2 \ldots . r_m)\,,$$

das ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und durch $\mathfrak{h}$ teilbar ist.

(1) Das Primärideal soll "minimale isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$" heissen. Das Wort "minimales Primärideal" wählen wir aber der Kürze halber, weil alle minimalen Primärideal von $\mathfrak{a}$ zugleich die isolierten Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ sind.

Wäre $\mathfrak{q}$ ein echter Teiler eines Primärideals $\mathfrak{q}'$, das auch ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so würde $qr_1r_2\ldots r_m \equiv 0\,(\mathfrak{q}')$; $q \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}')$; $(r_1r_2\ldots r_m)^n \not\equiv 0\,(\mathfrak{h})$ für jedes n, wobei q ein Element aus $\mathfrak{q}$ ausserhalb von $\mathfrak{q}'$ bedeutet; damit ist ein Widerspruch nachgewiesen. Also soll $\mathfrak{q}$ das zu $\mathfrak{h}$ gehörige minimale Primärideal von $\mathfrak{a}$ sein.

Es sei nun $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{o}r_1r_2\ldots\ldots r_m, \mathfrak{a})$, dann ist $\mathfrak{a}'$ offenbar ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und nicht durch $\mathfrak{h}$ teilbar. Ist c ein gemeinsames Element von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{q}$, so wird

$$(1) \qquad c = q = rr_1r_2\ldots\ldots r_m + a\,,$$

wo q, r, a Elemente aus $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}$ sind. Durch die Multiplikation von (1) mit $r_1r_2\ldots\ldots r_m$ erhalten wir

$$r(r_1r_2\ldots\ldots r_m)^2 \equiv 0 \quad (\mathfrak{a})\,,$$

also wird

$$rr_1r_2\ldots\ldots r_m \equiv 0 \quad (\mathfrak{q})\,.$$

Wegen $r_1r_2\ldots\ldots r_m \not\equiv 0\,(\mathfrak{h})$ folgt $r \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, da $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{h}$ gehöriges Primärideal ist. Damit ergibt sich $c \equiv 0\,(\mathfrak{a})$; also wird

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}\,,\ \mathfrak{a}']\,.$$

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Aus den beiden Hilfssätzen ergibt sich

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{h}$ das zugehörige halbprime Ideal eines Ideals $\mathfrak{a}$ und seien auch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m$ die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}$. Dann gibt es eine kürzeste Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$, oder $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}']$, wo $\mathfrak{q}_i$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörigen minimalen Primärideale von $\mathfrak{a}$ sind und jede Potenz von $\mathfrak{a}'$ nicht durch $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$ teilbar ist.*

Denn nach Hilfssatz 1 existieren die Teiler $\mathfrak{t}_i$ von $\mathfrak{a}$, die $\mathfrak{p}_i$ zum zugehörigen halbprimen Ideal besitzen. Ferner gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{t}_i$ und $\mathfrak{a}$. Durch Anwendung des Hilfssatzes 2 können wir auch die minimalen Primärideale $\mathfrak{q}_i$ von $\mathfrak{t}_i$ finden, wenn $\mathfrak{t}_i$ nicht primär sind. $\mathfrak{q}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$ sind auch offenbar alle minimalen Primärideale von $\mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{q}_i$ ein echter Teiler eines Primärideals $\mathfrak{q}_i'$, das ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so würden $\mathfrak{t}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_i')$; $t_ip' \equiv 0\,(\mathfrak{a})$; $t_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_i')$;

$p'^n \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_i')$ für jedes n, wo t_i ein Element aus $\mathfrak{t}_i$ und p' ein Element aus $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_{i-1}\, \mathfrak{p}_{i+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m)^k$ ist. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m] \neq \mathfrak{a}$. Nach den beiden Hilfssätzen folgen

$$\mathfrak{t}_i p_i' \equiv 0\ \ (\mathfrak{a})\,; \quad p_i' \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p}_i)\,; \quad \mathfrak{q}_i p_i'' \equiv 0(\mathfrak{t}_i)\,; \quad p_i'' \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p}_i)\,,$$

wo p_i' Elemente aus $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m)^k$ sind. Ist n die ganze Zahl derart, dass $(\mathfrak{p}_1 \ldots\ldots \mathfrak{p}_i \ldots\ldots \mathfrak{p}_m)^n \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, $n \geqq k$ wird, und setzen wir $p_i = (p_i'p_i'')^n$, so werden

$$\mathfrak{q}_i p_i \equiv 0(\mathfrak{a})\,; \; p_i \equiv 0((\mathfrak{p}_1 \ldots\ldots \mathfrak{p}_{i-1}\ \mathfrak{p}_{i+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m)^n)\,;$$
$$p_i \not\equiv 0(\mathfrak{p}_i)\,; \; p_i p_j \equiv 0(\mathfrak{a}) \ \ (i \neq j)\,.$$

Es sei $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}p_1, \mathfrak{o}p_2, \ldots\ldots \mathfrak{o}p_m)$, dann wird

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}']\,.$$

Denn, wenn c ein gemeinsames Element von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}'$ ist, so wird

$$(1) \quad c = d = a + r_1p_1 + r_2p_2 + \ \ldots\ldots\ + r_mp_m\,,$$

wobei r_i Elemente aus $\mathfrak{R}$ und d, a Elemente aus $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$ sind. Durch Multiplikation von (1) mit p_i folgen

$$r_i p_i^2 \equiv 0\ \ (\mathfrak{a}) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)\,,$$

da $\mathfrak{d} \equiv 0\,(\mathfrak{q}_i)$, $\mathfrak{q}_i p_i \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ sind. Da $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal und $p_i^2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ sind, so werden

$$r_i \equiv 0\ \ (\mathfrak{q}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)\,.$$

Aus (1) folgt damit $c \equiv 0\,(\mathfrak{a})$; also wird

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{a}']\,,$$

dabei ist jede Potenz von $\mathfrak{a}'$ nicht durch $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$ teilbar, weil $\mathfrak{a}'$ die Elemente $p_i^2 (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$ enthält.

Da $p_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}_j)$, $p_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i \neq j)$ sind, so werden $p_i^l \not\equiv (0)\,\mathfrak{p}_i$; $p_i^l \equiv 0\,(\mathfrak{q}_j)\ (i \neq j)$; $p_i^l \equiv 0\,(\mathfrak{a}')$ für eine ganze Zahl l, daraus folgen

$$[\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots \mathfrak{q}_{i-1},\ \mathfrak{q}_{i+1} \ldots\ldots \mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{a}'] \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{q}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)\,.$$

Damit ist die Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}']$ ein kürzeste, da $[\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m] \neq \mathfrak{a}$ ist.

Zusatz: *Sind* $\mathfrak{q}_i$ *die minimalen Primärideale von* $\mathfrak{a}$ *und ist* $\mathfrak{a}'$ *ein maximales Ideal, das die kürzste Darstellung* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}']$ *erfüllt, so ist jede Potenz von* $\mathfrak{a}'$ *nicht durch* $\mathfrak{q}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$ *teilbar.*

Denn, wenn für eine Zahl n $\mathfrak{a}'^n \equiv 0\ (\mathfrak{q}_l)$ wäre, so würde

$$(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2' \ldots\ldots \mathfrak{p}_{m'}')^{n'} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}_l),$$

wo $\mathfrak{p}_i'$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}'$ sind. Damit hätten wir etwa $\mathfrak{p}_j' = \mathfrak{p}_l$, wo $\mathfrak{p}_l$ das zu $\mathfrak{q}_l$ gehörige Primideal ist; also würde das zu $\mathfrak{p}_j'$ gehörige minimale Primärideal $\mathfrak{q}_j'$ von $\mathfrak{a}$ ein Teiler von $\mathfrak{q}_l$. Anderseits erhalten wir nach dem Satz 3 eine kürzeste Darstellung

$$\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_j', \ldots\ldots \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}''],$$

oder wird $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l, \ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_j', \ldots, \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$. Damit hätten wir $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l, \ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{j-1}', \mathfrak{q}_{j+1}', \ldots, \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$, wegen $\mathfrak{q}_l \equiv 0\ (\mathfrak{q}_j')$. Es sei nun $\mathfrak{a}''' = [\mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{j-1}', \mathfrak{q}_{j+1}', \ldots\ldots \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$, dann würde die Darstellung

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_l, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}''']$$

eine kürzeste und $\mathfrak{a}'''$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}'$; damit ist ein Widerspruch zu der Annahme nachgewiesen.

Hilfssatz 3. *Sind*

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}'], \quad \mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$$

zwei kürzeste Darstellungen und ist $\mathfrak{a}'$ *nicht durch einen echten Teiler ersetzbar, so ist*

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$$

auch eine kürzeste Darstellung.

Wäre $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{m'}'] \equiv 0\ (\mathfrak{a}'')$, so würde $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}'] = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''' = [\mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}']$ wäre ein echter Teiler von $\mathfrak{a}'$, da $[\mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m'}', \mathfrak{a}'']$ eine kürzeste ist. Damit hätten wir $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}''']$ mit Widerspruch.

Wäre $[\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{i-1}, \mathfrak{q}'_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}, \mathfrak{a}''] \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_i)$, so würde auch

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{i-1}, \mathfrak{q}'_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}\ \mathfrak{a}'']$$

und $[\mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{i-1}, \mathfrak{q}'_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{a}'']$ wäre ein echter Teiler von $\mathfrak{a}'$; also ergibt sich auch ein Widerspruch.

Ferner ist offenbar

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}, \mathfrak{a}''] \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_i).$$

Aus den vorigen Sätzen ergibt sich

Satz 4. *Jedes Ideal lässt eine kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen grössten Primärkomponenten zu, die zu verschiedenen Primidealen gehören.*

Nach Satz 3 erhalten wir die kürzesten Darstellungen

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{a}'], \quad \mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}, \mathfrak{a}''],$$
$$\mathfrak{a}'' = [\mathfrak{q}_1'', \ldots\ldots, \mathfrak{q}''_{m''}, \mathfrak{a}'''], \ldots\ldots,$$

wobei $\mathfrak{q}_j^{(i)}$ die minimalen Primärideale von $\mathfrak{a}^{(i)}$ sind und $\mathfrak{a}^{(i+1)}$ die maximalen Ideale, die $\mathfrak{a}^{(i)} = [\mathfrak{q}_1^{(i)}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m^{(i)}}^{(i)}, \mathfrak{a}^{(i+1)}]$ erfüllen, sind. In der Kette von Idealen $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \ldots\ldots, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{a}^{(i+1)}, \ldots\ldots$ ist jedes Ideal ein echter Teiler des unmittelbar vorangehenden. Damit bricht die Kette im Endlichen ab; also erhalten wir endlich

$$\mathfrak{a}^{(n)} = [\mathfrak{q}_1^{(n)}, \mathfrak{q}_2^{(n)}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m^{(n)}}^{(n)}].$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes ergibt sich eine kürzeste Darstellung

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_1^{(n)}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m^{(n)}}^{(n)}].$$

Denn $\mathfrak{a}^{(i+1)}$ ist zugleich ein maximales Ideal, das $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{m'}, \mathfrak{q}^{(i)}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mathfrak{q}_{m^{(i)}}^{(i)}, \mathfrak{a}^{(i+1)}]$ erfüllt. Aus dem Zusatz unter Satz 3 folgt, dass alle zugehörigen Primideale in der kürzesten Darstellung voneinander verschieden sind. Da der Durchschnitt von zwei zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen, die einander unteilbar sind, nicht mehr primär sein kann, so ist die kürzeste Darstellung zugleich ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen grössten Primärkomponenten.

