# Über die Produktzerlegung der Hauptideale. III.

Von

Shinzıro Mori.

(Eingegangen am 31. Jan. 1940.)

Die vorangehenden gleichnamigen Arbeiten[1] des Verfassers befassten sich nur mit der Struktur der Integritätsbereiche, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt. Der vorliegende dritte Abschnitt setzt die in den vorigen Arbeiten begonnenen Untersuchungen fort und erklärt die Struktur der allgemeinen kommutativen Ringe mit Einselement, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt.

## Ringe, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt.

In diesem Paragraphen wird folgendes stets vorausgesetzt:

Voraussetzung. *Im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement lässt jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen.*

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich ohne weiteres der folgende Hilfssatz, der im folgenden immer brauchbar ist.

Hilfssatz I. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler, so besitzt $\mathfrak{R}$ nur endlich viele, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ und das Nullideal ist als Potenzprodukt dieser Primideale darstellbar.*

Nach unserer Voraussetzung erhalten wir $(a)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_m^{a_m}$, $(b)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\mathfrak{p}_s'^{b_s}$ für zwei Nullteiler $a$ und $b$, und daher ergibt sich

$$(0)=\mathfrak{p}_1^{c_1}\mathfrak{p}_2^{c_2}\ldots\mathfrak{p}_t^{c_t}, \tag{1}$$

wo alle $\mathfrak{p}_i$ von einander verschieden sind. Unter den Primidealen $\mathfrak{p}_i$ gibt es mindestens ein minimales, d. h. ein solches, das keines der übrigen umfasst. Diese seien $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\ldots,n)$; dann müssen $\mathfrak{p}_i$ nach (1) ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal sein und alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale müssen in die Darstellung (1) auftreten. Ist $\mathfrak{p}_{n+1}$ in der Darstellung (1) kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal, so muss $\mathfrak{p}_{n+1}$ mindestens eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ umfassen. Dann können wir in der Darstellung (1) für $\mathfrak{p}_{n+1}$ das in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}_1$ setzen. Auf solcher Weise erhalten wir endlich

$$(0)=\mathfrak{p}_1^{d_1}\mathfrak{p}_2^{d_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{d_n}, \tag{2}$$

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Jour. **8** (1938), 7. S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II., dieses Jour. **9** (1939), 145.

wobei $\mathfrak{p}_i\,(i=1,2,\ldots\ldots,n)$ alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale bedeuten.

Zunächst nehmen wir an, dass das Nullideal in $\mathfrak{R}$ als Potenzprodukt eines in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals $\mathfrak{p}$ darstellbar ist. Dann gilt

Satz 18. *Ist* $(0)=\mathfrak{p}^d$ *für ein Primideal* $\mathfrak{p}(\neq(0))$, *so ist* $\mathfrak{R}$ *ein primärer Ring*[1] *und* $\mathfrak{p}$ *ist ein Hauptideal.*

Ist $r$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so ist nach unserer Voraussetzung

$$(1)\qquad (r)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1 \qquad \mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1^{a_1-1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n},$$

und jedes $\mathfrak{p}_i$ ist ein echter Primideal-teiler von $\mathfrak{p}$. Wenn für ein Primideal $\mathfrak{p}_1'$ $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_1'\subset\mathfrak{p}_1$ ist, so erhalten wir

$$(2)\qquad (p_1')=\mathfrak{p}_1''\mathfrak{p}_2''\ldots\ldots\mathfrak{p}_k''=\mathfrak{p}_1''\mathfrak{a}_1'', \qquad \mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_1''\subseteqq\mathfrak{p}_1'\subset\mathfrak{p}_1$$

für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $p_1'$ aus $\mathfrak{p}_1'$. Aus (1) und (2) folgt $(r)\mathfrak{a}'=\mathfrak{p}_1''\mathfrak{a}_1$ für ein Ideal $\mathfrak{a}'$. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}_1$ erhalten wir daraus $(r)\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}'=(r)\mathfrak{p}_1''$, und daher folgt

$$(3)\qquad (\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}',\mathfrak{p})=(\mathfrak{p}_1'',\mathfrak{p})=\mathfrak{p}_1'',$$

da $\mathfrak{d}=(0):(r)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muss. Nach (3) ergibt sich $\mathfrak{a}'\subset\mathfrak{p}_1''$ und daraus folgt $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'',\mathfrak{p})=\mathfrak{p}_1''$. Multiplizieren wir wieder mit $\mathfrak{a}_1''$, so erhalten wir nach (2)

$$\big((p_1')\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}\big)=(p_1',\mathfrak{p}), \qquad \text{also} \qquad p_1'\equiv p_1'p_1\,(\mathfrak{p}),$$

wo $p_1$ ein Element aus $\mathfrak{p}_1$ bedeutet. Ist $e$ das Einselement von $\mathfrak{R}$, so folgt daraus $e\equiv p_1\,(\mathfrak{p})$, und daher $e\equiv0\,(\mathfrak{p}_1)$. Wir sind damit bei einem Widerspruch $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_1$ angelangt; also kann kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ eingeschaltet werden.

