Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale. II.

Von

Shinjiro MORI.

(Eingegangen am 27. 9. 1938.)

In der vorangehenden Arbeit[1] haben wir unter der Voraussetzung der Teilerfremdheit von verschiedenen minimalen Primidealen, die kein Hauptideal sind, den folgenden Satz bewiesen:

Ist jedes Hauptideal im Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt der in $\mathfrak{J}$ minimalen Primideale darstellbar, so gilt dieselbe Eigenschaft auch für jedes Hauptideal im Polynomring $\mathfrak{J}[x]$.

In den folgenden Zeilen soll der genannte Satz ohne Benutzung der erstgenannten Voraussetzung bewiesen werden und ferner zu einem noch schärferen Resultat erweitert werden.

Der allgemeine Zerlegungssatz der Hauptideale in $\mathfrak{J}[x]$.

Im folgenden sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit Einselement und $\mathfrak{J}[x]$ seine transzendente Erweiterung.

Zum Beweis des allgemeinen Zerlegungssatzes werden wir zunächst zwei Hilfssätze vorausschicken:

Hilfssatz 5. *Wenn jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen, in $\mathfrak{J}$ minimalen Primidealen darstellbar ist, so ist jede Potenz eines in $\mathfrak{J}[x]$ minimalen Primideals von erster Art immer primär.*

Es sei $\bar{\mathfrak{p}}$ das in $\mathfrak{J}[x]$ minimale Primideal von erster Art. Dann ist die Gesamtheit $\mathfrak{p}$ aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{p}}$, welche zugleich zu $\mathfrak{J}$ gehören, ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal,[2] und folglich ist jede Potenz von $\mathfrak{p}$ primär.[3] Wir nehmen an, dass für zwei Elemente $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}$

(1) S. Mori und T. Dodo, Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale, dieses Journal **8** (1938), 135.

(2) S. Mori, loc. cit., 140.

(3) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Journal **8** (1938), 12.

$+\cdots\cdots+a_m$, $\varphi(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$ aus $\mathfrak{J}[x]$

$$f(x)\not\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}), f(x)\varphi(x)=c_0x^{m+n}+c_1x^{m+n-1}+\cdots\cdots+c_{m+n}\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}^k)$$

ist. Dann ist

$$(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m)\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}),\ (c_0, c_1, \ldots\ldots, c_{m+n})\equiv 0\ (\mathfrak{p}^l),\ \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+1})$$
$$(l\geqq k).\text{[1]}$$

Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 1

$$(b_0, b_1, \ldots\ldots, b_n)\equiv 0\ \ (\mathfrak{p}^l)\ \ (l\geqq k),$$

als ist $\varphi(x)\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}^k)$ und unser Satz ist bewiesen.

Hilfssatz 6. *Jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ sei als Potenzprodukt der endlich vielen minimalen Primideale darstellbar. Weiter sei $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal. Ausserdem sei $(p):\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ für ein Element p aus $\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{a}\mathfrak{p}=(p)$.*

Nach unserer erster Voraussetzung ist $(p)=\mathfrak{p}^l\mathfrak{p}_1^{l_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{l_k}$, $(l\geqq 1)$ und dabei sind alle $\mathfrak{p}_i$ ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal. Daher ergibt sich

(1) $$\mathfrak{p}^{l-1}\mathfrak{p}_1^{l_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{l_k}\equiv 0\ (\mathfrak{a}).$$

Aus $\mathfrak{p}\mathfrak{a}\equiv 0\ \ (p)$ folgt

$$\mathfrak{a}\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{l_i})\qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, k),$$

da $\mathfrak{p}_i^{l_i}$ primär ist.[2] Weiter ist

$$\mathfrak{a}\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-1}).$$

Sonst würde $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-1})$ für ein Element a aus $\mathfrak{a}$. Aber aus $(a)\,\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{p}^l)$ folgte $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{l'}\mathfrak{p}'\ldots\ldots\equiv 0\ (\mathfrak{p}^l)$ $(l'<l-1)$, das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{p}^s\not\equiv\mathfrak{p}^{s+1}$ für jede positive ganze Zahl s ist. Danach ist $\mathfrak{a}\equiv 0([\mathfrak{p}^{l-1}, \mathfrak{p}_1^{l_1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_k^{l_k}])$. Da nach unserer Voraussetzung für $\mathfrak{J}$ aber $[\mathfrak{p}^{l-1}, \mathfrak{p}_1^{l_1}, \ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{l_k}]=\mathfrak{p}^{l-1}\mathfrak{p}_1^{l_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{l_k}$ ist, ergibt sich nach (1)

$$\mathfrak{p}^{l-1}\mathfrak{p}_1^{l_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{l_k}=\mathfrak{a}\quad\text{oder}\quad (p)=\mathfrak{p}\mathfrak{a}.$$

