Bemerkungen zur Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Integritätsbereichen.

Von

Takeo DODO.

(Eingegangen am 20. 9. 1937.)

Schon früher hat Herr W. Krull in seiner Arbeit(1) die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinem Ring $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, die zu höchsten Primidealen von $\mathfrak{R}$ gehören behandelt. Bei seiner Untersuchung aber wird vorausgesetzt, dass von zwei zum selben höchsten Primideal gehörigen Primäridealen in $\mathfrak{R}$ stets eines durch das andere teilbar sei, und ausserdem sind die Ausdruckweise und die Methoden bewertungstheoretisch. Im folgenden wollen wir ohne die obige Voraussetzung dieses Problem aus idealtheoretischem Standpunkt untersuchen.

Unter einem „*allgemeinen Integritätsbereiche* $\mathfrak{J}$“ verstehen wir einen kommutativen Ring mit Einheitselement aber ohne Nullteiler, in dem die Gültigkeit des Teilerkettensatzes nicht gefordert wird.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$, das Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist und kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, möge „*höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$“ heissen.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ soll „*in* $\mathfrak{J}$ *minimal*“ genannt werden, wenn $\mathfrak{p}$ (ausser (0)) kein echtes Primidealvielfaches besitzt.

Satz 1. *Es sei in* $\mathfrak{J}$ *jedes Hauptideal* (p) *als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, die zu höchsten Primidealen von* (p) *gehören. Dann bricht die Reihe der Idealquotienten* $(p)\subset(p):(p')\subset(p):(p'^2)\subset\cdots\cdot$ *nach endlichvielen Gliedern ab, d.h. für ein gewisses k ist:* $\mathfrak{a}=(p):(p'^k)=(p):(p'^{k+1})=\cdots\cdot$, *und es gibt nur endlichviele verschiedene Ideale* $\mathfrak{a}$, *wenn* (p') *alle Hauptideale aus* $\mathfrak{J}$ *durchläuft, und ausserdem ist der Idealquotient* $(p):(p')$ *stets durch ein höchstes Primideal von* (p) *teilbar oder gleich* $\mathfrak{J}$.

---

(1) W. Krull, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen. Math. Annalen, **105** (1931), 1.

Gegeben sei eine kürzeste Darstellung von (p) durch Primärideale $(p)=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ und seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die zugehörigen höchsten Primideale. Für ein beliebiges Element p' seien $p' \not\equiv o\,(\mathfrak{p}_i)\,(i=1,2,\ldots,m)$ $p'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_j)\,(j=m+1,\ldots. n)$, so folgt daraus für ein genügend hohes ρ $p'^{\rho}\equiv 0\,(\mathfrak{q}_j)\,(j=m+1,\ldots, n)$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}(p):(p'^{\rho})&=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]:(p'^{\rho})=[\mathfrak{q}_1:(p'^{\rho}), \ldots, \mathfrak{q}_n:(p'^{\rho})]\\ &=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_m]=(p):(p'^{\rho+1})=(p):(p'^{\rho+2})=\cdots.\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen. Nach dem eben gewonnenen Ergebnis ist der zweite Teil des Satzes selbstverständlich. Schliesslich ist jeder Idealquotient $(p):(p')$ durch ein höchstes Primideal von (p) teilbar oder gleich $\mathfrak{J}$, da $(p):(p')=[\mathfrak{q}_1:(p'), \ldots, \mathfrak{q}_n:(p')]$ ist und $\mathfrak{q}_i:(p')$ zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal oder gleich $\mathfrak{J}$ ist.

Satz 2. *In einem allgemeinen Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ sind die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Ist (p) ein beliebiges Hauptideal aus $\mathfrak{J}$, so bricht die Idealquotientenkette*

$$(p)\subset(p):(p')\subset(p):(p'^2)\subset\cdots$$

in Endlichen ab, d. h. für ein gewisses k ist:

$$\mathfrak{a}=(p):(p'^k)=(p):(p'^{k+1})=\cdots.$$

2. *Es gibt nur endlichviele verschiedene Ideale $\mathfrak{a}$, wenn (p') alle Hauptideale aus $\mathfrak{J}$ durchläuft.*
3. *Jeder Idealquotient $(p):(p')$ ist durch ein höchstes Primideal von (p) teilbar oder gleich $\mathfrak{J}$.*

Dann ist jedes Hauptideal (p) aus $\mathfrak{J}$ als Durchschnitt von zu endlich vielen höchsten Primidealen von (p) gehörigen Primäridealen darstellbar.