Zusatz. *Sind* $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}'_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{m'}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}^{(n)}_1, \ldots\ldots \mathfrak{p}^{(n)}_{m^{(n)}}$ *die zugehörigen Primideale der Primärkomponenten der im Satz abgeleiteten Darstellung, so sind* $\mathfrak{p}^{(i+1)}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}^{(i+1)}_{m^{(i+1)}}$ *die Teiler von wenigstens einem aus* $\mathfrak{p}^{(i)}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_{m^{(i)}}$.

Da $\left(\mathfrak{p}^{(i)}_1 \ldots \mathfrak{p}^{(i)}_{m^{(i)}}\right)^n \equiv 0\ (\mathfrak{a}^{(i)})$ sind, so wird jedes aus $\mathfrak{p}^{(i+1)}_1, \ldots, \mathfrak{p}^{(i+1)}_{m^{(i+1)}}$ ein Teiler von wenigstens einem aus $\mathfrak{p}^{(i)}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}^{(i)}_{m^{(i)}}$.

Satz 5. *Bei zwei kürzesten Darstellungen von* $\mathfrak{a}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= [\mathfrak{q}_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{1k_1}, \mathfrak{q}_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{2k_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{lk_l}] \\ &= [\mathfrak{q}'_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{1k'_1}, \mathfrak{q}'_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{2k'_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{l'k'_{l'}}]\end{aligned}$$

durch grösste Primärideale stimmen die Anzahl der Komponenten und die zugehörigen Primideale überein.[1]

Zum Nachweis fassen wir die zugehörigen Primideale derart in Gruppen zusammen, dass kein Ideal aus $\mathfrak{p}_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{1k_1}$ $(\mathfrak{p}'_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{1k'_1})$ Teiler von jedem anderen zugehörigen Primideal wird und jedes aus $\mathfrak{p}_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{2k_2}$ $(\mathfrak{p}'_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{2k'_2})$ ein Teiler von wenigstens einem aus $\mathfrak{p}_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{1k_1}$ $(\mathfrak{p}'_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{1k'_1})$, aber kein Teiler von jedem anderen zugehörigen Primideal wird, im allgemeinen, dass jedes aus $\mathfrak{p}_{i+1,1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{i+1,k_{i+1}}$ $(\mathfrak{p}'_{i+1\,1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{i+1\,k'_{i+1}})$ ein Teiler von wenigstens einem aus $\mathfrak{p}_{i1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{ik_i}$ $(\mathfrak{p}'_{i1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{ik'_i})$ und kein Teiler jedes davon verschiedenen Ideals aus $\mathfrak{p}_{i+11}, \ldots, \mathfrak{p}_{i+21}, \ldots, \mathfrak{p}_{lk_l}$ $(\mathfrak{p}'_{i+11}, \ldots, \mathfrak{p}'_{i+21}, \ldots, \mathfrak{p}'_{l'k'_{l'}})$ wird.

Da $\mathfrak{q}_{11}\mathfrak{q}_{12} \ldots\ldots \mathfrak{q}_{lk_l} \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{11})$ ist, so wird etwa $\mathfrak{p}_{11} \equiv 0\ (\mathfrak{p}'_{11})$, weil $\mathfrak{p}_{ij}\ (i>1)$ ein Teiler von einem aus $\mathfrak{p}_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{1k_1}$ ist. Aus $\mathfrak{q}'_{11} \ldots\ldots \mathfrak{q}'_{l'k'_{l'}} \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{11})$ folgt auch $\mathfrak{p}'_{st} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{11})$; also wird $\mathfrak{p}'_{st} \equiv 0\ (\mathfrak{p}'_{11})$. Wegen der Eigenschaft von $\mathfrak{p}'_{11}$ folgt $\mathfrak{p}'_{st} = \mathfrak{p}'_{11}$, woraus $\mathfrak{p}_{11} = \mathfrak{p}'_{11}$ folgt. Damit erhalten wir $\mathfrak{q}_{11} \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{11})$; $\mathfrak{q}'_{11} \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{11})$; also wird $\mathfrak{q}_{11} = \mathfrak{q}'_{11}$, weil $\mathfrak{q}_{11}$ ein zu $\mathfrak{p}_{11}$ gehöriges Primärideal ist. Wiederholen wir das Verfahren, so kommen

$$\begin{aligned} k_1 = k'_1;\ \mathfrak{p}_{11} &= \mathfrak{p}'_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{1k_1} = \mathfrak{p}'_{1k'_1}; \\ \mathfrak{q}_{11} &= \mathfrak{q}'_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{1k_1} = \mathfrak{q}'_{1k'_1}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}_{21}, \ldots\ldots \mathfrak{q}_{2k_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{lk_l}] \\ &= [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}'_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{2k'_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{l'k'_{l'}}],\end{aligned}$$

(1) Beim Beweise des Satzes ist der Krullsche Satz zugleich bewiesen. Vgl. Krull, Ein Neuer Beweis für die Hauptsätze, § 3.

wobei $\mathfrak{a}_1 = [\mathfrak{q}_{11}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{1k_1}]$ ist. Da die Darstellungen die kürzesten sind, so ist $\mathfrak{a}_1$ durch kein Ideal aus $\mathfrak{q}_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{lk_l}$; $\mathfrak{q}'_{21}$; $\ldots$, $\mathfrak{q}'_{l'k'_{l'}}$ teilbar. Wegen $\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_{21}\mathfrak{q}_{22}\ldots\mathfrak{q}_{lk_l} \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{21})$; $\mathfrak{a}_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{21})$ ergibt sich

$$(\mathfrak{q}_{21}\mathfrak{q}_{22}\ldots\mathfrak{q}_{lk_l})^n \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{21})$$

für eine Zahl n, da $\mathfrak{q}'_{21}$ ein Primärideal ist. Damit erhalten wir etwa

$$\mathfrak{p}_{21} \equiv 0\ (\mathfrak{p}'_{21}),$$

da $\mathfrak{p}_{ij}$ $(i > 2)$ ein Teiler von einem aus $\mathfrak{p}_{21}, \ldots, \mathfrak{p}_{2k_2}$ ist. Aus

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}'_{21}\mathfrak{q}'_{22}\ldots\mathfrak{q}'_{l'kl} \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{21})$$

folgt auch

$$\mathfrak{p}'_{ij} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{21}) \quad (i \geqq 2),$$

also erhalten wir $\mathfrak{p}'_{ij} \equiv 0\ (\mathfrak{p}'_{21})$. Wegen der Eigenschaft von $\mathfrak{p}'_{21}$ folgt

$$\mathfrak{p}'_{ij} = \mathfrak{p}'_{21} = \mathfrak{p}_{21}.$$

So fortfahrend kommen endlich

$$k_2 = k'_2;\ \mathfrak{p}_{21} = \mathfrak{p}'_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{2k_2} = \mathfrak{p}'_{2k'_2}.$$

Wenn die Ideale $\mathfrak{a}_2 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}_{21}, \mathfrak{q}_{22}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{2i}]$, $\mathfrak{a}'_2 = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}'_{21}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{2i}]$ $(1 \leqq i \leqq k_2)$ voneinander verschieden wären, so würde etwa $\mathfrak{a}_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}'_2)$, also würde etwa

$$\mathfrak{a}_2 \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{q}'_{21}).$$

Wegen $\mathfrak{a}_2\mathfrak{q}_{2i+1}\ldots\mathfrak{q}_{2k_2}\ldots\mathfrak{q}_{lk_l} \equiv 0\ (\mathfrak{q}'_{21})$ hätten wir damit etwa

$$\mathfrak{p}_{2\,i+1} \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}'_{21})$$

mit Widerspruch, da $\mathfrak{p}_{21} = \mathfrak{p}'_{21}$ ist. Hiermit wird

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}_{21}, \mathfrak{q}_{22}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{2k_2}] = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{q}'_{21}, \mathfrak{q}'_{22}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{2k'_2}].$$

Durch die Fortsetzung des Verfahrens können wir den Satz beweisen.

Zusatz 1. *Jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ ist zugleich ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ und jedes minimale Primärideal von $\mathfrak{a}$ ist zugleich eine Primärkomponente in der kürzsten Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale.*

Zusatz 2. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *der Doppelkettensatz erfüllt, und besitzen die Ideale* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *alle dieselben zugehörigen Primideale* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$, *so hat* $\mathfrak{d} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ *auch* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *zu den zugehörigen Primidealen.*

Wenn $\mathfrak{R}$ ein Einheitselement enthält, so ist der Satz nach Satz 2 und Zusatz 1 klar.

Im anderen Falle wird $\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ ist. Damit ist jedes zu von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Primideal gehörige Primärideal ein Teiler von $\mathfrak{n}$. Wenn $\mathfrak{o}$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}_i$ ist, so wird $\mathfrak{n}$ nicht durch $\mathfrak{d}$ teilbar, also soll $\mathfrak{o}$ auch ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{d}$ sein; woraus der Behauptung unmittelbar folgt.

§ 3. Über zugehörige Primideale.

