Über die Produktzerlegung der Hauptideale.

Von

Shinziro Mori.

(Eingegangen am 20. 9. 1937.)

Für die Produktzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs ist Herr Schmidt[1] ohne Beweis zu folgendem Ergebnis gelangt:

Damit in einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass

1) jede mit einem Hauptideal beginnende Idealquotienten-kette im Endlichen abbricht,

2) $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen ist.

Dieser Satz hat meines Wissens noch keinen Beweis gefunden und er scheint mir ziemlich schwer. Im folgenden will ich das Problem nur für den speziellen Fall untersuchen, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt der in $\mathfrak{J}$ minimalen Primideale darstellbar ist.

Produktzerlegung der Hauptideale eines 0-Integritätsbereichs.

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit 0-Satz. Dann gilt in $\mathfrak{J}$ zunächst folgender Satz:

Satz 1. *Ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so besitzt jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ die folgenden Eigenschaften:*

1. *Jede Potenz von $\mathfrak{p}$ ist primär.*
2. *Kein Primärideal kann zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ eingeschoben werden.*

Nach dem Hauptidealsatz von Krull[2] ist jedes höchste Primideal eines Hauptideals (p) auch in $\mathfrak{J}$ minimal, und folglich existiert ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$. Da $\mathfrak{J}$ keinen echten Nullteiler hat, muss

---

(1) Fr. K. Schmidt, Über die Primidealzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs, Sitz.-Ber. München. Akad. Wiss. (1928), 285.

(2) W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 37.

$\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ sein.[1] Ist p ein beliebiges durch $\mathfrak{p}^n$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}$, so ist danach

$$(p)=\mathfrak{p}^a\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}, \qquad a<n.$$

Wäre $pr\equiv 0(\mathfrak{p}^n)$, $r\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, so folgte aus $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{n'}'^{b_{n'}}$

$$\mathfrak{p}^a\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{n'}'^{b_{n'}}\equiv 0(\mathfrak{p}^n),$$

wobei jedes aus $\mathfrak{p}_1,\ldots\ldots\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_1'\ldots\ldots\mathfrak{p}_{n'}'$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar wäre. Also wäre das Produkt $\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{n'}'^{b_{n'}}$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar, und nach dem in der Fussnote ausgezeichneten Hilfssatz[2] hätten wir einen Widerspruch. Nämlich $\mathfrak{p}^n$ muss primär sein.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von der Art, dass $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}\supset\mathfrak{p}^2$ ist. Dann können wir in $\mathfrak{q}$ ein durch $\mathfrak{p}^2$ unteilbares Element q finden, und nach unserer Voraussetzung erhalten wir die Produktzerlegung $(q)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^{c_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_s^{c_s}$, wo alle Primideale $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots\ldots,\mathfrak{p}_s$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar sind. Also ist für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r' $\mathfrak{p}(r')\equiv 0(\mathfrak{q})$. Daraus folgt ein Widerspruch $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$. Kein Primärideal kann danach zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ eingeschoben werden.

Satz 2. *Ist jedes Hauptideal von $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so ist*

$$\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}=[\mathfrak{p}_1^{a_1},\mathfrak{p}_2^{a_2},\ldots\ldots,\mathfrak{p}_n^{a_n}],$$

für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{J}$.

Es ist offenbar

$$(1) \qquad \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\equiv 0\ (\mathfrak{d}),$$

wenn wir $\mathfrak{d}=[\mathfrak{p}_1^{a_1},\mathfrak{p}_2^{a_2},\ldots\ldots,\mathfrak{p}_n^{a_n}]$ setzen. Wenn $\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\neq\mathfrak{d}$ ist, so können wir in $\mathfrak{d}$ ein Element d finden, so dass $d\not\equiv 0(\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n})$ ist. Da (d) als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar und durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar ist, muss

---

(1) S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Jour. **I** (1931), 176.