Satz 6. *Ist jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt der endlich vielen, in $\mathfrak{J}$ minimalen Primideale darstellbar, so lässt sich jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}[x]$ auch als Potenzprodukt der endlich vielen, in $\mathfrak{J}[x]$ minimalen Primideale darstellen.*

---

(1) S. Mori, loc. cit., 10. Für jede natürliche Zahl n ist $\mathfrak{p}^n\not\equiv\mathfrak{p}^{n+1}$.

(2) S. Mori, loc. cit., 11.

Ist ein Element $f(x)$ von $\mathfrak{J}[x]$ gleich einem Element p aus $\mathfrak{J}$, so wird nach unserer Voraussetzung für $\mathfrak{J}$ $(p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_m$, und daher folgt

$$\overline{(p)}=\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x]\ldots\mathfrak{p}_m[x]\,.$$

Dabei ist $\mathfrak{p}_i[x]$ nach Satz 3 ein in $\mathfrak{J}[x]$ minimales Primideal.

Ist $f(x)$ kein Element aus $\mathfrak{J}$, so nehmen wir zunächst an, dass $f(x)$ ein Primelement in $\mathfrak{J}[x]$ ist. Da eines $\bar{\mathfrak{p}}$ der höchsten Primideale von $\big(f(x)\big)$ zugleich ein durch $f(x)$ erzeugtes Primideal in $\mathfrak{J}[x]$ sein muss, sei es $\bar{\mathfrak{p}}$ das durch $f(x)$ erzeugte Primideal in $\mathfrak{J}[x]$. Dann können wir für ein beliebiges Element $f'(x)$ aus $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{J}$ ein Element a finden, sodass

$$af'(x)=\lambda(x)f(x) \tag{1}$$

ist. Wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal ist, so ist $\bar{\mathfrak{p}}=\big(f(x)\big)$ und unsere Behauptung ist schon richtig. Im anderen Fall ist nach Satz 2 das Ideal $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ durch ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal $\mathfrak{p}_1$ teilbar, wenn wir $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$, $a_0\neq 0$ setzen. Nach Hilfssatz 6 ist damit

$$(a_0)=\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\,, \tag{2}$$

dabei ist $(a_0):\mathfrak{p}_1=\mathfrak{a}$. Aus (2) folgt die Existenz eines Elementes b'_i von der Art, dass für ein beliebiges Element a' aus $\mathfrak{a}$

$$a'a_i=b'_ia_0 \qquad (i=0, 1, \ldots, m) \tag{3}$$

ist. Im allgemeinen können wir für ein beliebiges Element a' aus $\mathfrak{a}$ und für ein beliebiges Element p_a aus $\mathfrak{p}_1$ ein Element b'_a finden, so dass

$$a'p_a=b'_aa_0 \tag{4}$$

ist. Da das von diesen Produkten $a'p_a$ erzeugte Ideal das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1$ ist, muss nach (2)

$$(b'_a, b''_a, \ldots)=\mathfrak{J} \tag{5}$$

sein. Durch Multiplikation mit a_j folgt aber aus (3) $a'a_ja_i=b'_ia_ja_0$, und daraus erhalten wir wieder nach (3)

$$b'_ja_i=b'_ia_j \qquad (i, j=0, 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Im allgemeinen ergibt sich nach (4)

$$b'_ip_a=b'_aa_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{6}$$

Nach (6) ist

$$
(7)\qquad \begin{cases} b'_a f(x) = p_a\,(b'_0 x^m + b'_1 x^{m+1} + \cdots\cdots + b'_m) \\ b''_a f(x) = p_a (b''_0 x^m + b''_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + b''_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