Hilfssatz 4. *Sind* a_1, a_2 *zwei Elemente von der Art, dass* $a_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ $(i = 1, 2)$; $a_1 a_2 \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ *sind, so gibt es ein Element* b *ausserhalb von* $\mathfrak{a}$, *derart, dass* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (b)$ *ein Primideal und* a_1 *ein Teiler von* b *ist.*

Denn der Idealquotient $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a} : (a_1)$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$. Wenn $\mathfrak{c}_1$ prim ist, so ist der Satz schon klar. Im anderen Falle gibt es zwei Elemente c_1, c_1' derart, dass $c_1 c_1' \equiv 0\,(\mathfrak{c}_1)$, $c_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{c}_1)$, $c_1' \not\equiv 0\,(\mathfrak{c}_1)$ sind. Daraus folgt, dass $a_1 c_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a} : (a_1 c_1)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{c}_1$. So fortfahrend erhalten wir eine Kette von Idealen

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_n, \ldots,$$

bei der jedes Ideal ein echter Teiler des vorangehenden ist. Damit bricht die Kette im Endlichen ab; also wird $\mathfrak{c}_n = \mathfrak{c}_{n+1} = \ldots$ und dabei muss $\mathfrak{c}_n$ ein Primideal sein, sonst würde $\mathfrak{c}_{n+1}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{c}_n$. Setzen wir nun $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}_n$, $b = a_1 c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$, so wird

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (b), \quad b \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}).$$

Satz 6. *Ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *ist dann und nur dann ein zugehöriges Primideal eines Ideals* $\mathfrak{a}\,(\neq \mathfrak{o})$, *wenn es ein durch* $\mathfrak{a}$ *unteilbares Ideal* $\mathfrak{b}$ *gibt, derart, dass* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ *wird.*

Es sei nämlich $\mathfrak{p}$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ und sei auch

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m]$$

eine kürzste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Ist $\mathfrak{q}_l$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente, so wird

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m]\,\mathfrak{p}^n \equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

wegen

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m]\,\mathfrak{q}_l \equiv 0\ (\mathfrak{a}).$$

Da $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m]$ eine kürzeste ist, so wird

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1} \ldots, \mathfrak{q}_m] \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_l).$$

Damit wird $p\mathfrak{p}^\lambda \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$; $p\mathfrak{p}^{\lambda+1} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ für eine Zahl $\lambda\,(\geqq 0)$, wo p ein durch $\mathfrak{q}_l$ unteilbares Element in $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m]$ ist, also gibt es ein Element b, sodass $b \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$, $b \equiv 0\,([\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m])$; $b\mathfrak{p} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ wird. Wäre $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (b)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$, so würde nach Hilfssatz 4 $\mathfrak{p}' = \mathfrak{a} : (bb')$, $bb' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ein echter primer Teiler von $\mathfrak{p}$. Dazu muss $bb' \not\equiv 0\,(\mathfrak{q}_l)$ sein, sonst würde $bb' \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ mit Widerspruch, da $bb' \equiv 0\,([\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{l-1}, \mathfrak{q}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{q}_m])$ ist. Wegen $bb'\mathfrak{p}' \equiv 0\,(\mathfrak{q}_l)$; $bb' \not\equiv (\mathfrak{q}_l)$ hätten wir $\mathfrak{p}'^n \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ mit Widerspruch. Damit ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (b); \quad (b) \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}).$$

Es sei jetzt umgekehrt $\mathfrak{b}$ ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Ideal, von der Art, dass

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

ist. Dann soll $\mathfrak{b}$ nicht durch alle Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$ teilbar sein; nämlich wird $\mathfrak{b}$ nicht durch $\mathfrak{q}_{k_1}, \mathfrak{q}_{k_2}, \ldots \mathfrak{q}_{k_l}$ teilbar. Wegen $\mathfrak{b}\mathfrak{p} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ erhalten wir aber $\mathfrak{p}^n \equiv 0\,(\mathfrak{q}_{k_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ für eine Zahl n, also werden

$$\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{k_i}) \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Seien $\mathfrak{q}_{s_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{s_t}$ die Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, durch welche $\mathfrak{b}$ teilbar ist und sei auch $\mathfrak{q} = [\mathfrak{q}_{s_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{s_t}]$. Dann werden

$$(1) \quad \mathfrak{b} \equiv 0\ (\mathfrak{q}); \ \mathfrak{q}\mathfrak{q}_{k_1} \ldots \mathfrak{q}_{k_l} \equiv (\mathfrak{a}); \ \mathfrak{b}\mathfrak{q}_{k_1} \ldots \mathfrak{q}_{k_l} \equiv 0\ (\mathfrak{a}).$$

Wäre $\mathfrak{p}$ von allen zugehörigen Primidealen von $\mathfrak{a}$ verschieden, so würden nach der Annahme

$$\mathfrak{b}\mathfrak{p}_{k_i} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}) \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Also würde $\mathfrak{b}(\mathfrak{p}_{k_1} \dots \mathfrak{p}_{k_l})^n \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ für jedes n, da $\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{k_i})$ und $\mathfrak{p}$ von allen $\mathfrak{p}_{k_i}$ verschieden ist. Damit ergäbe sich

$$\mathfrak{b}\ (\mathfrak{q}_{k_1} \dots \mathfrak{q}_{k_l}) \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{a})$$

mit Widerspruch gegen (1). Hiermit soll $\mathfrak{p}$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ sein.

§ 4. Über idempotente Ideale.

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$, *so gibt es im Ring* $\mathfrak{R}$ *ein Einheitselement.*

Zum Nachweis des Satzes werden wir zunächst die Existenz eines regulären Elementes beweisen. Dazu nehmen wir an, dass es in $\mathfrak{R}$ kein reguläres Element gibt.

Es sei nun r ein von Null verschiedenes Element, dann ist $(0):(r)$ vom Nullideal verschieden. Dazu ist $(0):(r)$ noch von $\mathfrak{o}$ verschieden; sonst hätte $\mathfrak{R}$ einen Totalnullteiler r gegen den Satz.[1] Nach Hilfssatz 4 können wir ein Element r' finden, sodass $\mathfrak{p} = (0):(r')$ ein vom Nullideal verschiedenes Primideal und $r' \neq 0$ ist, und dabei ist $\mathfrak{p}$ natürlich von $\mathfrak{o}$ verschieden. Der Idealquotient $\mathfrak{c} = (0):\mathfrak{p}$ ist auch vom Nullideal verschieden. Gibt es Elemente c aus $\mathfrak{c}$ und r ausserhalb $\mathfrak{p}$, sodass $cr = 0$ wird, so erhalten wir auch $\mathfrak{c}' = (0):\mathfrak{p}'$, wo $\mathfrak{p}'$ ein echter primer Teiler von $\mathfrak{p}$. Nach dem Teilerkettensatz ergibt sich endlich, dass für jedes Element $c_1(\neq 0)$ aus $\mathfrak{c}_1$ und jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{c}_1 = (0):\mathfrak{p}_1$, $c_1 r \neq 0$ wird, wo $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal ist.

Da $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{o}$ ist, gibt es ein Element p_2 ausserhalb von $\mathfrak{p}_1$. Nach der Voraussetzung ist p_2 auch ein Nullteiler, also können wir ein Primideal $\mathfrak{p}_2$ genau wie bei dem obigen Falle finden, sodass $\mathfrak{c}_2 = (0):\mathfrak{p}_2$; $p_2 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_2)$ und für jedes Element $c_2(\neq 0)$ aus $\mathfrak{c}_2$ und jedes Element r ausserhalb $\mathfrak{p}_2$ $c_2 r \neq 0$ wird. Dabei ist offenbar $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ und daraus folgt $\mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_2$. Wenn $\mathfrak{d} = [\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2] \neq (0)$ wäre, so würde $\mathfrak{d}((p_2), \mathfrak{p}_1) = (0)$ mit Widerspruch. Damit werden $\mathfrak{c}_{12} = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2) > \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{12} > \mathfrak{c}_2$ und ferner werden

$$\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2)\,;\ \ \mathfrak{p}_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)\,;\ \ (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) > \mathfrak{p}_1,\ \ (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) > \mathfrak{p}_2\,.$$

---

(1) Wenn $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$ ist, so gibt es in $\mathfrak{R}$ keinen Totalnullteiler ausser Null. Vgl. S. Mori; Ueber Primärideale in kommutativen Ringbereichen, Memoirs of the College of Science, Kyoto University, das bald erscheinen soll.

Es seien nun wieder p_1, p_2 die Elemente aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ ausserhalb $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1$, dann wird $p_3 = p_1 + p_2$ nicht durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ teilbar und p_3 ist auch ein Nullteiler. Damit können wir auch ein Primideal $\mathfrak{p}_3$ finden, sodass $\mathfrak{c}_3 = (0) : \mathfrak{p}_3$, $p_3 \equiv 0\,(\mathfrak{p}_3)$ und für jedes Element $c_3 (\neq 0)$ aus $\mathfrak{c}_3$ und jedes Element r ausserhalb $\mathfrak{p}_3$ $c_3 r \neq 0$ ist. Da $[\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_3] = (0)$, $[\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3] = (0)$ sind, so werden auch

$$(1) \quad \mathfrak{p}_3 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)\,; \quad \mathfrak{p}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_3) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Wäre $\mathfrak{c}_3 \equiv 0\,(\mathfrak{c}_{12})$, so würde $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] \equiv 0\,(\mathfrak{p}_3)$, also würde $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{p}_3)$. Nach (1) stellt die Beziehung $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{p}_3)$ einen Widerspruch zu der Eigenschaft des Primideals $\mathfrak{p}_3$ dar. Hiermit soll $\mathfrak{c}_3 \not\equiv 0\,(\mathfrak{c}_{12})$ sein. Also werden

$$\mathfrak{c}_{123} = (\mathfrak{c}_3, \mathfrak{c}_{12}) > \mathfrak{c}_{12} > \mathfrak{c}_1\,;$$

Es ist also noch

$$\mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l+1} = (\mathfrak{c}_{l+1}, \mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l}) > \mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l} > \ldots > \mathfrak{c}_1\,;$$

$$\mathfrak{p}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_{l+1})\,, \quad \mathfrak{p}_{l+1} \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

zuzeigen unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2, \ldots, l)$ miteinander unteilbar sind. Da

$$\mathfrak{d}_i = [\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_l] \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

ist, so wählen wir die Elements d_i aus $\mathfrak{d}_i$ ausserhalb $\mathfrak{p}_i$. Dann ist $p_{l+1} = d_1 + d_2 + \ldots + d_l$ durch keines aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ teilbar. Damit können wir ein Primideal $\mathfrak{p}_{l+1}$ finden, sodass $\mathfrak{c}_{l+1} = (0) : \mathfrak{p}_{l+1}$; $p_{l+1} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{l+1})$ und für jedes Element $c_{l+1} (\neq 0)$ aus $\mathfrak{c}_{l+1}$ und für jedes Element r ausserhalb $\mathfrak{p}_{l+1}$ $c_{l+1} r \neq 0$ ist. Dabei sind auch $[\mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_{l+1}] = (0)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ und daraus folgen

$$\mathfrak{p}_{l+1} \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)\,, \quad \mathfrak{p}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_{l+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, l)\,.$$

Wäre $\mathfrak{c}_{l+1} \equiv 0\,(\mathfrak{c}_{12\ldots l})$, so würde $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l] \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{l+1})$ mit Widerspruch; also wird

$$\mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l+1} = (\mathfrak{c}_{l+l}, \mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l}) > \mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l} > \mathfrak{c}_{12\,\ldots\,l-1} > \ldots > \mathfrak{c}_1\,.$$

Nach dem Teilerkettensatz erhalten wir aber endlich

$$\mathfrak{c}_{12\ldots n} = \mathfrak{c}_{12\ldots n,\, n+1} = \ldots.$$

Damit wird $\mathfrak{c}_{n+1} \equiv 0\,(\mathfrak{c}_{12\ldots\ldots n})$; order wird $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n] \equiv 0(\mathfrak{p}_{n+1})$. Da $\mathfrak{p}_{n+1} \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$; $\mathfrak{p}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_{n+1})$ $(i = 1,\ 2, \ldots\ldots, n)$ aber sind, so ergibt sich ein Widerspruch; also ist die Annahme falsch, dass kein reguläres Element in $\mathfrak{R}$ existiert.