(2) S. Mori und T. Dodo, Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, dieses Jour. **7** (1937), 16. Hilfssatz. *Ist r ein durch ein Primideal $\mathfrak{p}(\neq(0))$ unteilbares Element aus $\mathfrak{J}$, so ist es unmöglich, dass für eine ganze Zahl m $(r)\mathfrak{p}^m\equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{m+1})$ ist.*

$$(d)=\mathfrak{p}_1^{a_1'}\mathfrak{p}_2^{a_2'}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n'}\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k'^{b_k} \tag{2}$$

sein. Nach Satz 1 ist aber $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ primär und daher folgt

$$a_1'\geqq a_1, \quad a_2'\geqq a_2, \ldots\ldots, \quad a_n'\geqq a_n.$$

Aus (1) und (2) erhalten wir damit $(d)\equiv 0(\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n})$ und das widerspricht der obigen Voraussetzung $d\not\equiv 0(\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n})$. Es muss nämlich $\mathfrak{d}=[\mathfrak{p}_1^{a_1}, \mathfrak{p}_2^{a_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n^{a_n}]=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$ sein.

Für die durch Fr. K. Schmidt gestellte Frage kann ich noch keine richtige Antwort finden. Wenn wir aber die Darstellbarkeit des Hauptideals als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ betrachten, so gelangen wir zu folgendem Ergebnis:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit 0-Satz. Damit in $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass*

1) $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen ist,

2) jede Potenz eines minimalen Primideals in $\mathfrak{J}$ primär ist,

3) $(p)=\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal von (p) ist.

Zunächst nehmen wir die Darstellbarkeit jedes Hauptideals als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ an. Dann ist nach Sätze 1 und 2 jedes Hauptideals als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, die zu minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ gehören, darstellbar, und nach dem in der Fussnote gezeichneten Satz[1] muss $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen sein. Die Bedingungen *2)* und *3)* sind auch notwendig.

Nach dem Hauptidealsatz von Krull sind die höchsten Primideale eines Hauptideals (p) auch minimal in $\mathfrak{J}$. Nach der Bedingung *1)* erhalten wir damit

$$(p)=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n], \tag{1}$$

wo $\mathfrak{q}_i$ ein zum minimalen Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal bedeutet. Andererseits ist nach der Bedingung *3)* $(p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$. Wenn $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{p}_1$ teilbar ist, so erhalten wir nach *3)* wieder $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_2$. In solcher Weise erhalten mir nach (1) endlich $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{a}'$. Nach der Bedingung *2)* ergibt

(1) S. Mori und T. Dodo, loc. cit., 27. Satz. *Notwendig und hinreichend, damit der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen sei, ist, dass kein Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ des zu einem Hauptideal gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ je eingeschaltet werden kann.*

sich daraus $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{p}_1^{a_1}$, $\mathfrak{a}'\not\equiv 0(\mathfrak{p}_1)$, $\mathfrak{a}'\equiv 0(\mathfrak{q}_i)$ $i=2, 3, \ldots\ldots n$, und wir haben ganz genau wie beim obigen Falle

$$\mathfrak{a}'=\mathfrak{p}_2^{a_2}\mathfrak{a}'' , \qquad \mathfrak{a}''\not\equiv 0(\mathfrak{p}_i)\,(i=1, 2) , \qquad \mathfrak{q}_2=\mathfrak{p}_2^{a_2} .$$

Wir können dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis wir endlich $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\mathfrak{a}$ erhalten. Nach (1) ist aber $\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\equiv 0(p)$ und folglich muss $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$ sein.

Produktzerlegung der Hauptideale eines allgemeinen Integritätsbereichs.

Es sei jetzt $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich, in dem keine Bedingung für Endlichkeit vorausgesetzt wird.

Satz 4. *Ist jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar, so ist für ein beliebiges minimales Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ $\mathfrak{p}^n\neq\mathfrak{p}^{n+1}$ und ferner ist es unmöglich, dass für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r $(r)\mathfrak{p}^n\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+1})$ ist.*

Es sei $\mathfrak{p}^n=\mathfrak{p}^{n+1}$. Dann ist ein Element p aus $\mathfrak{p}^n$ in der Form

$$(p)=\mathfrak{p}^a\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}, \qquad 1\leqq a\leqq n$$

darstellbar. Für eine ganze Zahl s derart, dass $as\geqq n$ ist, gilt es danach

$$(p^s)=\mathfrak{p}^n\mathfrak{p}_1^{sa_1}\mathfrak{p}_2^{sa_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{sa_k}, \qquad (p^{2s})=\mathfrak{p}^n\mathfrak{p}_1^{2sa_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{2sa_k}=(p^s)\mathfrak{p}_1^{sa_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{sa_k} .$$

Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{p}_1^{sa_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{sa_k}$ ergibt sich daraus $rp^s=r'p^{2s}$. Da es aber keinen Nullteiler gibt, muss $r=r'p^s\equiv 0(\mathfrak{p})$ sein, was aber unmöglich ist. Also muss für jede ganze Zahl n stets $\mathfrak{p}^n\neq\mathfrak{p}^{n+1}$ sein.