Es sei nun $p$ ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{p}$, dann ist $r+p$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar und

$$(4)\qquad (r+p)=\mathfrak{p}_1'^{a_1'}\mathfrak{p}_2'^{a_2'}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m'^{a_m'},$$

wo jedes $\mathfrak{p}_i'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist und nach dem soeben gewonnenen Resultate kann kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}_i'$ und $\mathfrak{p}$ eingeschaltet werden. Damit sind, mit Rücksicht auf (1) und (4), die Beziehungen $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_i'\,(i=1,2,\ldots\ldots,n)$, $n=m$ gegeben. Hieraus folgt nach (1) und (4)

$$(5)\qquad (r)\mathfrak{p}_{i_1}^{b_{i_1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i_s}^{b_{i_s}}=(r+p)\mathfrak{p}_{j_1}^{c_{j_1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{j_t}^{c_{j_t}},$$

wobei $\mathfrak{p}_{i_1},\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i_s},\mathfrak{p}_{j_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{j_t}$ die verschiedenen Primideale aus $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$ bedeuten. Hier nehmen wir $c_{j_1}\neq0$ an. Da in $\mathfrak{p}_{i_1}^{b_{i_1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i_s}^{b_{i_s}}$ wir dann ein durch $\mathfrak{p}_{j_1}$

(1) Ist im einartigen Ringe mit Einselement jeder Nullteiler nilpotent, so bildet die Menge aller Nullteiler das einzige Ringprimideal. Dann wird der Ring als „*Primärer Ring*“ bezeichnet. W. Krull, *Idealtheorie*, 22.

unteilbares Element $r'$ finden können, so sich ergibt aus (5) $rr'=(r+p)r''$, $r''\equiv 0\,(\mathfrak{p}_{j_1})$, woraus wir erhalten, dass $r'-r''\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ und daher $r'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_{j_1})$ ist. Damit sind wir bei einem Widerspruch angelangt. Also muss $c_{j_1}=0$ sein. Auf solcher Weise erhalten wir endlich $(r)=(r+p)$, oder $p\equiv 0\,\big((r)\big)$. Danach muss $p=rp'$, $p'\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ sein, da $r$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist. Dieses Tatsache gilt aber für alle Elemente aus $\mathfrak{p}$ und folglich erhalten wir für ein beliebiges durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $r$

$$(6) \qquad \mathfrak{p}\equiv 0\,\big((r)\mathfrak{p}\big)\,, \qquad \mathfrak{p}=(r)\mathfrak{p}\,.$$

Aus $\mathfrak{p}^d=(0)$, $\mathfrak{p}\neq(0)$ folgt weiter $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$. Ist $p$ ein durch $\mathfrak{p}^2$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}$, so wird $(p)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_k$ und dabei muss jedes $\mathfrak{p}_j$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar sein. Sonst würde $p\equiv 0\,(\mathfrak{p}^2)$ gegen unsere Voraussetzung. Aus (6) folgt damit $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_k=\mathfrak{p}=(p)$; also ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal. Wenn $p'$ ein beliebiges, von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{p}$ ist, so wird $(p')=\mathfrak{p}^a\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_e$ $=\mathfrak{p}^a\neq(0)$ nach (6) und unserer Voraussetzung. Wäre $rp'=0$ für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $r$, so folgte daraus ein Widerspruch $(rp')=r\mathfrak{p}^a=\mathfrak{p}^a=(0)$. Damit müssen alle Nullteiler aus $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Endlich sei $r'$ ein beliebiges, durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element. Dann folgt aus (6) $p=r'pr''$, $r'r''\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Ist $e$ das Einselement, so erhalten wir nach dem obigen Resultate daraus $e-r'r''\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ und nach $\mathfrak{p}^d=(0)$ ergibt sich $(e-r'r'')^d=0$, $e=r'r'''$ für ein Element $r'''$ aus $\mathfrak{R}$. Damit ist $\mathfrak{R}$ einartig und unser Satz ist in allen Teilen vollständig bewiesen.

Nun müssen wir zum Falle gehen, wobei das Nullideal sich nicht als Potenz eines Primideals darstellen lässt.

