Über die Noetherschen fünf Axiome[1] in kommutativen Ringen.

Von

Keizi Kubo.

(Eingegangen am 31. Jan. 1940.)

Nach E. Noether ist die hinreichende Bedingung dafür, dass jedes von Einheits- und Nullideal verschiedene Ideal des allgemeinen kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen, von Einheits- und Nullideal verschiedenen Primidealen darstellen lässt, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden fünf Axiome erfüllt sind:

1. Der Teilerkettensatz.
2. Der Vielfachenkettensatz modulo jedem von Nullideal verschiedenen Ideal (Der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.[2])
3. Existenz des Einheitselementes.
4. Ring ohne Nullteiler.
5. Ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper.

Aber werden diese Bedingungen notwendig sein? Bekanntlich ist aber das Axiom 3 die Folge von 5 und ausserdem folgt das Axiom 1 aus 2 und 4.[3] Was ist dann notwendig? Auf diese Frage antwortet E. Noether, dass diese obig bezeichnete Bedingung auch notwendig unter der wichtigen Voraussetzung ist, dass alle von Nullideal verschiedenen Primideale einfache Ideale sind und umgekehrt.[4]

Auch für einen Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ zeigt B. L. v. d. Waerden[5] die folgenden drei Axiome als die hinreichenden Bedingungen dafür, dass jedes Ideal von $\mathfrak{o}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt:

1.′ Der Teilerkettensatz.

2.′ Alle von Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.

3.′ Ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper.

Und umgekehrt spricht Waerden aus, dass diese Axiome auch notwendig

---

(1) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, Math. Annalen **96** (1926), 26.

(2) W. Krull, *Idealtheorie*, (1935), 14.

(3) Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17** (1935), 342.

S. Mori, Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz, dieses Jour., **6** (1936), 144.

(4) E. Noether, loc. cit., § 9.

(5) B. L. v. d. Waerden, *Moderne Algebra*. II (1931), 97.

unter der gleichartigen Voraussetzung[1] wie die Noethersche sind.

Aber im allgemeinen kommutativen Ringe ist jedes Primideal nicht immer teilerlos. Und noch ist eine solche Noethersche Voraussetzung in Ringe ohne Nullteiler fast gleichwertig wie die des Teilerkettensatzes. Somit können wir nicht annehmen, dass diese Bedingung notwendig ist. So nehmen ich in der vorliegenden Arbeit an, dass Noethersche eindeutige Zerlegung des Ideales in der folgenden Fassung gilt, und unter dieser Voraussetzung werde ich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen untersuchen.

Voraussetzung.

In dem kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ sei jedes von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$[2] verschiedene Ideal eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen, von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$ verschiedenen Primidealen darstellbar.[3]

Notwendige Bedingungen.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir zunächst die notwendigen Bedingungen, die in $\mathfrak{R}$ erfüllt werden sollen, untersuchen. Im folgenden sei jedes $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$ verschiedenes Primideal aus $\mathfrak{R}$.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in $\mathfrak{R}$, so lässt jedes von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ verschiedene Ideal von Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ auch sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ verschiedenen Primidealen darstellen.*

Beweis: Ist $\bar{\mathfrak{a}}$ ein beliebiges von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ verschiedenes Ideal aus $\bar{\mathfrak{R}}$, so wird $\mathfrak{a}=(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{p})$ ein von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$ verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ und aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\ldots\mathfrak{p}_r\,. \tag{1}$$

Nun nach dem Homomorphiesatz ist $\mathfrak{R}\sim\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ und bei der Homomorphie wird jedem Primideal $\mathfrak{p}_1\supset\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ das Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_1=\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$ aus $\bar{\mathfrak{R}}$ zugeordnet. Daraus wird dem Ideal $\mathfrak{a}$ das Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ zugeordnet und aus (1) ist $\bar{\mathfrak{a}}$ als

$$\bar{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_r \tag{2}$$

darstellbar; dabei ist $\bar{\mathfrak{p}}_i$ das $\mathfrak{p}_i$ zugeordnete Primideal aus $\bar{\mathfrak{R}}$. Denn aus $\bar{a}\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{a}})$ folgt $a\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ und aus (1) wird $a=\sum p_1p_2\ldots\ldots p_r$, $p_i\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$, also ist $\bar{a}=\sum\overline{p_1\ldots\ldots p_r}=\sum\bar{p}_1\ldots\ldots\bar{p}_r\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_1\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_r)$. Umgekehrt sei $\bar{a}'$ ein Element

(1) B. L. v. d. Waerden, loc. cit., 101.

(2) Im folgen bedeutet $\mathfrak{o}$ das Einheitsideal und $\mathfrak{n}$ das Nullideal.