Nach $\mathfrak{p}^n\neq\mathfrak{p}^{n+1}$ können wir in $\mathfrak{p}^n$ ein Element p finden, das durch $\mathfrak{p}^{n+1}$ unteilbar ist. In der Darstellung $(p)=\mathfrak{p}^a\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}$ muss damit $1\leqq a\leqq n$ sein. Wenn $(r)\mathfrak{p}^n\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+1})$ ist, so folgt $rp\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+1})$, und daher erhalten wir $r^2p\equiv 0\big((r)\mathfrak{p}^{n+1}\big)$, $r^2p\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+2})$. In solcher Weise gelangen wir endlich zum Ergebnis, dass für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r'

$$(1) \qquad (r')(p)\equiv 0(\mathfrak{p}^{at}) , \qquad at>n+1$$

ist, da r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element ist. Andererseits ist aber $(p^t)=\mathfrak{p}^{at}\mathfrak{p}_1^{a_1t}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m^{a_mt}$ und nach (1) haben wir

$$\mathfrak{p}_1^{a_1 t} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{a_m t}(r'p) \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{at}\mathfrak{p}_1^{a_1 t} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{a_m t}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_1^{a_1 t} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{a_m t}(r'p) \equiv 0\,(p^t).$$

Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $\bar{r}$ ist danach $\bar{r}p = p^t r'$ $t \geqq 2$. Daher folgt der Widerspruch $\bar{r} = p^{t-1}\bar{r}' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Die Annahme $(r)\mathfrak{p}^n \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{n+1})$ ist somit falsch.

Satz 5. *Ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar, so ist jede Potenz des minimalen Primideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ primär, und jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ ist als Durchschnitt der endlich vielen Primärideale, die zu minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ gehören, darstellbar.*

Nach Satz 4 ist $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ für jede ganze Zahl n. Für ein durch $\mathfrak{p}^{n+1}$ unteilbars Element p aus $\mathfrak{p}$ und ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r sei es

$$pr \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{n+1}), \qquad (p) = \mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{a_k} \qquad (1 \leqq m \leqq n).$$

Dann folgt $(r)\mathfrak{p}^m\mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{a_k} = 0\,(\mathfrak{p}^{n+1})$ und daher ist $(r')\mathfrak{p}^m \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{n+1})$, $m < n+1$ für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r'. Das ist aber nach Satz 4 unmöglich. Also muss die Potenz $\mathfrak{p}^{n+1}$ primär sein.

Setzen wir nun $(p) = \mathfrak{p}^a \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{a_k}$, $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}^a, \mathfrak{p}_1^{a_1} \ldots\ldots, \mathfrak{p}_k^{a_k}]$, so ist $(p) \equiv 0\,(\mathfrak{d})$. Wäre $\mathfrak{d}$ ein echter Teiler von (p), so hätten wir für ein durch (p) unteilbares Element d aus $\mathfrak{d}$

$$(d) = \mathfrak{p}^{a'}\mathfrak{p}_1^{a_1'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_k^{a_k'}\mathfrak{p}_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{b_m}, \quad a' \geqq a, \quad a_1' \geqq a_1, \ldots\ldots a_k' \geqq a_k,$$

da nach dem vorigen Beweis $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ primär ist. Daher folgte der Widerspruch $d \equiv 0\,(p)$. Also muss $(p) = [\mathfrak{p}^a, \mathfrak{p}_1^{a_1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_k^{a_k}]$ sein.

Satz 6. *Ist jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von endlich vielen minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar, so ist $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{J}$ nicht ganz abgeschlossen sei. Dann gibt es in $\mathfrak{J}$ zwei Elemente p und q derart, dass

$$(1) \qquad p^n + r_1 p^{n-1}q + r_2 p^{n-2}q^2 + \cdots\cdots + r_n q^n = 0, \qquad p \not\equiv 0\,(q)$$

ist, wobei r_i die Elemente aus $\mathfrak{J}$ bedeuten. Anderseits erhalten wir nach unserer Voraussetzung und $p^n = -q(r_1 p^{n-1} + \cdots\cdots + r_n q^{n-1})$

$$(2) \qquad (p) = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{a_m}, \qquad (q) = \mathfrak{p}_1^{a_1'}\mathfrak{p}_2^{a_2'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_s^{a_s'} \qquad m \geqq s,$$

dabei bedeuten $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m$ die minimalen Primideale in $\mathfrak{J}$. Wäre