Satz 19. *Es sei in* $\mathfrak{R}$ $(0)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$ $(n>1)$, *wobei jedes* $\mathfrak{p}_i$ *ein in* $\mathfrak{R}$ *minimales Primideal bedeutet. Ferner sei* $r$ *ein durch jedes* $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *unteibares Element aus* $\mathfrak{R}$. *Dann ist jedes Primideal* $\mathfrak{p}_i'$ *in der Darstellung* $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$ *ein minimaler Primideal-teiler von einem aus* $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots\mathfrak{p}_n$.

Da $(r)$ durch jedes $\mathfrak{p}_i$ unteilbar ist, so muss $\mathfrak{p}_i'$ ein echter Teiler von einem aus $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots\mathfrak{p}_n$ sein. Nun setzen wir

$$(1) \qquad (r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}\,, \qquad \mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1'^{b_1-1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$$

und hier nehmen wir $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_1''\subset\mathfrak{p}_1'$ an, wobei $\mathfrak{p}_1''$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Da $\mathfrak{p}_1''$ nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1,\ldots\mathfrak{p}_s$ $(s\leqq n)$ aus $\mathfrak{p}_1,\ldots\mathfrak{p}_n$ enthalten kann, so wählen wir aus $\mathfrak{p}_1''$ ein durch jedes $\mathfrak{p}_1,\ldots\mathfrak{p}_s$ unteilbares Element $p_1''$. Dann wird

$$(2) \qquad (p_1'')=\mathfrak{p}_1'''\mathfrak{a}'\,, \qquad \mathfrak{p}_k\subset\mathfrak{p}_1'''\subseteqq\mathfrak{p}_1''\subset\mathfrak{p}_1'\,,$$

wo $\mathfrak{p}_k$ ein Primideal aus $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_s$ bedeutet. Aus (1) folgt damit $(r)\mathfrak{a}''=\mathfrak{p}_1'''\mathfrak{a}$. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}_1'$ ergibt sich daraus

$$(r)\mathfrak{a}''\mathfrak{p}_1'=(r)\mathfrak{p}_1'''\,, \qquad (\mathfrak{a}''\mathfrak{p}_1',\mathfrak{p}_k)=(\mathfrak{p}_1''',\mathfrak{p}_k)=\mathfrak{p}_1'''\,.$$

Aus (2) folgt damit $\mathfrak{a}''\subset\mathfrak{p}_1'''$ und daher erhalten wir unmittelbar $(\mathfrak{p}_1'''\mathfrak{p}_1',\mathfrak{p}_k)$

$=\mathfrak{p}_1'''$. Multiplizieren wir mit $\mathfrak{a}'$, so ergibt sich daraus $(p_1''\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_k\mathfrak{a}')=(p_1'')$. Danach haban wir $p_1''\equiv p_1''p_1'(\mathfrak{p}_k)$ für ein Element $p_1'$ aus $\mathfrak{p}_1'$ und daraus ergibt sich ein Widerspruch $\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{R}$, da $p_1''\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_k)$, $p_1'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1')$ ist. Hieraus folgt, dass jedes $\mathfrak{p}_i'$ in der Darstellung $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$ ein Teiler von einem, etwa $\mathfrak{p}_i$, aus $\mathfrak{p}_1,\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$ ist, und dass kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}_i'$ und $\mathfrak{p}_i$ eingeschaltet werden kann.

Satz 20. *Ist $pr=0$ für ein nilpotentes Element $p(\not\equiv 0)$ aus $\mathfrak{R}$, so muss $r$ durch ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal teilbar sein.*

Da $p$ nilpotent ist, so gibt es in $\mathfrak{R}$ nach dem früher erwähnten Hilfssatz nur endlich viele, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$ $(n\geqq 1)$. Zum Beweise nehmen wir an, dass $r$ durch jedes $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ unteilbar ist, und dass $p'$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{d}=[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n]$ ist. Dann müssen in den Darstellungen

$$(1)\qquad (r)=\mathfrak{p}_1'^{a_1'}\mathfrak{p}_2'^{a_2'}\ldots\ldots\mathfrak{p}_s'^{a_s'}, \qquad (r+p')=\mathfrak{p}_1''^{a_1''}\mathfrak{p}_2''^{a_2''}\ldots\ldots\mathfrak{p}_t''^{a_t''}$$

jede $\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_j''$ ein echter Teiler von einem aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$ sein. Nach Satz 19 sind $\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_j''$ ferner ein minimaler Primideal-teiler von einem aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$. Da $p'$ durch jedes $\mathfrak{p}_i$ teilbar ist, so erhalten wir ganz genau wie beim Beweise von Satz 18