Hieraus folgt der Satz unmittelbar nach dem Satz.[1]

Wir werden noch einen anderen Beweis des folgenden allgemeinen Satzes hinzufügen.

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein vom Nullideal verschiedenes Ideal und ist* $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, *so gibt es in* $\mathfrak{a}$ *auch ein Einheitselement in bezug auf* $\mathfrak{a}$.[2]

Nach der Voraussetzung ist $\mathfrak{a}$ kein nilpotentes Ideal, somit gibt es in $\mathfrak{a}$ ein nichtnilpotentes Element. Sei a_1 damit ein nichtnilpotentes Element aus $\mathfrak{a}$, dann wird $\mathfrak{o}a_1$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{o}a_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}a_1$ ist, so gibt es in $\mathfrak{a}$ ein Element a_2, sodass für jedes n $a_2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{o}a_1)$; $a_2^n \not\equiv 0\,(\mathfrak{o}a_1)$ werden. Sonst würde $\mathfrak{a}^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{o}a_1)$ mit Widerspruch zu der Tatsache, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$; $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}a_1$; $\mathfrak{o}a_1 \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Daraus folgt $\mathfrak{a} \geqq (\mathfrak{o}a_1, \mathfrak{o}a_2) > (\mathfrak{o}a_1)$. Durch mehrmalige Anwendung dieses Schlusses erhalten wir nach dem Teilerkettensatz in $\mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= (\mathfrak{o}a_1,\ \mathfrak{o}a_2, \ldots, \mathfrak{o}a_n) = (\mathfrak{o}a_1^\lambda, \ldots, \mathfrak{o}a_n^\lambda) \\ &= (\mathfrak{o}a_1^{\lambda+1},\ \mathfrak{o}a_2^{\lambda+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{o}a_n^{\lambda+1}), \end{aligned}$$

für eine beliebige positive Zahl λ, weil $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ist. Da a_i die Elemente aus $\mathfrak{a}$ sind, so wird wegen $\mathfrak{o}a_i \equiv 0\,(\mathfrak{a})$

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}a_1^\lambda,\ \mathfrak{a}a_2^\lambda, \ldots\ldots, \mathfrak{a}a_n^\lambda).$$

Daraus folgen

$$\begin{aligned} a_1 &= b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + \ldots\ldots + b_{1n}a_n \\ a_2 &= b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + \ldots\ldots + b_{2n}a_n \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ a_n &= b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 + \ldots\ldots + b_{nn}a_n, \end{aligned}$$

worin b_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{a}$ sind. Durch Multiplikation mit a_i erhalten wir

(1) Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$ und existiert ein reguläres Element in $\mathfrak{R}$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ auch ein Einheitselement. Vgl. S. Mori, Ueber Primärideale.

(2) Den Satz können wir auch genau wie bei Satz 7 beweisen.

$$\begin{array}{l}
a_1(b_{11}a_i-a_i)+a_2b_{12}a_i+\dots+a_ib_{1i}a_i+\dots+a_nb_{1n}a_i=0\\
a_1b_{21}a_i+a_2(b_{22}a_i-a_i)+\dots+a_ib_{2i}a_i+\dots+a_nb_{2n}a_i=0\\
\dots\dots\\
a_1b_{i1}a_i+a_2b_{i2}a_i+\dots+a_i(b_{ii}a_i-a_i)+\dots+a_nb_{in}a_i=0\\
\dots\dots\\
a_1b_{n1}a_i+\dots\dots+a_ib_{ni}a_i+\dots+a_n(b_{nn}a_i-a_i)=0\,.
\end{array}$$

Durch Elimination ergibt sich damit

$$a_i\begin{vmatrix}
b_{11}a_i-a_i & b_{12}a_i\dots & b_{1i}a_i & \dots & b_{1n}a_i\\
b_{21}a_i & \dots & b_{2i}a_i & \dots & b_{2n}a_i\\
\dots\dots & \dots & & & \\
b_{i1}a_i & \dots & b_{ii}a_i-a_i & \dots & b_{in}a_i\\
\dots\dots & & & & \\
b_{n1}a_i & \dots & b_{ni}a_i & \dots & b_{nn}a_i-a_i
\end{vmatrix}=0\,,$$

also wird $a_i^{n+1}=ba_i^{n+1}$, wo b ein Element aus $\mathfrak{a}$ ist. Dazu ist das Element b noch unabhängig von der Auswahl von a_i in diesem Verfahren. Hiermit werden

$$a_i^{n+1}=ba_i^{n+1}(i=1,2,\dots,n)\,,\quad b\equiv 0\ (\mathfrak{a})\,,\quad b\neq 0\,,$$

oder $$a_i^{\lambda}=ba_i^{\lambda}\quad(i=1,2,\dots,n)\quad(\lambda\geqq n+1)\,.$$

Es sei nun a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$. Dann wird

$$a=b_1a_1^{\lambda}+b_2a_2^{\lambda}\dots+b_na_n^{\lambda}\,,$$

daraus folgt $ab=a$, für jedes Element a aus $\mathfrak{a}$. Da b auch ein Element aus $\mathfrak{a}$ ist, so wird natüriich

$$b^2=b\,.$$

Hiermit existiert ein Einheitselement b in bezug auf $\mathfrak{a}$.

Zusatz 1. *Ist* $\mathfrak{o}^n=\mathfrak{o}^{n+1}$ $(\neq\mathfrak{o})$ *für eine Zahl* $n(>1)$, *so wird*

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^n+\mathfrak{n}\,,$$

wobei $\mathfrak{n}$ *ein nilpotentes Ideal ist.*

Aus der Vorsaussetzung folgt $\mathfrak{o}^n = \mathfrak{o}^{2n}$; damit enthält $\mathfrak{o}^n$ wegen des Satzes ein Einheitslement e in bezug auf $\mathfrak{o}^n$. Für ein durch $\mathfrak{o}^n$ unteilbares Element r ergibt sich

$$(er-r)e = 0\,,\ er-r \not\equiv 0\ (\mathfrak{o}^n)\,,\ er \equiv 0\ (\mathfrak{o}^n)\,.$$

Setzen wir $\mathfrak{n} = (0):(e)$, so ist $\mathfrak{n}$ damit vom Nullideal verschieden und $[\mathfrak{o}^n, \mathfrak{n}] = (0)$. Weiter folgt aus $(er-r)e = 0$

$$er-r \equiv 0\ (\mathfrak{n})\,,$$

also ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^n + \mathfrak{n}$.

Zusatz 2. *Ist ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{o}$ *verschieden und ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, *so ist* $\mathfrak{a}$ *kein echter Teiler eines Primideals von* $\mathfrak{R}$.

Für Einheitselement e in Bezug auf $\mathfrak{a}$ und ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element r ist

$$(er-r)e = 0\,,\quad er-r \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})\,.$$

Damit kann $\mathfrak{a}$ kein echter Teiler eines Primideals sein.

Zusatz 3. *Ist* $\mathfrak{b}$ *ein echter Teiler eines Ideals* $\mathfrak{a}$, *und ist*

$$(\mathfrak{b}^n\,,\ \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}\,,\ \mathfrak{a}) = \ldots\ldots \neq \mathfrak{a}\,,$$

so existiert ein Element e *in* $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a})$, *derart, dass für alle Elemente* b *aus* $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a})$

$$be \equiv b\ (\mathfrak{a})\,.$$

Es seien nämlich $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'_n$, $\mathfrak{b}'_{n+1}, \ldots\ldots$ die Ideale aus dem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, die $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}), \ldots\ldots$ entsprechen. Dann werden im Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{b}'^i \equiv 0\ (\mathfrak{b}'_i)\quad (i = n, n+1, \ldots\ldots)$$

und umgekehrt werden auch

$$\mathfrak{b}'_i \equiv 0\ (\mathfrak{b}'^i)$$

Daraus folgen $\mathfrak{b}'_n = \mathfrak{b}'^n$, $\mathfrak{b}'_{n+1} = \mathfrak{b}'^{n+1}, \ldots\ldots$

$$\mathfrak{b}'^n = \mathfrak{b}'^{n+1} = \ldots\ldots$$

Nach dem Satz enthält $\mathfrak{b}'_n$ ein Einheitselement e inbezug auf $\mathfrak{b}'_n$ und damit wird

$$be \equiv b \ (\mathfrak{a})$$

für jedes Element b aus $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a})$.

Satz 9. *Gibt es im Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement kein von $\mathfrak{o}$ und vom Nullideal verschiedenes Primideal, so ist $\mathfrak{R}$ zugleich ein Körper.*

Es sei nun $a(\neq 0)$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$. Wenn $\mathfrak{o}a = \mathfrak{o}$ ist, so gibt es stets ein Element x, sodass $ax = b$ für jedes Element b. Hiermit nehmen wir an, dass $\mathfrak{o}a \neq \mathfrak{o}$ ist. Nach der Annahme ist $\mathfrak{o}a$ nicht prim; damit gibt es zwei Elemente r_1, r_2, sodass $r_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{o}a)$ $(i = 1, 2)$; $r_1 r_2 \equiv 0\,(\mathfrak{o}a)$.