$a_i \geqq a_i' \geqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, so hätten wir den Widerspruch $p \equiv 0(q)$. Wir nehmen damit $1 \leqq a_1 < a_1'$ an. Dann folgt aus (2)

$$p^{n-1}q \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^{a_1(n-1)+a_1'}), \qquad p^{n-2}q \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^{a_1(n-2)+2a_1'}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$pq^{n-1} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^{a_1+(n-1)a_1'}), \qquad q^n \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^{na_1'}).$$

Aus $1 \leqq a_1 < a_1'$ folgt aber

$$a_1(n-1)+a_1' < a_1(n-2)+2a_1' < \cdots\cdots < a_1+(n-1)a_1' < na_1',$$

und nach (1) ergibt sich

$$p^n \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^{a_1(n-1)+a_1'}), \tag{3}$$

und dabei ist $a_1(n-1)+a_1' > na_1$. Nach (2) ist aber $(p^n) = \mathfrak{p}_1^{na_1}\mathfrak{p}_2^{na_2}\ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{na_m}$, und nach Satz 5 ist $\mathfrak{p}_1^{na_1}$ primär. Aus (3) folgt damit $\mathfrak{p}_1^{na_1} = \mathfrak{p}_1^{na_1+1}$. Nach Satz 4 ist das aber unmöglich. Deshalb muss $\mathfrak{J}$ ganz abgeschlossen sein.

Satz 7. *Damit in einem allgemeinen Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass*

1) jede Idealquotientenkette

$$(p):(p') \subset (p):(p'^2) \subset (p):(p'^3) \subset \cdots\cdots$$

im Endlichen abbricht, und die Anzahl der verschiedenen Ideale, die als der letzte Idealquotient in die Kette treten, endlich ist,

2) der Idealquotient $(p):(p'')$ durch ein höchstes Primideal von (p) stets teilbar, oder gleich $\mathfrak{J}$ ist,

3) $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$ ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal von (p) ist,

4) jedes zum minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ gehörige Primärideal eine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, und umgekehrt jede Potenz von $\mathfrak{p}$ primär ist.

Ist jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar, so ist nach Satz 5 jedes Hauptideal als Durchschnitt der Primärideale, die zu minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ gehören, darstellbar. Nach der Abhandlung von T. Dodo[1] sind damit die Bedingungen *1)* und *2)* notwendig. Ist $\mathfrak{q}$ ein zum minimalen Primideal $\mathfrak{p}$

(1) T. Dodo, Bemerkungen zur Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Integritätsbereichen, dieses Jour. **8** (1938), 1.

gehöriges Primärideal, so folgt nach der Eigenschaft von Primärideal, dass eine Potenz von $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar sein muss, und folglich ist $\mathfrak{q}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$, da für jedes Element q aus $\mathfrak{q}$ stets $(q)=\mathfrak{p}^{a}\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots,$ $\mathfrak{p}^{a}\equiv 0(\mathfrak{q})$ ist. Nach Satz 5 ist damit die Bedingung *4)* auch notwendig.

Sind alle Bedingungen erfüllt, so ist jedes Hauptideal (p) in der Form

$$(1) \qquad (p)=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$$

darstellbar, wo $\mathfrak{q}_i$ das zum minimalen Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehörige Primärideal bedeutet, und nach der Bedingung *4)* ist $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_i^{a_i}$. Da (p) durch ein minimales Primideal $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{J}$ teilbar ist, muss nach der Bedingung *3)* $(p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$ sein. Ist $\mathfrak{a}_1\equiv 0(\mathfrak{p}_1)$, so folgt auch nach der Bedingung *3)* $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_2$. Nachdem wir dieses Verfahren fortsetzen, gelangen wir nach der Bedingung *4)* und (1) endlich zu $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{a}'=\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}'$. Aus (1) folgt $\mathfrak{a}'\equiv 0(\mathfrak{q}_2)$ und daher ergibt sich in gleicher Weise $\mathfrak{a}'=\mathfrak{p}_2^{a_2}\mathfrak{a}''=\mathfrak{q}_2\mathfrak{a}''$. Auf solcher Weise erhalten wir endlich $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\mathfrak{a}$. Andererseits ist aber nach (1) $\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\equiv 0(p)$. Also muss $(p)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$ sein.