$$(2)\qquad (r)=(r+p').$$

Daraus folgt $r+p'=rr'$ für ein Element $r'$ aus $\mathfrak{R}$. Aus $p'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$, $r\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i=1, \ldots\ldots n)$ ergibt sich damit $r'=e+p''$, $p''\equiv 0\,(\mathfrak{d})$ und $p'=rp''$. Dabei ist $p'$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{d}$ und folglich muss $\mathfrak{d}\equiv 0\,(r\mathfrak{d})$ sein. Daraus ergibt sich ohne weiteres

$$(3)\qquad \mathfrak{d}=(r)\mathfrak{d}.$$

Setzen wir nun $\mathfrak{d}'=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$, so ist offenbar $\mathfrak{d}'\leqq\mathfrak{d}$. Für ein beliebiges Element $d$ aus $\mathfrak{d}$ haben wir nach unserer Voraussetzung die Darstellung $(d)=\mathfrak{p}_1^{b_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{b_n}\mathfrak{p}_1'''\ldots\ldots\mathfrak{p}_v'''$ $(b_i\geqq 1,\ i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ und dabei ist $\mathfrak{p}'''$ ein echter Primideal-teiler von einem aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$. Danach ist $d\equiv 0\,(\mathfrak{d}')$, also

$$(4)\qquad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_n=[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_n].$$

Aus (3) und (4) folgt nnn

$$(p)=\mathfrak{p}_1^{c_1}\mathfrak{p}_2^{c_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{c_n}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1^{c_1-1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{c_n-1}$$
$$=(r)\mathfrak{p}_1\ldots\ldots\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}_1^{c_1-1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{c_n-1}=r(p)=(0)$$
$$c_i\geqq 1, \qquad i=1, 2, \ldots\ldots n.$$

für das im Satz angegebene Element $p$, womit wir bei einem Widerspruch angelangt sind, da im Satz $p\not\equiv 0$ vorausgesetzt ist. Es muss demnach $r$ durch ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal $\mathfrak{p}_i$ teilbar sein.

Eine unmittelbare Folgerung von Satz 20 möge noch besonderes formuliert werden.

Satz 21. *Existiert in $\mathfrak{R}$ ein Nullteiler, so ist jedes Element, welches durch kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal teilbar ist, regulär.*

Wir wenden uns jetzt zur Übertragung von Satz 10[1] dem Falle allgemeiner Ringe zu. Zunächst sei es die Grundbegriffe der Umkehrbarkeit eines Ideals im Quotientenringe $\mathfrak{R}_S$ erinnert.

Es sei $S$ die Gesamtheit aller regulären Elemente aus $\mathfrak{R}$, dann ist $S$ ein multiplikativ abgeschlossenes System. Man versteht unter dem „*Quotientenring*“ $\mathfrak{R}_S$ dei Menge aller der Elemente, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{R}$ mit zu $S$ gehörigen Nenner darstellen lassen.[2] Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, so bedeutet $\mathfrak{a}^{-1}$ das Ideal aller Elemente aus $R_S$, deren Produkte mit sämtlichen Elementen von $\mathfrak{a}$ ganz ausfallen. $\mathfrak{a}$ heisst „*umkehrbar*“, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{R}$ ist.[3]

Eine Verallgemeinerung von Satz 10 möge auf folgender Form formuliert werden

Satz 22. *Jedes minimale Primideal eines beliebigen regulären Hauptideals aus $\mathfrak{R}$ ist stets im Quotientenring $\mathfrak{R}_S$ umkehrbar.*

Nach Satz 10 genügt es, unseren Satz für den Ring mit Nullteiler zu beweisen. Ist $\mathfrak{R}=(r)$ für ein reguläres Element $r$, so ist offenbar $\mathfrak{R}\mathfrak{R}^{-1}=\mathfrak{R}$. Im anderen Fall ist $(r)=\mathfrak{p}'^{b_1}\dots\mathfrak{p}'^{b_m}_m$, wo $\mathfrak{p}'_i$ nach Satz 19 ein minimaler Primideal-teiler von einem aus den in $\mathfrak{R}$ minimalen Primidealen $\mathfrak{a}_1,\dots\mathfrak{p}_n$ ist. Für ein beliebiges Element $p$ aus $\mathfrak{p}_1'^{b_1-1}\mathfrak{p}'^{b_2}\dots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$ erhalten wir daraus

$$(1) \qquad (r)\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1'(p)\,.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{r}$ die Summe aller zu $p$ entsprechenden Ideale $\mathfrak{a}$, so ergibt sich aus (1)

$$(2) \qquad (r)\mathfrak{r}=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1'^{b_1-1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\dots\mathfrak{p}_m'^{b_m}=(r)\,.$$

Da $r$ aber regulär ist, erhalten wir aus (2)

$$(3) \qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{R}\,.$$

Ist $\mathfrak{R}_S$ der Quotientenring von $\mathfrak{R}$ durch dem System $S$ aller regulären Elemente aus $\mathfrak{R}$, so gehört ein Element $\frac{p}{r}$ aus $\mathfrak{R}_S$ nach (1) zu $\mathfrak{p}_1'^{-1}$ und folglich erhalten wir aus (2) und (3) $\mathfrak{p}_1'^{-1}\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{R}$; also ist unser Satz bewiesen.