Setzen wir nun

$$
f'_1(x) = b'_0 x^m + b'_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + b'_m\,,
$$

$$
f''_1(x) = b''_0 x^m + b''_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + b''_m,\ \ldots\ldots,
$$

so ist nach (5)

$$
\big(f(x)\big) = \mathfrak{p}_1\big(f'_1(x), f''_1(x), \ldots\ldots\big)\,,
$$

und dabei ist aber nach (7) $f'_1(x) \equiv 0, f''_1(x) \equiv 0, \ldots\ldots (\bar{\mathfrak{p}})$. Sind alle Koeffizienten von $f'_1(x), f''_1(x), \ldots\ldots$ durch ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal $\mathfrak{p}_2$ teilbar, so erhalten wir auf gleicher Weise

$$
\big(f(x)\big) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\big(f'_2(x), f''_2(x), f'''_2(x), \ldots\ldots\big)\,,
$$

wobei $f'_2(x) \equiv 0, f''_2(x) \equiv 0, \ldots\ldots (\bar{\mathfrak{p}})$ ist. So gelangen wir schliesslich zu

$$
(8)\qquad \big(f(x)\big) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n\big(f'_n(x), f''_n(x), f'''_n(x), \ldots\ldots\big)\,,
$$

wobei $f'_n(x) \equiv 0, f''_n(x) \equiv 0, f'''_n \equiv 0, \ldots\ldots (\bar{\mathfrak{p}})$ ist. Dabei sind aber nicht alle Koeffizienten von $f'_n(x), f''_n(x), \ldots\ldots$ durch ein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal teilbar. Nämlich das Ideal $\bar{\mathfrak{a}}_n = \big(f'_n(x), f''_n(x), \ldots\ldots\big)$ ist durch das Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von zweiter Art, aber durch kein in $\mathfrak{J}[x]$ minimales Primideal von erster Art teilbar.

Andererseits erhalten wir nach (1) $\big(a f'(x)\big)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n = \big(f(x)\big)\bar{\mathfrak{a}}'$ und nach unserer Voraussetzung ist $(a) = \mathfrak{p}'_1 \ldots\ldots \mathfrak{p}'_k$. Da das durch die Koeffizienten von $f(x)$ erzeugte Ideal $(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m)$ nach (8) durch $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$, aber nach Hilfssatz 5 durch kein anderes in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal teilbar ist, müssen nach Hilfssatz 1 die Koeffizienten eines beliebigen Elements aus $\bar{\mathfrak{a}}'$ durch a teilbar sein, und daher folgt

$$
\big(f'(x)\big)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n = \big(f(x)\big)\bar{\mathfrak{a}}''\,.
$$

Dabei ist $f'(x)$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{p}}$ und daher folgt $\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n \equiv 0\ \big(f(x)\big)$. Nach (8) erhalten wir danach

$$
\big(f(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots\ldots \mathfrak{p}_n \quad \text{oder} \quad \big(f(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x] \ldots\ldots \mathfrak{p}_n[x]\,.
$$

Endlich sei $f(x)$ kein Primelement in $\mathfrak{J}[x]$. Dann ist

$$af(x)=a'f_1(x)f_2(x)\dots\dots f_s(x)\,,$$

wobei $f_i(x)$ ein Primelement in $\mathfrak{J}[x]$ bedeutet. Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{p}}_i$ das durch $f_i(x)$ erzeugte Primideal, so ergibt sich aus dem soeben gewonnenen Resultat

$$\big(af(x)\big)=\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\dots\dots\bar{\mathfrak{p}}_s\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x]\dots\dots\mathfrak{p}_t[x]\,.$$

Dabei ist $\mathfrak{p}_j[x]$ ein in $\mathfrak{J}[x]$ minimales Primideal von erster Art. Aus $\overline{(a)}=\mathfrak{p}'_1[x]\mathfrak{p}'_2[x]\dots\dots\mathfrak{p}'_l[x]$ folgt damit

$$\mathfrak{p}'_1[x]\dots\dots\mathfrak{p}'_l[x]\big(f(x)\big)=\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\dots\dots\bar{\mathfrak{p}}_s\mathfrak{p}_1[x]\dots\dots\mathfrak{p}_t[x]\,.$$