Da es kein Primideal gibt, so existiert nach Hilfsstaz 4 ein Element r derart, dass

$$\mathfrak{o}r \equiv 0 \ (\mathfrak{o}a)\,; \quad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{o}a)\,.$$

Der Idealquotient $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{o}a : \mathfrak{o}$ ist mithin ein echter Teiler von $\mathfrak{o}a$. Durch endlich oftmalige Wiederholung erhalten wir

$$\mathfrak{o}a < \mathfrak{c}_2 < \mathfrak{c}_3 < \ldots . \quad < \mathfrak{c}_n = \mathfrak{o}\,.$$

Anderseits werden $\mathfrak{c}_{i+1}^2 \equiv 0\,(\mathfrak{c}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, da $\mathfrak{o}\mathfrak{c}_{i+1} \equiv 0\,(\mathfrak{c}_i)$ sind. Daraus folgt $\mathfrak{o}^\lambda \equiv 0\,(\mathfrak{o}a)$ für eine endliche Zahl λ. Aber aus der Existentz vom Einheitselement ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^\lambda$; nämlich ist die Annahme falsch, dass $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}a$ ist. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 10. *Jeder Ring $\mathfrak{R}$ wird direkte Summe der endlich vielen Ideale, die kein echter Teiler eines vom Nullideal verschiedenen idempotenten Ideals sind. Fassen wir die nicht-idempotenten Ideale in der Zerlegung in einem Ideal zusammen, so ist die Darstellung von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe eindeutig bestimmt.*

Der erste Teil der Behauptung folgt sofort aus Satz 8 genau wie bei Zusatz 1 unter Satz 8.

Seien jetzt

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m}_1 + \ldots . + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n} = \mathfrak{m}'_1 + \ldots . + \mathfrak{m}'_{n'} + \mathfrak{n}'$$

Zwei Darstellungen von $\mathfrak{o}$ als direkte Summe, worin $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}'_i$ idempotente Ideale und $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}'$ nicht-idempotente Ideale sind, die sämtlich kein echter Teiler eines vom Nullideal verschiedenen idempotenten Ideals sind. Durch Multiplikation von $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m}_i$ haben wir

$$\mathfrak{o}\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}'_1\mathfrak{m}_i + \ldots\ldots + \mathfrak{m}'_{n'}\mathfrak{m}_i + \mathfrak{n}'\mathfrak{m}_i .$$

Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{m}_i$ soll damit

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}'_j\mathfrak{m}_i , \quad \text{oder} \quad \mathfrak{m}_i = \mathfrak{n}'\mathfrak{m}_i$$

sein. Da $\mathfrak{m}_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{n}')$ ist, so wird $[\mathfrak{m}_i , \mathfrak{n}'] \neq \mathfrak{m}_i$, also wird $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_i\mathfrak{n}'$. Hiermit ist der zweite Fall unmöglich. Multiplizieren wir wieder $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m}'_j$, so wird

$$\mathfrak{o}\mathfrak{m}'_j = \mathfrak{m}'_j = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'_j + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_i\mathfrak{m}'_j + \ldots\ldots + \mathfrak{n}\mathfrak{m}'_j ,$$

folglich wird

$$\mathfrak{m}'_j = \mathfrak{m}_i\mathfrak{m}'_j = \mathfrak{m}_i .$$

Durch Wiederholung des Verfahrens erhalten wir endlich

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}'_i \ (i = 1, 2, \ldots\ldots , n) , \ n = n' .$$

Da jedes Ideal aus $\mathfrak{m}_i$ ein Einheitselement in bezug auf selbst enthält, so ist jedes Element aus $\mathfrak{n}$ durch $\mathfrak{n}'$ teilbar und umgekehrt. Hiermit ist der zweite Teil des Satzes auch bewiesen.

Zusatz 1. *Im Ring* $\mathfrak{R}$ *sei die Existenz des Einheitselementes vorausgesetzt. Das Nullideal ist dann und nur dann kleinstes gemeinsames Vielfaches der paarweise teilerfremden Ideale, wenn in* $\mathfrak{R}$ *ein von* $\mathfrak{o}$ *und von* (o) *verschiedenes idempotentes Ideal existiert.*[1]

Zusatz 2. *Im Ring* $\mathfrak{R}$ *existiert ein Einheitselement, wenn in* $\mathfrak{R}$ *wenigstens zwei verschiedene idempotente Primideale (einschl.* $\mathfrak{o}$ *und primes Nullideal) existieren.*

§ 5. Bedingung, dass die kürzeste Darstellung eines Ideals durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt sei.

Satz 11. *Sind* $\mathfrak{p}_1 , \mathfrak{p}_2 , \ldots\ldots , \mathfrak{p}_n$ *die zugehörigen Primideale eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *und ist die kürzste Darstellung* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1 , \mathfrak{q}_2 , \ldots\ldots , \mathfrak{q}_n]$ *durch*

(1) Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie, § 4.

grösste Primärideale eindeutig bestimmt, so wird entweder $\mathfrak{q}_i=(\mathfrak{a},\ \mathfrak{p}_i^{n_i})=(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{n_i+1})=\ldots.$, *oder es gibt ein Element* r_i, *sodass* $r_i\mathfrak{q}_i\equiv 0\,(\mathfrak{a})$; $r_i\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ *sind.*

Gäbe es ein Primärideal $\mathfrak{q}_i'$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}_i$, so würden wegen des Fundamentalsatzes 5

$$\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1\,,\ldots,\ \mathfrak{q}_i\,,\ldots,\ \mathfrak{q}_n]=[\mathfrak{q}_1\,,\ldots,\ \mathfrak{q}_i'\,,\ldots,\ \mathfrak{q}_n]$$

zwei verschiedene kürzeste Darstellungen durch grösste Primärideale im Widerspruch zu der Voraussetzung. Hiermit gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}_i$. Es seien nun $f_1, f_2, \ldots., f_s$ eine Idealbasis des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{q}_i$. Es sei auch die Beziehung

$$\mathfrak{q}_i=(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{n_i})=(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{n_i+1})=\ldots.$$

nicht erfüllt. Dann wird $\mathfrak{q}_i>(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{m})$ für jede endliche Zahl $m(\geqq\lambda)$, worin λ eine endliche Zahl ist. Da es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}_i$, so erhalten wir wegen des Zusatzes unter Satz 5

$$(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{m'})=[\mathfrak{q}_i,\ \mathfrak{q}_1',\ \ldots.,\ \mathfrak{q}_{n'}'],$$

wobei m' eine beliebige Zahl $(>\lambda s)$ und $n'\geqq 1$ ist, Also gibt es ein Element r, sodass

$$r\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\,,\quad r\mathfrak{q}_i\equiv 0\ ((\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{m'}))\quad m'>\lambda s\,.$$

Da $\quad \mathfrak{p}_i^{m'}=((f_1^{m'}),\,(f_2^{m'}),\,\ldots.,\,(f_s^{m'}),\,(f_1^{m'-1}f_2),\,\ldots.)$;
$r\mathfrak{q}_i\equiv 0\ ((\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{m'}))$; $\mathfrak{q}_i>(\mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{p}_i^{\lambda})$ sind,

so werden

$$rf_1^{\lambda}\equiv a_{11}f_1^{\lambda}+a_{12}f_2^{\lambda}+\ \ldots.\ +a_{1s}f_s^{\lambda}\quad(\mathfrak{a})$$
$$rf_2^{\lambda}\equiv a_{21}f_1^{\lambda}+a_{22}f_2^{\lambda}+\ \ldots.\ +a_{2s}f_s^{\lambda}\quad(\mathfrak{a})$$
$$\ldots..$$
$$\ldots..$$
$$rf_s^{\lambda}\equiv a_{s1}f_1^{\lambda}+a_{s2}f_2^{\lambda}+\ \ldots.\ +a_{ss}f_s^{\lambda}\quad(\mathfrak{a})\,.$$

Folglich werden auch

$$\begin{array}{l} (a_{11}-r)f_1^\lambda + a_{12}f_2^\lambda + \dots + a_{1s}f_s^\lambda \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}) \\ a_{21}f_1^\lambda + (a_{22}-r)f_2^\lambda + \dots + a_{2s}f_s^\lambda \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}) \\ \dots \\ \dots \\ a_{s1}f_1^\lambda + a_{s2}f_2^\lambda + \dots + (a_{ss}-r)f_s^\lambda \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}), \end{array}$$

wobei a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}_i$ sind.

Setzen wir

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}-r, & a_{12}, & \dots, & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}-r, & \dots, & a_{2s} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{s1}, & a_{s2}, & \dots, & a_{ss}-r \end{vmatrix},$$

so wird Δ_i offenbar auch ein Element aus $\mathfrak{R}$ und dazu erhalten wir noch

$$f_j^\lambda \Delta_i \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}) \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Da für jedes μ $r^\mu \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ ist, so wird $\Delta_i^\mu \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$. Jedes Element p aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m'})$ lässt sich in der Form

$$p \equiv a_1 f_1^\lambda + a_2 f_2^\lambda + \dots + a_s f_s^\lambda \;\; (\mathfrak{a})$$

darstellen, woraus folgt

$$\Delta_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m'}) \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}).$$

Andererseits ist auch

$$\Delta_i^\mu \mathfrak{q}_i \equiv 0 \;\; ((\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m'})) ; \;\; \Delta^\mu \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{p}_i)$$

für eine hinreichend grosse Zahl μ. Setzen wir jetzt

$$r_i = \Delta_i^{\mu+1},$$

so ergibt sich

$$r_i\mathfrak{q}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad r_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i);$$

also ist unsere Behauptung bewiesen.

Zusatz. *Es seien* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *die zugehörigen Primideale eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *und sei auch die kürzeste Darstellung* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ *durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt. Wenn* $\mathfrak{q}_i$ *kein minimales Primärideal von* $\mathfrak{a}$ *ist, so wird*

$$\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i+1}) = \ldots.$$

für eine Zahl n_i *und das zugehörige Primideal* $\mathfrak{p}_i$ *ist gleich dem Einheitsideal* $\mathfrak{o}$.

Gäbe es ein Element r_i von der Art, dass

$$r_i\mathfrak{q}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad r_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i),$$

so würde etwa $r_i\mathfrak{q}_i \equiv 0 \, (\mathfrak{q}_1)$ im Widerspruch gegen die Primärität von $\mathfrak{q}_1$, wobei $\mathfrak{q}_1$ ein minimales Primärideal von $\mathfrak{a}$ bedeutet. Denn $\mathfrak{p}_i$ ist nach dem Zusatz (Satz 4) ein echter Teiler eines höchsten Primideals $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_i \not\equiv 0 \, (\mathfrak{p}_1)$ ist.