Aus beiden letzten Sätzen folgt:

Satz 23. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler, und ist $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedener minimaler Primideal-teiler eines in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals $\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}'$ im Quotientenring $\mathfrak{R}_S$ umkehrbar.*

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots \mathfrak{p}_n$ alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale. Dann können wir ein Element $p_i$ finden, so dass

(1) S. Mori, loc. cit., 147.

(2) W. Krull, *Idealtheorie*, 18.

(3) Krull, loc. cit., 13.

$$p_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)\,,\quad p_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}')\,,\quad p_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}_j)\ \ (j=1,2,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots.n)$$

ist. Setzen wir nun $r=p_1+p_2+\cdots+p_n$, so ist $r$ nach Satz 21 regulär und $r\equiv 0\,(\mathfrak{p}')$. Folglich ist ein Primideal $\mathfrak{p}_1'$ in der Darstellung $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\mathfrak{p}_2'^{b_2}\ldots.\mathfrak{p}_m'^{b_m}$ durch $\mathfrak{p}'$ teilbar; nämlich ist $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_1'\leqq\mathfrak{p}'$, wobei $\mathfrak{p}_1$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal bedeutet. Nach Satz 22 ist $\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1'^{-1}=\mathfrak{R}$, Setzen wir nun $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'^{-1}=\mathfrak{a}$, so wird $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1'$ und daher $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}_1$. Damit muss $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'$ sein. Wäre $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_1$ verschieden, könnte wir in $\mathfrak{p}_1$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $p_1$ finden, und wir hätten $(p_1)=\mathfrak{p}_1^e\mathfrak{p}_1''\ldots.\mathfrak{p}_t''$. Nach $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1'$ folgte daraus $\mathfrak{p}_1'(p_1)=(p_1)$, oder $ep_1=p_1p_1'$, wo $p_1'$ ein Element aus $\mathfrak{p}_1'$ und $e$ das Einselement wäre. Aus $p_1\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ ergäbe sich damit ein Widerspruch $e-p_1'\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{R}=(\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1')=\mathfrak{p}'$. Also muss $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}_1'$ sein. Damit muss $\mathfrak{p}'$ nach 22 in $\mathfrak{R}_S$ umkehrbar sein.

Daher ergibt sich leicht

Zusatz 1. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler und ist $\mathfrak{p}''$ ein Primidealteiler eines in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals $\mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''=\mathfrak{p}$.*

Ist $\mathfrak{p}''=\mathfrak{R}$, so ist unsere Behauptung ganz trivial. Im anderen Fall können wir ganz genau wie beim Beweise von Satz 23 einem minimalen Primideal-teiler $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ finden, so dass $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'\leqq\mathfrak{p}''$ ist. Da nach Satz 23 aber $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'^{-1}=\mathfrak{R}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'^{-1}=\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$. Daher folgt $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$. Damit muss $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, also $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ sein.

Daher folgt ferner

Zusatze 2. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler und sind $\mathfrak{p}_1'',\mathfrak{p}_2'',\ldots.\mathfrak{p}_m''$ die echten Primideal-teiler eines in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals $\mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''^{a_1}\mathfrak{p}_2''^{a_2}\ldots.\mathfrak{p}_m''^{a_m}$ für jede positive ganze Zahlen $a_i$.*

Aus Zusatz 1 folgt $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''$ und daher ergibt sich $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''^{a_1}$ für jede positive ganze Zahl $a_1$. Auf gleicher Weise erhalten wir auch

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2''^{a_2},\ldots.,\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_m''^{a_m}\,.$$

Danach ergibt sich unmittelbar $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''^{a_1}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''^{a_1}\mathfrak{p}_2''^{a_2}=\cdots=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1''^{a_1}\mathfrak{p}_2''^{a_2}\ldots.\mathfrak{p}_m''^{a_m}$.