(3) Für $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$ werden wir nicht auf die Eindeutigkeit der Produktzerlegung denken können. Etwa im Ringe der ganzen rationalen Zahlen, können wir nicht die Zahl 1, 0 eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen. Auch wird es gültig sein, dass wir die Ideale $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{n}$ aus Produktfaktoren wegheben werden.

von $\bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_r$, so ist $\bar{a}'$ als $\bar{a}' = \sum \bar{p}'_1 \ldots . \bar{p}'_r$, $\bar{p}'_i \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}}_i)$ darstellbar, dabei ist $p'_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i)$, $p'_1 \ldots . p'_r \equiv 0\,(\mathfrak{a})$ und daher folgt $\bar{a}' = \sum \bar{p}'_1 \ldots . \bar{p}'_r = \sum \overline{p'_1 \ldots . p'_r} \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{a}})$. Nämlich jedes von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ verschiedene Ideal von $\bar{\mathfrak{R}}$ lässt sich als Potenzprodukt von endlich vielen, von $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ verschiedenen Primidealen darstellen. Daher genügt es zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Nun sei a ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{R}}$, dann folgt leicht $(a) \geqq (a)\bar{\mathfrak{o}}$. Ist $(a) = \bar{\mathfrak{o}}$, so wird $(a) = (a^2)$ nach dem soeben gewonnenen Ergebnisse, und folglich ergibt sich die Existenz des Einheitselementes von $\bar{\mathfrak{R}}$, da $\bar{\mathfrak{R}}$ ein Ring ohne Nullteiler ist. Ist $(a) \neq \bar{\mathfrak{o}}$, so können wir $(a) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n$, $(a)\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}'_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}$ setzen. Es seien nun $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots . , \bar{\mathfrak{p}}_s$ alle gemeinsamen Primideale von (a) und $(a)\bar{\mathfrak{o}}$, dann ist

$$(a) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_s \bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n\,, \qquad (a)\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_s \bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}\,.$$

Multiplizieren wir $(a)\bar{\mathfrak{o}}$ mit $\bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n$, so erhalten wir

$$(a)\bar{\mathfrak{o}}\bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n = \bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_s \bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n \bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_{n'} = (a)\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}\,,$$

und da $\bar{\mathfrak{R}}$ ein Ring ohne Nullteiler ist, so folgt

$$\bar{\mathfrak{o}}\bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_n = \bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}\,. \tag{3}$$

Ist $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} = \ldots . = \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}$, so folgt nach (3) etwa $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} \geqq \bar{\mathfrak{p}}_{s+1}$ und auch nach (3) $\bar{\mathfrak{p}}_{s+1} \geqq \bar{\mathfrak{p}}'_{s+1}$ und daher muss $\bar{\mathfrak{p}}_{s+1} = \bar{\mathfrak{p}}'_{s+1}$ sein; das ist aber ein Widerspruch. Andererseits gibt es in $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1}, \ldots . , \bar{\mathfrak{p}}'_{n'}$ ein solches Primideal, etwa $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1}$, dass $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1}$ kein anderes $\bar{\mathfrak{p}}'_i$ $(i = s+2, \ldots . , n')$ enthält, und daraus ergibt sich sogleich etwa $\bar{\mathfrak{p}}'_{s+1} = \bar{\mathfrak{p}}_{s+1}$, also ein Widerspruch. Damit muss $(a) = (a)\bar{\mathfrak{o}}$ sein. Daher gibt es ein Element $\bar{r}$ in $\bar{\mathfrak{R}}$, so dass $a = a\bar{r}$ ist. Daraus ergibt sich $a\bar{r} = a\bar{r}^2$, $\bar{r} = \bar{r}^2$; nämlich ist $\bar{r}$ das Einheitselement von $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ ein Integritätsbereich. Ferner ist jedes Ideal in $\bar{\mathfrak{R}}$ als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellbar, und folglich ist jedes Primideal aus $\bar{\mathfrak{R}}$ ein in $\bar{\mathfrak{R}}$ minimales Primideal und seine Potenz stets primär.[1] Damit muss die Produktzerlegung jedes Ideales in $\bar{\mathfrak{R}}$ eindeutig sein.

Satz 2. *Alle von* $\mathfrak{n}$ *verschiedenen Primideale aus* $\mathfrak{R}$ *sind teilerlos.*[2]

Beweis: Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{R}$. Ist a ein beliebiges von o verschiedenes Element aus $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, so wird auch $a^2 \neq 0$, und daher ist $a \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, $a^2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Wenn stets $(a, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$ ist, so wird $\mathfrak{p}$ teilerlos, und der Satz ist bewiesen. Daher setzen wir $(a, \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{o}$ voraus. Dann, wegen $(a^2, \mathfrak{p}) \leqq (a, \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{o}$ und unserer Voraussetzung ergibt sich

$$(a, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1 \ldots . \mathfrak{p}_r\,, \qquad (a^2, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}'_1 \ldots . \mathfrak{p}'_s\,;$$

also in $\bar{\mathfrak{R}}$
$$(a) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_r\,, \qquad (a^2) = \bar{\mathfrak{p}}'_1 \ldots . \bar{\mathfrak{p}}'_s\,.$$

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, II. dieses Jour. **9** (1939), 154.

(2) Dieser Satz ist die Noethersche Voraussetzung.