Nach Satz 11 ist damit

$$\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{n_i+1}) = \ldots.$$

Nach Zusatz 3 unter Satz 8 gibt es ein Element e, derart, dass für alle Element q_i aus $\mathfrak{q}_i$ $q_i e \equiv q_i \, (\mathfrak{a})$ sind und $e \equiv 0 \, (\mathfrak{q}_i)$ ist. Wäre $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{p}_i$, so würden

$$(re-r)e \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad re-r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i),$$

worin r ein Element ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$ ist. Da e nich durch $\mathfrak{q}_1$ teilbar ist, so ist ein Widerspruch zu der Eigenschaft des Primärideals $\mathfrak{q}_1$ nachgewiesen. Damit soll $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{o}$ sein.

Daraus folgt unmittelbar der

Satz 12. *Die kürzeste Darstellung eines Idea's* $\mathfrak{a}$ *durch grösste Primärideale ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn die zugehörigen Primideale von* $\mathfrak{a}$ *die höchsten Primideale von* $\mathfrak{a}$ *oder das Einheitsideal* $\mathfrak{o}$ *sind, und wenn im zweiten Falle für eine endliche Zahl* m $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{m+1}) = \ldots$ *ist.*

Seien nun die Bedingungen vorausgesetzt und seien

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n] = [\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_n]$$

zwei kürzeste Darstellungen durch grösste Primärideale. Die minimalen Primärkomponenten stimmen überein. Damit genügt es zu zeigen, dass die zu $\mathfrak{o}$ gehörigen Primärkomponenten $\mathfrak{q}_n$, $\mathfrak{q}'_n$ gleich sind. Aus der Eigenschaft von Primärideal folgen

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_n), \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) \equiv 0 \ (\mathfrak{q}'_n).$$

Andererseits gibt es nach Zusatz 3 unter Satz 8 ein Element e, derart, dass für jedes Element r' aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$ $er' \equiv r' \ (\mathfrak{a})$ und $e \equiv 0$ $((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m))$ ist. Wäre $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) \neq \mathfrak{q}_n$, so folgte daraus

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)\, q'_n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \ q'_n \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_n), \ eq'_n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \ q'_n \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$$

für ein Element $q'_n = q_n - eq_n$, wo q_n ein Element aus $\mathfrak{q}_n$ ausserhalb von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$. Da es kein Primideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$ gibt, und $q'^m_n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$ ist, so gäbe es wegen des Hilfssatzes 4 ein Element q''_n derart, dass

$$\mathfrak{o} q''_n \equiv 0 \ ((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)), \quad q''_n \not\equiv 0 \ ((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)),$$

und q'_n ein Teiler von q''_n ist. Nämlich würden

$$q''_n \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_n), \quad q''_n \not\equiv 0 \ ((\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)), \quad eq''_n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Daraus folgte

$$\mathfrak{o} q''_n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}),$$

da für jedes Element r' aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m)$ $er' \equiv r' \ (\mathfrak{a})$ ist. Also würde q''_n durch alle Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$ teilbar mit Widerspruch. Hiermit soll $(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) = \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_n$ sein.

§ 6. Ringe, in welchen die kürzeste Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt ist.

Satz 13. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal und* $\mathfrak{b}$ *ein beliebiges Ideal, derart, dass* $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$ *sind. In* $\mathfrak{R}$ *gibt es alsdann ein Ideal, sodass* $\mathfrak{p}$ *und ein echter Teiler von* $\mathfrak{p}$ *seine zugehörigen Primideale sind.*

Nach der Voraussetzung ergibt sich offenbar

$$\mathfrak{p} = ((f_1),\ (f_2),\ \ldots\ldots,\ (f_n),\ \mathfrak{p}^2).$$

Wir setzen nun damit

$$\mathfrak{a} = ((f_1),\ (f_2)\ \ldots\ldots,\ (f_{n-1}),\ \mathfrak{p}^2),\quad \mathfrak{a} \neq \mathfrak{p}.$$

Wir nehmen auch an, dass es zwisschen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{a}$) kein im Satz ausgesprochenes Ideal gibt. Dann soll jedes Produkt von f_n mit einem durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Element stets durch $\mathfrak{a}$ unteilbar sein. Sonst würde nach Satz 6 ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ und dazu ist $\mathfrak{p}$ auch noch ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a}$; damit ist ein Widerspruch nachgewiesen.

Setzen wir wieder

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}f_n),$$

dann muss $f_n \equiv 0\ (\mathfrak{a}')$ sein. Sonst hätte $\mathfrak{a}'$ die im Satz ausgesprocchene Eigenschaft. Damit wird

$$\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}f_n) = \mathfrak{p}.$$

Es gibt nämlich ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element b in $\mathfrak{b}$ derart, dass

$$f_n \equiv bf_n\ \ (\mathfrak{a}),$$

da $\mathfrak{p}f_n \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist. Daraus folgt auch

$$f_n(b-b^2) \equiv 0\ \ (\mathfrak{a}),$$

worin $b-b^2 \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ sein muss. Wir unterscheiden nun hier zwei Fälle:

$$\text{I.}\quad b-b^2 \equiv 0\ \ (\mathfrak{a}).\qquad \text{II.}\quad b-b^2 \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{a}),$$

Im zweiten Falle wird $b-b^2 \equiv b'f_n\,(\mathfrak{a})$, wo b' ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{b}$ ist. Daraus folgt wegen $f_n \equiv bf_n\,(\mathfrak{a})$

$$(b-b^2) \equiv b(b-b^2)\ \ (\mathfrak{a}).$$

Setzen wir nun $e = 2b-b^2$, so werden

$$e \equiv e^2\ \ (\mathfrak{a});\quad ef_n \equiv f_n\ \ (\mathfrak{a});\quad e \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{p}).$$

In beiden Fällen gibt es damit ein Element e derart, dass

$$e \equiv e^2 \ (\mathfrak{a}) ; \quad ef_n \equiv f_n \ (\mathfrak{a}) ; \quad e \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}) ; \quad e \equiv 0 \ (\mathfrak{b}) .$$

Es ist aber klar, dass die Gesamtheit $\mathfrak{g}$ aller Elemente g von der Eigenschaft, dass

$$ge \equiv g \ (\mathfrak{a}) ,$$

ein Ideal bildet. Da e auch durch $\mathfrak{g}$ teilbar ist, so ist $\mathfrak{g}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$. Ist r ein durch $\mathfrak{b}$ unteilbares Element, so werden

$$(er-r)e \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) ; \quad er-r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{b}) ; \quad er-r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}) .$$

Die Gesamtheit $\mathfrak{h}$ der Elemente r von der Art, dass $er \equiv 0 \, (\mathfrak{a})$ ist, bildet auch ein Ideal und $\mathfrak{h}$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$. Ferner ist

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{h} , \ \mathfrak{g}] .$$

Also wird $\mathfrak{h}\mathfrak{g} \equiv 0 \, (\mathfrak{p})$; damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Eigenschaft des Primideals $\mathfrak{p}$, da $\mathfrak{g}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist und $er-r \equiv 0 \, (\mathfrak{h})$; $er-r \not\equiv 0 \, (\mathfrak{p})$ sind. Unsere Annahme ist hiermit falsch, nämlich gibt es zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{a}$) ein im Satz ausgesprochenes Ideal.

Hilfssatz 5. *Es sei die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, derart, dass $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$ ist und $\mathfrak{p}^2$ kein Primärideal ist, so wird*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p} ,$$

worin $\mathfrak{m}$ ein vom Nullideal verschiedenes idempotentes Ideal ist.

Wegen des Satzes 12 folgt aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{o}$ das zugehörige Primideal von $\mathfrak{p}^2$ ist und dass

$$\mathfrak{q}' = (\mathfrak{p}^2 , \ \mathfrak{o}^m) = (\mathfrak{p}^2 , \ \mathfrak{o}^{m+1}) = \ldots .$$

Damit existiert ein Element e derart, dass $e \equiv 0 \, (\mathfrak{q}')$, $e \equiv e^2 \not\equiv 0 \, (\mathfrak{p}^2)$, $eq' \equiv q' \, (\mathfrak{p}^2)$ für jedes Element q' aus $\mathfrak{q}'$. Da aus der Voraussetzung $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{o}$ folgt, so wird für ein durch $\mathfrak{q}'$ unteilbares Element r

$$(er-r)e \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2) , \quad er-r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}') .$$

Also bildet die Gesamtheit $\mathfrak{h}$ aller Elemente h von der Eigenschaft, dass

$$eh \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2),$$

einen echten Teiler von $\mathfrak{p}^2$. Ferner werden

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{q}', \mathfrak{h}); \ \mathfrak{p}^2 = [\mathfrak{q}', \mathfrak{h}].$$

Da $e \not\equiv 0 \, (\mathfrak{p})$ ist, so muss $\mathfrak{h} \equiv 0 \, (\mathfrak{p})$ sein.

Wäre $\mathfrak{h} < \mathfrak{p}$, so gäbe es nach Satz 13 ein nicht-primäres Ideal $\mathfrak{a}'$, so dass

$$\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a}' < \mathfrak{p}.$$

Weiter hätten wir hiermit

$$\mathfrak{q}'' = (\mathfrak{a}', \mathfrak{o}^{m'}) = (\mathfrak{a}', \mathfrak{o}^{m'+1}) = \dots ,$$

und für ein Element t würden

$$\mathfrak{o}t \equiv 0 \ (\mathfrak{a}'), \quad t \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}') \quad t \equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Daraus folgten $et = t + h \equiv 0 \, (\mathfrak{a}')$, $t \equiv 0 \, (\mathfrak{a}')$ mit Widerspruch, worin h ein Element aus $\mathfrak{h}$ ist. Hiermit müssen

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{p}; \quad e\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2)$$

sein.