Um die Teilerfremdheit von zwei in $\mathfrak{R}$ minimalen Primidealen zu beweisen schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 2. *Es seien $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\ldots.\mathfrak{p}_n$ $(n\geqq 2)$ alle in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale und $\mathfrak{p}'$ sei ein minimaler Primideal-teiler von $\mathfrak{p}_1$. Dann ist $(\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots.\mathfrak{p}_n^{a_n},\mathfrak{p}'^k)=\mathfrak{R}$ für jede positive ganze Zahlen $a_i,k$.*

Ist $\mathfrak{p}'=\mathfrak{R}$, so ist unsere Behauptung trivial. Im anderen Falle sei es $p_1$ ein solches Element, dass $p_1\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$, $p_1\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i=2,3,\ldots.n)$ ist. Dann wird $(p_1)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_1''\ldots.\mathfrak{p}_m''$, wobei $\mathfrak{p}''$ ein echter Primideal-teiler von einem in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideal ist. Da $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}'$ ist, ergibt sich nach Zusatz 2 $(p_1)\,\mathfrak{p}'^k=\mathfrak{p}'^k\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_1''\ldots.\mathfrak{p}_m''=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_1''\ldots.\mathfrak{p}_m''=(p_1)$ für jede positive ganze Zahl $k$. Bezeichnen wir das Einselement aus $\mathfrak{R}$ mit $e$, so folgt daraus $ep_1=p_1p'$, wo $p'$ ein Element aus $\mathfrak{p}'^k$ bedeutet. Aus $p_1\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i=2,3,\ldots.n)$ folgt damit

$$(e-p')\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)\qquad (i=2,3,\ldots.n)\,.$$

Setzen wir jetzt $a=a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$, so ergibt sich daraus $(e-p')^a\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n})$, oder $e+p'r\equiv 0\,(\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n})$. Dabei ist $p'r$ aber ein Element aus $\mathfrak{p}'^k$; also ist $(\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}, \mathfrak{p}'^k)=\mathfrak{R}$.

Aus Hilfssatz 2 folgt ohne weiteres;

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{R}$ verschieden und ein minimaler Primidealteiler eines in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals $\mathfrak{p}$, dann enthält $\mathfrak{p}'$ kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal ausser $\mathfrak{p}$.*

Nun sind wir in der Lage, das Ziel zu beweisen:

Satz 24. *Jede zwei verschiedene, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale sind stets teilerfremd, wenn es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler gibt.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass die Anzahl $n$ der in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$ grösser als 1 ist. Es sei $\mathfrak{d}_1=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$ und $p_1$ ein solches Element, dass $p_1\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$, $p_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ $(i=2,3,\ldots\ldots n)$ ist. Ferner sei $d_1$ ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element aus $\mathfrak{d}_1$. Setzen wir $r=d_1+p_1$, so ist $r$ nach Satz 21 regulär und durch $\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{d}_1)$ teilbar. Wenn $(r)=\mathfrak{R}$ ist, so ist $\mathfrak{p}_1$ mit anderem $\mathfrak{p}_i$ teilerfremd. Im anderen Falle können wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

I. Es sei $(r)=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'\ldots\ldots\mathfrak{p}_m'$, wobei jedes $\mathfrak{p}_j'$ kein Teiler von $\mathfrak{p}_1$ ist. Dann folgt nach Zusatz 2 von Satz 23 $(r)(d_1)=(d_1)$ und aus $(d_1)\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$ ergibt sich damit $e\equiv rr'\,(\mathfrak{p}_1)$. Also ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{R}$ und in diesem Falle ist unser Satz bewiesen.

II. Es sei $(r)=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'\ldots\ldots\mathfrak{p}_m'$, wobei $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{p}_j'$ $(j=1,2,\ldots\ldots s)$ $(1\leqq s\leqq m)$ teilbar ist. Dann erhalten wir nach Zusatz 2

$$(1) \qquad (r)\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{s+1}'\ldots\ldots\mathfrak{p}_m'.$$

Multiplizieren wir (1) mit $\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$ $(i\neq 1)$, so ergibt sich nach Hilfssatz 3 und Zusatz 2

$$(2) \qquad (r)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n, \qquad \text{oder}$$

$$(r)\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_\mu'\mathfrak{p}_{\mu+1}'\ldots\ldots\mathfrak{p}_t'\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n,$$