Nach Hilfssatz 5 und der Tatsache, dass $\mathfrak{p}'^{m}_i[x]\neq\mathfrak{p}'^{m+1}_i[x]$ für jede ganze Zahl m ist, muss jedes $\mathfrak{p}'_i[x]$ mit einem aus $\mathfrak{p}_j[x]$ identisch sein. Also gilt

$$\overline{(a)}\big(f(x)\big)=\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\dots\dots\bar{\mathfrak{p}}_s\overline{(a)}\mathfrak{p}_{l+1}[x]\dots\dots\mathfrak{p}_t[x]\,,$$

und daraus ergibt sich

$$\big(f(x)\big)=\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\dots\dots\bar{\mathfrak{p}}_s\mathfrak{p}_{l+1}[x]\dots\dots\mathfrak{p}_t[x]\,,$$

wobei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein in $\mathfrak{J}[x]$ minimales Primideal von zweiter Art und $\mathfrak{p}_j[x]$ ein in $\mathfrak{J}[x]$ minimales Primideal von erster Art bedeutet. Also ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Nachweis des Hauptsatzes.

Satz 7. *Es sei jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt der endlich vielen Primideale aus $\mathfrak{J}$ darstellbar. Dann müssen die Primideale, welche in die Darstellung des Hauptideals als Potenzprodukt auftreten, immer in $\mathfrak{J}$ minimal sein.*

Es sei (p) ein beliebiges Hauptideal in $\mathfrak{J}$. Dann ist nach unserer Voraussetzung

(1) $$(p)=\mathfrak{p}^k\mathfrak{p}_1^{k_1}\dots\dots\mathfrak{p}_m^{k_m}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}\,.$$

Hier nehmen wir an, dass ein Primideal $\mathfrak{p}'\big(\neq(0)\big)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ist p' ein vom Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{p}'$, so ist auch nach unserer Voraussetzung

(2) $$(p')=\mathfrak{p}''\mathfrak{a}''\,,\qquad \mathfrak{p}''\subseteqq\mathfrak{p}'\subset\mathfrak{p}\,.$$

Aus (1) folgt damit die Existenz eines Ideals $\mathfrak{a}'$ derart, dass

(3) $$(p)\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}''\mathfrak{a}$$

ist. Multiplizieren wir (3) mit $\mathfrak{p}$, so ergibt sich nach (1)

$$\mathfrak{p}(p)\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}''\mathfrak{p}\mathfrak{a} = \mathfrak{p}''(p)\,,$$

und daraus erhalten wir leicht

(4) $$\mathfrak{p}\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}''\,.$$

Nach (2) muss damit $\mathfrak{a}' \equiv 0\,(\mathfrak{p}'')$ sein, und daraus ergibt sich

(5) $$\mathfrak{p}'' \geqq \mathfrak{p}''\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{a}'\mathfrak{p}\,.$$

Aus (4) und (5) folgt unmittelbar

(6) $$\mathfrak{p}''\mathfrak{p} = \mathfrak{p}''\,.$$

Multiplizieren wir (6) mit $\mathfrak{a}''$, so ergibt sich nach (2)

$$(p')\mathfrak{p} = (p')\,.$$

Ist e das Einselement von $\mathfrak{J}$, so ist für ein Element p'' aus $\mathfrak{p}$

$$p'p'' = ep'\,.$$

Das ergibt einen Wiederspruch $e \equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Also ist unsere Annahme, dass $\mathfrak{p}$ kein in $\mathfrak{J}$ minimales Primideal ist, falsch, und unser Satz ist bewiesen.

Nach Sätzen 6 und 7 ergibt sich unmittelbar der folgende Hauptsatz als das Hauptziel dieser Abhandlung.

Hauptsatz. *Ist jedes Hatptideal im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt der endlich vielen Primideale darstellbar, so lässt sich jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}[x]$ auch als Potenzprodukt der endlich vielen, in $\mathfrak{J}[x]$ minimalen Primideale darstellen.*

Als ein spezialer Fall dieses Hauptsatzes gilt:

Satz. *Es sei $\mathfrak{R}$ der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen, die einem Körper endlichen Grades angehören, und der Polynomring $\mathfrak{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bestehe aus allen Polynomen der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Koeffizienten die Zahlen aus $\mathfrak{R}$ sind. Dann lässt sich jedes Hauptideal in $\mathfrak{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ als Potenzprodukt der endlich vielen, in $\mathfrak{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ minimalen Primideale darstellen.*