Es sei nun $\mathfrak{p} = ((f_1), (f_2), \dots, (f_n))$. Dann werden

$$\begin{aligned} ef_1 &= a_{11}f_1 + \dots + a_{1n}f_n \\ ef_2 &= a_{21}f_1 + \dots + a_{2n}f_n \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ ef_n &= a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n , \end{aligned}$$

wobei a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}$ sind. Setzen wir nun

$$d = \begin{vmatrix} a_{11}-e, & a_{12} & , \dots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22}-e, & \dots, & a_{2n} \\ \dots\dots & & & \\ a_{n1} & , \dots\dots\dots, & & a_{nn}-e \end{vmatrix},$$

so werden $df_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $d^\lambda \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ für jedes λ. Folglich wird auch

$$d\mathfrak{p} = (0).$$

Daraus ergibt sich

$$[\mathfrak{o}d^2, \mathfrak{p}] = (0).$$

Denn wenn $rd^2 = p$ ist, so wird $r \equiv 0\,(\mathfrak{p})$ und daraus folgt $rd^2 = p = 0$. Für ein beliebiges Element r aus $\mathfrak{R}$ werden

$$r \equiv er\ (\mathfrak{p});\quad er \equiv 0\ ((\mathfrak{o}d^2, \mathfrak{p})),$$

da $e \equiv d^2\,(\mathfrak{p})$; $\mathfrak{o} = (\mathfrak{q}', \mathfrak{p})$ sind. Hiermit erhalten wir

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}d^2 + \mathfrak{p}.$$

Aus $d^3 \equiv d\,(\mathfrak{p})$ folgt auch

$$d^4 = d^2 (\neq 0).$$

Daraus folgt offenbar $(\mathfrak{o}d^2)^2 = \mathfrak{o}d^2$; also ist die Behauptung bewiesen.

Hilfssatz 6. *Es sei die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus* $\mathfrak{R}$ *durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt. Ist* $\mathfrak{p}$ *ein von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenes Primideal, sodass* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ *ist, und ist* $\mathfrak{p}^2$ *ein Primärideal, so besitzt* $\mathfrak{p}$ *keinen von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen echten Teiler.*

Wenn $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$ wäre, so gäbe es ein nicht-primäres Ideal $\mathfrak{a}$, sodass

$$\mathfrak{p}^2 < \mathfrak{a} < \mathfrak{p}.$$

Ferner würden wegen des Beweises von Hilfssatz 5

$$\mathfrak{q}' = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^m) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{m+1}) = \ldots;$$

$$e^2 \equiv e(\mathfrak{a}),\ e \not\equiv 0\ (\mathfrak{p});\ \mathfrak{o} = (\mathfrak{q}', \mathfrak{h},),\ \mathfrak{a} = [\mathfrak{q}', \mathfrak{h}];\ \mathfrak{h} = \mathfrak{p}.$$

Setzen wir nun $\mathfrak{p} = ((f_1); (f_2), \ldots, (f_n))$, so würden

$$e^2 - e \equiv 0\ (\mathfrak{a});\ (ef_i - f_i)e \equiv 0\ (\mathfrak{p}^2),\ ef_i - f_i \equiv 0\ (\mathfrak{p})\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Da $\mathfrak{p}^2$ Primärideal ist, so wären

$$ef_i - f_i \equiv 0\ (\mathfrak{p}^2).$$

Also würden $f_i \equiv ef_i\,(\mathfrak{a})$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ im Widerspruch mit der Beziehung $e\mathfrak{h} = e\mathfrak{p} \equiv 0\,(\mathfrak{a})$. Hiermit besitzt $\mathfrak{p}$ keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler.

Aus den eben bewiesenen Hilfssätzen ergibt sich zunächst

Satz 14. *Ist die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus einem direkt unzerlegbaren Ring $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt, so besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler.*

Denn es gibt in $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes idempotentes Ideal ausser Nullideal, weil $\mathfrak{R}$ ein direkt unzerlegbarer Ring ist. Wenn $\mathfrak{p}$ ein vom Nullideal und von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal ist, so soll $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ sein. Wären $\mathfrak{p}^2$ ein nicht-primäres Ideal und $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$, so würde nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar im Widerspruch. Damit unterscheiden wir zwei Fälle: (I). $\mathfrak{p}^2$ ist ein Primärideal und $\mathfrak{p} < \mathfrak{b} < \mathfrak{o}$ (II). Es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$. Nach Hilfssatz 6 ist aber der erste Fall unmöglich; also ist der Satz bewiesen.

Fügen wir noch hier einen Satz für Vielfachenkettensatz hinzu.

Satz 15, *Besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal aus $\mathfrak{R}$ keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler, und gibt es in jedem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ nach einem beliebigen Ideal $\mathfrak{b}$ keinen Totalnullteiler ausser Null, so gilt in $\mathfrak{R}$ der Vielfachenkettensatz modulo $\mathfrak{a}$. Dabei soll $\mathfrak{a} \neq (0)$ sein, wenn in $\mathfrak{R}$ das Nullideal prim ist.*

Wenn $\mathfrak{a}$ nicht prim ist, so gibt es in $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ stets einen Nullteiler a_1. Nach Hilfssatz 4 können wir damit ein Element a_2 finden, sodass

$$\mathfrak{p}(a_1a_2) \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}), \quad a_1a_2 \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{a}),$$

worin $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenes Primideal ist. Weil in $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ kein Totalnullteiler existiert. Setzen wir jetzt $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{o}a_1a_2, \mathfrak{a})$, so wird $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}$ verschieden und es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$; da $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper und $\mathfrak{p}(a_1a_2) \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ist. Da das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen muss, so erhalten wir daraus eine Hauptkompositionsreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \ldots\ldots < \mathfrak{a}_n < \mathfrak{p}' < \mathfrak{o}\,.$$

Sei nun

$$\mathfrak{b}_1 > \mathfrak{b}_2 > \ldots\ldots > \mathfrak{b}_n > \ldots\ldots > \mathfrak{b}_\lambda > \ldots\ldots > \mathfrak{a}$$

eine Kette von Idealen, bei der jedes Ideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist und alle Ideale Teiler von $\mathfrak{a}$ sind. Es sei auch $\lambda > n+2$. Da in $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ Nullteiler existiert, so können wir einen Nullteiler in $\mathfrak{b}_\lambda/\mathfrak{a}$ finden. Durch das vorige Verfahren können wir ein Ideal $\mathfrak{b}_{\lambda 1}$ finden, sodass $\mathfrak{b}_\lambda \geqq \mathfrak{b}_{\lambda 1} > \mathfrak{a}$ und kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_{\lambda 1}$ existiert. Nach endlich oftmaliger Wiederholung des Verfahrens erhalten wir auch eine neue Hauptkompositionsreihe

$$(2) \qquad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}_{\lambda 1} \leqq \mathfrak{b}_{\lambda 2} \leqq \ldots . \leqq \mathfrak{b}_\lambda < \mathfrak{b}_{\lambda-11} \leqq \mathfrak{b}_{\lambda-12} \leqq \ldots .$$
$$\leqq \mathfrak{b}_{\lambda-1} < \mathfrak{b}_{\lambda-21} \leqq \ldots . \leqq \mathfrak{b}_2 < \mathfrak{b}_{11} \leqq \ldots . \leqq \mathfrak{b}_1 < \ldots . \leqq \mathfrak{o}$$

Dabei ist die Länge von (2) grösser als die von (1). Damit ist ein Widerspruch gegen den Sonoschen Satz[1] bewiesen. Also ist in $\mathfrak{R}$ der Vielfachenkettensatz modulo $\mathfrak{a}$ erfüllt.

Satz 16. *Wenn jedes vom Nullideal verschiedene Primideal aus $\mathfrak{R}$ keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler besitzt, so ist die kürzeste Darstellung jedes Ideals durch grösste Primärideale stets eindeutig bestimmt.*

Wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist, so ist die kürzeste Darstellung offenbar eindeutig bestimmt. Im anderen Falle besitzt der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ einen Nullteiler. Wir nehmen im folgenden damit an, dass $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler besitzt.

Besitzt $\mathfrak{R}$ kein vom Einheitsideal $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal, so ist jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ ein Primärideal und nach dem Teilerkettensatz wird $\mathfrak{o}^\lambda = (0)$ für eine endliche Zahl λ.[2]

Damit können wir uns auf den Fall beschränken, in dem ein von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenes Primideal existiert. Ist a ein Nullteiler, so gibt es nach Hilfssatz 4 ein Element a', derart, dass $\mathfrak{p} = (0) : (aa')$ ist, wo $\mathfrak{p}$ ein vom Nullideal verschiedenes Primideal ist. Wäre stets $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$, so hätte $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal mit Widerspruch.[3] Damit gibt es in $\mathfrak{R}$ ein Element a_1, sodass

$$\mathfrak{p}_1 = (0) : (a_1), \quad \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{p}_1 \neq (0).$$

(1) M. Sono. On Congruences, Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University (1917).

(2) Vgl. den Beweis des Satzes 9. Wir sollen dabei nur die Gesamtheit aller Totalnullteiler betrachten.

(3) Vgl. Satz 6.

Setzen wir $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}\alpha_1$, so wird $\mathfrak{a}_1$ ein echter Teiler von (0) und es gibt kein Ideal zwischen (0) und $\mathfrak{a}_1$. Wenn $\mathfrak{a}_1$ ein Primideal ist, so erhalten wir eine Hauptkompositionsreihe $(0) < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{o}$. Im anderen Falle ist entweder $\mathfrak{a}_1$ ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal, oder wir können durch voriges Verfahren einen echten Teiler $\mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{a}_1$ finden, sodass kein Ideal zwischen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ existiert. Nach dem Teilerkettensatz soll das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen und folglich erhalten wir eine Hauptkompositionsreihe

$$(0) < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \ldots\ldots < \mathfrak{a}_i < \ldots\ldots < \mathfrak{a}_n,$$

worin für eine endlichc Zahl λ $\mathfrak{o}^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{a}_n)$ ist.