wo jede $\mathfrak{p}_\mu', \mathfrak{p}_{\mu+1}', \ldots\ldots \mathfrak{p}_t'$ ein minimaler Primideal-teiler von $\mathfrak{p}_i$ bedeuten. Im ersten Falle von (2) ergibt sich $rr'p'=p'$ für ein Element $p'$ aus $\mathfrak{p}_1\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$, das durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbar ist. Da $p'\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ ist, so folgt $e\equiv rr'\,(\mathfrak{p}_i)$ und $e\equiv 0\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i)$. Da aber $\mathfrak{d}_1\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$ ist, so erhalten wir daraus $e\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$ oder $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)=\mathfrak{R}$. Im zweiten Falle von (2) ergibt sich auch $(p_i')\mathfrak{p}_\mu'\mathfrak{p}_{\mu+1}'\ldots\ldots\mathfrak{p}_t'=r(p_i')$ für ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element $p_i'$ aus $\mathfrak{p}_1\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n$, da $(p_i')=\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{i-1}^{a_{i-1}}\mathfrak{p}_{i+1}^{a_{i+1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\mathfrak{p}_1''\ldots\ldots\mathfrak{p}_k''$ ist. Daraus folgt $\mathfrak{p}_\mu'\mathfrak{p}_{\mu+1}'\ldots\ldots\mathfrak{p}_t'\equiv 0\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i)$, oder $\mathfrak{p}_\mu'\ldots\ldots\mathfrak{p}_t'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)$. Nach Hilfssatz 2 erhalten wir aber $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\mu')=\mathfrak{R}$, $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_{\mu+1}')=\mathfrak{R}, \ldots\ldots (\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_t')=\mathfrak{R}$ und folglich ist $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_\mu'\ldots\ldots\mathfrak{p}_t')=\mathfrak{R}$. Danach ist $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_i)=\mathfrak{R}$ und unser Satz ist bewiesen.

Satz 25. *Gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler, so ist eine hinreichend grosse Potenz jedes in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideals immer ein idempotentes Ideal mit Einselement, wenn wenigstens zwei in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale existieren.*

Nach Hilfssatz 1 gibt es nur endlich viele in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2, \ldots . \mathfrak{p}_n$, und wir erhalten die Darstellung

$$(1) \qquad (0)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots .\mathfrak{p}_n^{a_n}.$$

Aus Satz 24 ergibt sich $e=p_1'+p_2$, $e=p_1''+p_3, \ldots . e=p_1^{(n-1)}+p_n$, wo $p_1^{(i)}, p_2, \ldots . p_n$ die Elemente aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . \mathfrak{p}_n$ bedeuten. Im Produkt

$$(2) \qquad e=(p_1'+p_2)^{a_1+a_2}\ldots .(p_1^{(n-1)}+p_n)^{a_1+a_n}=p_1+rp_2^{a_2}\ldots .\mathfrak{p}_n^{a_n}$$

ist $p_1$ ein Element aus $\mathfrak{p}_1^{a_1}$, und aus (1) folgt $p_1 \times rp_2^{a_2}\ldots .p_n^{a_n}=0$. Multiplizieren wir (2) mit $p_1$, so ergibt sich leicht $p_1=p_1^2 \neq 0$. Ist $p$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}_1^{a_1}$, so wird nach (1) und (2)

$$p=pe=pp_1=p^{xr}p_2^{a_2}\ldots .p_n^{a_n}=pp_1.$$

Danach ist $\mathfrak{p}_1^{a_1}$ ein idempotentes Ideal mit Einselement $p_1$.

## Beweis des Hauptsatzes.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, den Hauptsatz als das Ziel dieser Note zu beweisen:

**Hauptsatz.** *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einselement, und jedes Hauptideal in $\mathfrak{R}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar. Dann besitzt $\mathfrak{R}$ eine direkte Summenzerlegung*

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_n,$$

*wobei $n$ eine endliche Zahl und $\mathfrak{R}_i$ einen solchen Ring bedeutet, dass*

a) *$\mathfrak{R}_i$ Einselement besitzt,*

b) *$\mathfrak{R}_i$ ein primärer Ring, oder ein Integritätsbereich ist,*

c) *Im ersten Fall von* b) *das einzige Primideal ein Hauptideal ist,*

d) *Im zweiten Fall von* b) *jede Idealquotienten-kette $(a):\mathfrak{a}_1 \subset (a):\mathfrak{a}_2 \subset (a):\mathfrak{a}_3 \subset \ldots .$ von einem beliebigen Hauptideal $(a)$ aus $\mathfrak{R}_i$ im Endlichen abbricht, und ferner jedes höchste Primideal eines beliebigen Hauptideals aus $\mathfrak{R}_i$ stets umkehrbar ist.*

*Dieser Schluss kann auch umgekehrt werden.*

Ist $\mathfrak{R}$ ein Integritätsbereich, so sind die im Satz ausgesprochenen Bedingungen erfüllt.(1) Im anderen Fall gibt es in $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz I nur endlich viele, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . \mathfrak{p}_n$. Ist $n=1$, so ist unsere Behauptung nach Satz 18 schon einleuchtend. Im falle $n>1$ besitzt $\mathfrak{R}$ nach Satz 25 eine direkte Summenzerlegung

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_n,$$

wobei $\mathfrak{R}_i$ einen Ring mit Einselement bedeutet. Ferner ist

$$\mathfrak{p}_i^{a_i}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_{i-1}+\mathfrak{R}_{i+1}+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_n.$$

---

(1) S. Mori, loc. cit., 153.