Nach den Voraussetzungen erhalten wir nur endlichviele verschiedene Ideale

$$(1)\qquad \mathfrak{a}_i=(p):(p_i^{k_i})=(p):(p_i^{k_i+1})=\cdots, (i=1,2,\ldots, n)$$

und dabei sind alle $\mathfrak{a}_i$ die durch das multiplikativ abgeschlossene System aller Potenzen von p_i erzeugten isolierten Komponentenideale von (p). Umgekehrt sei $\mathfrak{b}$ ein beliebiges isoliertes Komponentenideal von (p), dann ist $\mathfrak{b}$ mit einem der $\mathfrak{a}_i$ identisch. Denn, bezeichnen wir mit S das multiplikativ abgeschlossene System, das das isolierte Komponentenideal $\mathfrak{b}$ erzeugt, so erhalten wir nur r verschiedene Ideale

$$(2) \qquad \mathfrak{a}_i' = (p) : (s_i^{l_i}) = (p) : (s_i^{l_i+1}) = \cdots\cdots, \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, r)$$

wenn s_i alle Elemente aus S durchläuft. Natürlich ist jedes $\mathfrak{a}_i'$ mit einem aus (1) identisch. Zunächst ist klar, dass für alle i $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}_i'$ sind. Gibt es in $\mathfrak{b}$ ein Element b derart, dass für $i=1, 2, \ldots\ldots, r$ $b \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a}_i')$ ist, so können wir ein Element s aus S finden, so dass das Produkt bs durch (p) teilbar ist. Bilden wir die Idealquotienten von (p) nach der Potenz von s, so muss nach der Voraussetzung die Kette der $(p) : (s^l)$ im Endlichen, etwa mit $\mathfrak{a}' = (p) : (s^{l'})$ abbrechen. Da $b \equiv 0 (\mathfrak{a}')$ ist aber $b \not\equiv 0 (\mathfrak{a}_i')$ für $i=1, 2, \ldots\ldots, r$ vorausgesetzt wird, muss $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}_i'$ für alle i sein. Was ein Widerspruch gegen (2) ist, also soll jedes Element aus $\mathfrak{b}$ zu einem der $\mathfrak{a}_i'$ gehören. Bricht nun die Idealquotientenkette $(p) \subset (p) : (s_1 s_2 \ldots\ldots s_r) \subset (p) : (s_1 s_2 \ldots\ldots s_r)^2 \subset \cdots\cdots$ mit $\mathfrak{a}'' = (p) : (s_1 s_2 \ldots\ldots s_r)^{l''}$ ab, so sind $\mathfrak{a}'' \geqq \mathfrak{a}_i'$ für alle i, und folglich ist $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}''$. Anderseits ist $\mathfrak{a}''$ mit einem der $\mathfrak{a}_i'$, etwa $\mathfrak{a}_k'$, identisch, da das Produkt $s_1 s_2 \ldots\ldots s_r$ zu S gehört, und daraus ergibt sich $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_k'$. Damit ist ein beliebiges isoliertes Komponentenideal $\mathfrak{b}$ gleich einem Ideal aus (1), also sind alle Ideale $\mathfrak{a}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_n$ und nur diese, die isolierten Komponentenideale von (p). Aus diesen $\mathfrak{a}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_n$ wählen wir alle von $\mathfrak{J}$ verschiedene, die durch keine anderes aus $\mathfrak{a}_i$ (ausser $\mathfrak{J}$) teilbar sind und bezeichnen sie mit $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m$. Diese[2] sind die isolierten Primärkomponenten und die zu $\mathfrak{q}_i$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_i$ für alle i sind die höchsten Primideale von (p). Wir behaupten nun:

$$(p) = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m].$$

Offensichtlich ist $(p) \leqq [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$. Bedeutet d ein Element aus dem Durchschnitt $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$, so ist der Idealquotient $(p) : (d)$ nach Definition der isolierten Primärkomponenten durch kein höchstes Primideal von (p) teilbar. Also ist nach unserer dritten Voraussetzung $(p) : (d) = \mathfrak{J}$ (Einheitsideal), und folglich ist $d \equiv 0 ((p))$. Wir erhalten danach die gewünschte Darstellung $(p) = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$. Womit Satz 2 vollständig bewiesen ist.

Um nun unseren Hauptsatz zu beweisen, müssen wir noch einen Satz vorausschicken:

Satz 3. *Ist in $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Durchschnitt von zu seinen endlichvielen höchsten Primidealen gehörigen Primäridealen darstellbar, so ist jedes höchstes Primideal eines Hauptideals von $\mathfrak{J}$ auch in $\mathfrak{J}$ minimal.*

(2) Vgl. W. Krull, *Idealtheorie* (1935), 16. W. Krull, Über den Aufbau des Nullideals in ganz abgeschlossen Ringen mit Teilerkettensatz, Math, Annalen **102** (1929), § 1.