Es ist hier nur zu zeigen, dass für eine Zahl m $\mathfrak{o}^m = \mathfrak{o}^{m+1}$ wird. Dazu beweisen wir durch volle Induktion, dass jede durch einem durch $\mathfrak{a}_n$ teilbare Ideal $\mathfrak{a}$ laufende Vielfachenkette der Ideale aus $\mathfrak{R}$ im Endlichen abbricht. Wenn $\mathfrak{a}$ ein durch $\mathfrak{a}_1$ teilbares Ideal ist, so besitzt offenbar die Eigenschaft. Damit nehmen wir an, dass jedes durch $\mathfrak{a}_i$ teilbare Ideal die Bedingung erfüllt. Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein durch $\mathfrak{a}_{i+1}$ teilbares Ideal und sei $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'_1 > \mathfrak{a}'_2 > \ldots\ldots$ eine Vielfachenkette. Wenn ein Ideal, etwa $\mathfrak{a}'_i$, durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar ist, so bricht die Kette nach der Annahme in Endlichen ab. Im anderen Fallen setzen wir

$$\mathfrak{d}'_0 = [\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_i],\quad \mathfrak{d}'_1 = [\mathfrak{a}'_1,\ \mathfrak{a}_i],\quad \mathfrak{d}'_2 = [\mathfrak{a}'_2,\ \mathfrak{a}_i],\ \ldots\ldots$$

Dann ergibt sich eine Vielfachenkette

$$\mathfrak{d}'_0 \geqq \mathfrak{d}'_1 \geqq \mathfrak{d}'_2 \geqq \ldots\ldots$$

Da alle Ideale der Kette aber durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar sind, so erhalten wir wegen der Annahme

$$\mathfrak{d}'_j = \mathfrak{d}'_{j+1}.$$

Daraus folgen

$$\mathfrak{a}'_j = \mathfrak{a}'_{j+1}.$$

Denn alle $\mathfrak{a}'_i$ sind nicht durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar; woraus folgen

$$\mathfrak{a}_{i+1} = (\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}'_j) = (\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}'_{j+1})$$

und folglich werden

$$a'_j = a_i + a'_{j+1}\,, \quad a_i = a'_j - a'_{j+1} = d'_j\,, \quad a'_j \equiv 0 \ (\mathfrak{a}'_{j+1})\,,$$

wo a_i ein Element aus $\mathfrak{a}_i$ und a'_j, a'_{j+1}, d'_j die Elememte aus $\mathfrak{a}'_j$, $\mathfrak{b}'_{j+1}$, $\mathfrak{b}'_j$ sind.

Da $\mathfrak{o}^\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{a}_n)$ ist, so muss hiermit für eine endliche Zahl m

$$\mathfrak{o}^m = \mathfrak{o}^{m+1}$$

sein, und folglich ist nach Satz 12 die kürzeste Darstellung des Nullideals durch grösste Primärideale eindeutig bestimmt. Also ist der Satz nachgewiesen.

Zusatz 1. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein direkt unzerlegbarer nichtnilpotenter Ring. Besitzt jedes vom Nullideal verschiedenes Primideal aus $\mathfrak{R}$ keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler und ist das Nullideal nicht prim, so besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einheitselement.*

Nach dem Beweis des Satzes 16 wird $\mathfrak{o}^m = \mathfrak{o}^{m+1} \neq (0)$ für eine Zahl m. Wenn $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}^m$ wäre, so würde $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar im Widerspruch gegen die Voraussetzung. Also wird $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^m$ und folglich besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einheitselement.

Aus Sätzen 14,16 folgt unmittelbar der

Zusatz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein direkt unzerlegbarer Ring. Dann ist die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler besitzt.*

Zum Schluss beweisen wir als das Ziel dieser Arbeit

Hauptsatz. *Die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus einem Ring $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale ist dann und nur dann stets eindeutig bestimmt, wenn*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ \dots\ + \mathfrak{R}_n$$

ist, worin die Ideale $\mathfrak{R}_i$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

(1) *In jedem Ring $\mathfrak{R}_i$ besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen von $\mathfrak{o}_i$ verschiedenen echten Teiler.*[1]

(2) *Kein, oder nur ein Ring aus $\mathfrak{R}_i$ ist nilpotent und jeder nichtnilpotente Ring ist direkt unzerlegbar und ferner besitzen wenigstens $n-1$ Ringe ein Einheitselement.*

---

(1) $\mathfrak{o}_i$ bedeutet Einheitsideal, das aus allen Elementen von $\mathfrak{R}_i$ besteht.

Zunächst beweisen wir, dass die Bedingungen notwendig sind.

Offenbar wird $\mathfrak{R}$ direkte Summe der endlich vielen Ringe $\mathfrak{R}_i$; nämlich wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{R}_n ,$$

worin jeder nicht-nilpotente Ring direkt unzerlegbar ist und es höchstens einen nilpotenten Ring gibt. Dabei besitzt jedes $\mathfrak{R}_i$ kein vom Nullideal und von $\mathfrak{o}_i$ verschiedenes idempotentes Ideal.

Wenn $n = 1$ ist, so ist der Satz nach Zusatz 2 unter Satz 16 schon klar.

Es sei nun damit $n \geqq 2$. Wir nehemen auch an, dass wenigstens ein Ring $\mathfrak{R}_n$ ohne Einheitselement existiert. Wenn ein nilpotenter Ring existiert, so betrachten wir $\mathfrak{R}_n$ als nilpotenter. Da $\mathfrak{o}_n^2 \neq \mathfrak{o}_n$ ist, so wird $\mathfrak{o}$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{o}_n^2$. Nach der voraussetzung ist $\mathfrak{o}^\lambda \not\equiv 0\ (\mathfrak{o}_n^2)$ für jedes λ; also ist $\mathfrak{o}_n^2$ kein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal. Da die kürzeste Darstellung von $\mathfrak{o}_n^2$ durch grösste Primärideale auch eindeutig bestimmt ist, wird

$$(\mathfrak{o}_n^2 , \mathfrak{o}^m) = (\mathfrak{o}_n^2 , \mathfrak{o}^{m+1}) = \ldots\ldots ,$$

oder

$$\mathfrak{o}_1^m + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_{n-1}^m + (\mathfrak{o}_n^2 , \mathfrak{o}_n^m) = \mathfrak{o}_1^{m+1} + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_{n-1}^{m+1} + (\mathfrak{o}_n^2 , \mathfrak{o}_n^{m+1}) ,$$

daraus folgen

$$\mathfrak{o}_i^m = \mathfrak{o}_i^{m+1} \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1) .$$

Aber $\mathfrak{o}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ sind direkt unzerlegbar; damit besitzen $\mathfrak{o}_i$ ein Einheitselement. Hiermit müssen wenigstens $n-1$ Ringe aus $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{R}_n$ ein Einheitselement besitzen.(1)

Jedes Primideal ($\neq \mathfrak{o}$) aus $\mathfrak{R}$ ist ein Teiler von $n-1$ aus $\mathfrak{o}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$. Wäre $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal derart, dass

$$\mathfrak{o}_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_{i-1} + \mathfrak{o}_{i+1} + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_n \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i) ,$$

$$\mathfrak{o}_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_{i-1} + \mathfrak{o}_{i+1} + \ldots\ldots + \mathfrak{o}_n \neq \mathfrak{p}_i ,\ \mathfrak{p}_i < \mathfrak{b} < \mathfrak{o} ,$$

(1) Ist die kürzeste Darstellgung jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale stets eindeutig bestimmt, so ist die Zerlegung von $\mathfrak{R}$, bei der jeder nichtnilpotenter Ring unzerlegbar ist und alle nilpotenten Ringe in einem Ring zusammengefasst werden, auch eindeutig bestimmt.

so würde nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{p}_i^2$ Primärideal, da $\mathfrak{o}_i$ unzerlegbar ist. Ferner würde auch $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_i^2$. Also ergibt sich ein Widerspruch gegen Hilfssatz 6. Damit besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal von $\mathfrak{R}_i$ keinen von $\mathfrak{o}_i$ verschiedenen echten Teiler.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Denn in der kürzesten Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$ vom Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ sind die minimalen Primärkomponenten eindeutig bestimmt. Die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_i (\neq \mathfrak{o})$ enthalten $n-1$ Ringen aus der folgenden Darstellung

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots\ldots \mathfrak{R}_n .$$

Wäre ein zugehöriges Primideal $\mathfrak{p}_k (\neq \mathfrak{o})$ ein Teiler eines höchsten Primideals $\mathfrak{p}_l$ von $\mathfrak{a}$, so würde aus der Bedingung und aus der Eigenschaft vom Primärideal

$$\mathfrak{q}_l \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_k)$$

mit Widerspruch, wo $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_k$ die zu $\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{p}_k$ gehörigen Primärideale in der Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$ sind. Damit sind die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$ die höchsten Primideale oder $\mathfrak{o}$. Die Potenz $\mathfrak{o}^\lambda$ des Einheitsideals $\mathfrak{o}$ ist immer auch ein Teiler von wenigstens $n-1$ Ringen, da wenigstens $n-1$ Ringe ein Einheitselement besitzen. Ist $\mathfrak{o}$ ein zugehöriges Primideal von $\mathfrak{a} (\neq \mathfrak{o})$, so gibt es ein Element a, sodass

$$\mathfrak{o} a \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}) .$$

Damit besitzt ein Ring $\mathfrak{R}_n$ kein Einheitselement und alle anderen Ringe haben ein Einheitselement und folglich ist $\mathfrak{a}_n = [\mathfrak{o}_n, \mathfrak{a}] \neq \mathfrak{o}_n$ nicht Primideal aus $\mathfrak{o}_n$. Wegen des Beweises des Satzes 16 werden hiermit

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^\lambda) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{\lambda+1}) = \ldots\ldots \quad \text{für eine Zahl } \lambda .$$

Nach Satz 12 ist damit die kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt, also ist unser Hauptsatz bewiesen.

Zusatz. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einheitselement. Dann ist die kürzeste Darstellung jedes Ideals aus $\mathfrak{R}$ durch grösste Primärideale dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn $\mathfrak{R}$ eine direkte Summe von endlich vielen direkt-unzerlegbaren Ringen wird, in welchen* *der Vielfachenkettensatz modulo jedem Ideal erfüllt ist. Dabei muss das Ideal vom Nullideal verschieden sein, wenn in dem zugehörigen Ring das Nullideal prim ist.*

Denn, wenn in einem Ring $\mathfrak{R}_i$ der Vielfachenkettensatz erfüllt ist, so besitzt jedes vom Nullideal verschiedene Primideal keinen von $\mathfrak{o}_i$ verschiedenen echten Teiler.(1) Umgekehrt, wenn jedes Primideal ($\neq (0)$) vom Ring $\mathfrak{R}_i$ keinen von $\mathfrak{o}_i$ verschiedenen echten Teiler besitzt und wenn $\mathfrak{R}_i$ ein Einheitselement enthält, so ist nach Satz 15 der Vielfachenkettensatz in dem Ring $\mathfrak{R}_i$ erfüllt. Damit folgt sofort aus dem Hauptsatz unsere Behauptung.

Dez. 1930.

P. S. In dieser Arbeit verstehe ich unter „*direkte Summe der Ringe* $\mathfrak{R}_i$", $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{R}_n$, die direkte Summe der Ideale $\mathfrak{R}_i$ aus $\mathfrak{R}$.

In meiner Arbeit: „ Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen ", Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A, Vol. 1 (1930), habe ich auch den Namen „*direkte Summe der Ringe* " für direkte Summe der Ideale benutzt.

(1) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie § 7.