Ist dabei $a_i=1$, so ist $\mathfrak{R}_i$ offenbar ein Integritätsbereich, und weiter ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{R}_i$ auch als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen aus $\mathfrak{R}_i$ darstellbar. Folglich müssen in $\mathfrak{R}_i$ die im Satz gegebenen Bedingungen d) erfüllt sein.[1] Ist $a_i>1$, so besitzt $\mathfrak{R}_i$ ein nilpotentes, in $\mathfrak{R}_i$ minimales Primideal. Da jedes Hauptideal in $\mathfrak{R}_i$ auch als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen aus $\mathfrak{R}_i$ darstellbar ist, so muss $\mathfrak{R}_i$ nach Satz 18 auch ein primärer Ring sein, deren einziges Primideal ein Hauptideal ist. Also ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teiles benötigen wir folgenden Hilfssatz:

*Ist das einzige Primideal $\mathfrak{p}_i$ im primären Ringe $\mathfrak{R}_i$ ein Hauptideal, so ist jedes durch $\mathfrak{p}_i$ teilbare Hauptideal in $\mathfrak{R}_i$ als eine Potenz von $\mathfrak{p}_i$ darstellbar.*

Da $\mathfrak{p}_i=(p_i)$ und $\mathfrak{p}_i$ ein nilpotentes maximales Ideal in $\mathfrak{R}_i$ ist, so wird $p=rp_i^k$, $r\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$ $(k\geqq 1)$ für ein beliebiges Element $p$ aus $\mathfrak{p}_i$. Daraus erhalten wir

$$pr'=rr'p_i^k=(e+p_ir'')p_i^k\,, \tag{1}$$

da $\mathfrak{R}_i$ primär ist. Da $p_i$ aber nilpotent ist, ergibt sich daraus

$$pr'p_i^l=ep_i^{k+l}=p_i^{k+l}\equiv 0\ \big((p)\big) \tag{2}$$

für eine hinreichend grösse Zahl $l$. Aus (1) und (2) folgt damit

$$pr'p_i^{l-1}=ep_i^{k+l-1}\equiv 0\ \big((p)\big)\,.$$

In solcher Weise erhalten wir endlich $p_i^k\equiv 0\ \big((p)\big)$; also ist $(p_i^k)=\mathfrak{p}_i^k=(p)$ oder $(p)=\mathfrak{p}_i^k$.

Nach diesem Hilfssatz und nach dem in meiner Arbeit bewiesenen Hauptsatz[2] ist jedes Hauptideal in $\mathfrak{R}_i$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen aus $\mathfrak{R}_i$ darstellbar. Dies zeigt uns, dass jedes Hauptideal in $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\cdots\cdots+\mathfrak{R}_n$ sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt. Damit sind wir am Ziel.

Am Schlusse fügen wir noch einen Satz hinzu.

Satz. *Es sei jedes Hauptideal im kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einselement als ein Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar. Dann ist die Darstellung eindeutig, wenn wir in der Darstellung nur die möglichst kleine Potenz des Primideals nehmen.*

Beim Beweise stützen wir uns auf die im Hauptsatz gewonnene Darstellung $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2+\ldots.+\mathfrak{R}_n$. Ist $\mathfrak{R}_i$ ein primärer Ring, so ist die Darstellung jedes Hauptideals in $\mathfrak{R}_i$ als Potenzprodukt des Primideals offenbar eindeutig. Im anderen Fall ist jedes in $\mathfrak{R}_i$ minimale Primideal $\mathfrak{p}$ umkehrbar

(1) S. Mori, loc. cit., 153.

(2) S. Mori, loc. cit., 153.

und folglich muss $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$, und $\mathfrak{p}^n$ für jede ganze Zahl $n$ primär sein.[1] Ferner ist jedes Primideal, welches in einer Produktdarstellung eines Hauptideals aus $\mathfrak{R}_i$ auftritt, stets in $\mathfrak{R}_i$ minimal. Aus diesen Tatsachen folgt auch die Eindeutigkeit der Produktdarstellung des Hauptideals in $\mathfrak{R}_i$. Die im Satz behauptete Eindeutigkeit folgt nun aus der Bemerkung, dass jedes Primideal in $\mathfrak{R}$ stets $n-1$ Ringe aus $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots. \mathfrak{R}_n$ enthalten muss, und dass jedes $\mathfrak{R}_i$ das Einselement besitzt.

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Journal **8** (1938), Satz. 5.