Es sei $(p)=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_l]$ die kürzeste Darstellung durch zu höchsten Primidealen von (p) gehörige Primärideale. Es sei jetzt etwa $\mathfrak{p}_1$, das zu $\mathfrak{q}_1$ gehört, nicht minimal in $\mathfrak{J}$, so existiert in $\mathfrak{p}_1$ ein von Null verschiedenes Element p', dessen höchstes Primideal $\mathfrak{p}'_1$ echtes Vielfaches von $\mathfrak{p}_1$ ist, und sei

$$(1) \qquad (p')=[\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{l'}]$$

eine kürzeste Darstellung von (p'), wobei $\mathfrak{p}'_i$ zu $\mathfrak{q}'_i$ gehörtes höchstes Primideal ist. Zu $\mathfrak{q}_1$ können wir ein Element q wählen so, dass

$$(2) \qquad \mathfrak{q}_1=(p):(q), \qquad q \not\equiv 0(\mathfrak{p}_1)$$

sind, da $\mathfrak{p}_1$ ein höchstes Primideal von (p) ist. Vermöge (2) besteht eine Relation

$$(3) \qquad p'^m q \equiv 0\big((p)\big) \qquad \text{oder} \qquad p'^m q = pr,$$

wo r ein Element aus $\mathfrak{J}$ ist, und m sei die kleinste Zahl, für die diese Relation gilt. Wegen $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0(\mathfrak{p}'_i)$ für $i=1, 2, \ldots\ldots, l'$ gibt es ein Element p'_i, so dass $p'_i \equiv 0(\mathfrak{p}_1)$, $p'_i \not\equiv 0(\mathfrak{p}'_i)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, l')$ sind. Auch aus $[\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{i-1}, \mathfrak{p}'_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}'_{l'}] \not\equiv 0(\mathfrak{p}'_i)$ folgt die Existenz eines Elementes p''_i derart, dass $p''_i \equiv 0(\mathfrak{p}'_j)$ für $j \neq i$, aber $p''_i \not\equiv 0(\mathfrak{p}'_i)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, l')$ ist. Setzen wir nun $p_1=p'_1p''_1+\ldots\ldots+p'_{l'}p''_{l'}$, so gehört dieses p_1 zu $\mathfrak{p}_1$ aber zu keinem $\mathfrak{p}'_i$. Aus (2) haben wir auch

$$(4) \qquad p_1^n q \equiv 0\big((p)\big) \qquad \text{oder} \qquad p_1^n q = pr_1,$$

wo r_1 ein Element aus $\mathfrak{J}$ bedeutet. Aus (3) und (4) ergibt sich $p'^m r_1 = p_1^n r$, also $p_1^n r \equiv 0\big((p')\big)$, und folglich ist nach (1) $p_1^n r \equiv 0(\mathfrak{q}'_i)$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, l')$. Da $p_1^n \not\equiv 0(\mathfrak{p}'_i)$ für alle i sind, wird $r \equiv 0(\mathfrak{q}'_i)$ für $i=1, 2, \ldots\ldots, l'$ und damit $r \equiv 0\big((p')\big)$. Setzen wir hier $r=r'p'$, wo r' ein Element aus $\mathfrak{J}$ ist, so folgt aus (3) $p'^{m-1}q \equiv 0\big((p)\big)$, entgegen der Eigenschaft des Exponenten m. $\mathfrak{p}_1$ muss danach minimal in $\mathfrak{J}$ sein. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zusammenfassend haben wir einen

Hauptsatz. *Damit in allgemeinem Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal (p) als Durchschnitt von endlichvielen Primäridealen darstellbar ist, die zu in $\mathfrak{J}$ minimalen Primidealen gehören, ist notwendig und hinreichend, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Ist (p) ein beliebiges Hauptideal aus $\mathfrak{J}$, so bricht die Ideal-*

quotientenkette $(p)\subset(p):(p')\subset(p):(p'^2)\subset\cdots\cdot$ *in Endlichen ab, d.h. für ein gewisses k ist:*

$$\mathfrak{a}=(p):(p'^k)=(p):(p'^{k+1})=\cdots\cdot.$$

2. *Es gibt nur endlichviele verschiedene Ideale* $\mathfrak{a}$, *wenn* (p') *alle Hauptideale aus* $\mathfrak{J}$ *durchläuft.*
3. *Jeder Idealquotient* $(p):(p')$ *ist durch ein höchstes Primideal von* (p) *teilbar oder gleich* $\mathfrak{J}$.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Proffessor Shinziro Mori für seine äusserst freundlichen Anregungen zu dieser Untersuchung meinen herzlichen Dank aussprechen.