Da aber $(a^2)=(a)^2$ ist, so folgt $(a^2)=\bar{\mathfrak{p}}_1' \ldots \bar{\mathfrak{p}}_s'=\bar{\mathfrak{p}}_1^2 \ldots \bar{\mathfrak{p}}_r^2$, und daraus ergibt sich ohne weiteres nach Satz 1

$$(a, \mathfrak{p})^2=(a^2, \mathfrak{p})\,. \tag{1}$$

Nun erhalten wir aus (1) $\mathfrak{p}=(a, \mathfrak{p})\mathfrak{p}$. Denn, sonst bekanntlich $\mathfrak{p}\supset(a, \mathfrak{p})\mathfrak{p}$ wäre und daher gäbe es ein Element p, so dass

$$p\equiv 0\ (\mathfrak{p})\,, \qquad p\not\equiv 0\ (a\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2)\,. \tag{2}$$

Da nach (1) $(a^2, a\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2)=(a^2, \mathfrak{p})$ ist, so hätten wir

$$p=(\alpha+r)a^2+ap_1+p_2\,, \quad r\equiv 0\ (\mathfrak{o})\,, \quad p_1\equiv 0\ (\mathfrak{p})\,, \quad p_2\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)\,, \tag{3}$$

wo α eine ganze Zahl ist. Daraus folgte

$$(\alpha+r)a^2\equiv 0\ (\mathfrak{p})\,,$$

nämlich $\qquad (\alpha+r)^2a^2\equiv 0\ (\mathfrak{p}) \qquad$ oder $\qquad (\alpha+r)a\equiv 0\ (\mathfrak{p})\,.$

Damit folgte auf (3) $p\equiv 0\ (a\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2)$. Dies widerspricht (2). Daher muss $\mathfrak{p}=(a, \mathfrak{p})\mathfrak{p}$ sein; was aber unserer Voraussetzung widerspricht. Also muss stets $(a, \mathfrak{p})=\mathfrak{o}$ sein, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 3. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{p}^{i+1}$ für jede ganze Zahl i.*

Wenn $\mathfrak{p}^i=\mathfrak{p}^{i+1}$ ist, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Es sei damit $\mathfrak{p}^i\supset\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}^{i+1}$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_k$, dann wird $\mathfrak{p}_1\geqq\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n\supset\mathfrak{p}^{i+1}$ oder $\mathfrak{p}_1\geqq\mathfrak{p}$, und nach Satz 2 ergibt sich $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$. Ebenso ist $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2=\ldots=\mathfrak{p}_k=\mathfrak{p}$.

Daraus folgt $\qquad \mathfrak{p}^i\supset\mathfrak{p}^k\supset\mathfrak{p}^{i+1}\,;$

das kann nicht für jede ganze Zahl i gelten, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 4. *Jede Potenz $\mathfrak{p}^r$ $(r\geqq 1)$ von $\mathfrak{p}$ ist ein Primärideal und $\mathfrak{p}$ ist das zugehörige Primideal.*

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{p}^r$ primär und $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal ist, genügt es folgende drei Eigenschaften nachzuweisen:

(1) $\mathfrak{p}^r\equiv 0\ (\mathfrak{p})$,

(2) aus $b\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ folgt, dass es ein ρ gibt, so dass $b^\rho\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)$,

(3) aus $ab\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)$ und $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)$ folgt $b\equiv 0\ (\mathfrak{p})$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Beweises können wir hier $\mathfrak{p}^{r-1}\not\equiv\mathfrak{p}^r$ annehmen. (1) und (2) sind selbstverständlich. Wir werden nun (2) beweisen. Wenn $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist, so wird $ab\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ und aus der Definition des Primideales folgt $b\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Wenn $a\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)$ ist, so gibt es ein i, so dass $a\equiv 0\ (\mathfrak{p}^i)$ aber $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{i+1})$ ist (dabei ist $r-1\geqq i\geqq 1$). Da nach Satz 3 $\mathfrak{p}^i=(a, \mathfrak{p}^{i+1})$ ist, so folgt aus $ab\equiv 0\ (\mathfrak{p}^r)\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{i+1})$

$$b\mathfrak{p}^i=(ab, b\mathfrak{p}^{i+1})\leqq\mathfrak{p}^{i+1}\,.$$

Nun sei $b\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Dann wird $(b, \mathfrak{p})=\mathfrak{o}$, da nach Satz 2 $\mathfrak{p}$ teilerlos ist. Daher folgt

$$\mathfrak{p}^i\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^i(b, \mathfrak{p})=(b\mathfrak{p}^i, \mathfrak{p}^{i+1})\leqq\mathfrak{p}^{i+1}\,.$$

Andererseits folgt $\mathfrak{p}^{i+1} \leqq \mathfrak{p}^i\mathfrak{o}$ aus $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$, und folglich ist $\mathfrak{p}^i\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^{i+1}$. Also muss $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ sein. Das widerspricht der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal ist. Daher muss $b \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ sein.

Satz 5. *Jeder Teiler* $\mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{\rho_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\rho_r}$ *ist stets als*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\sigma_r}, \qquad 0 \leqq \sigma_i \leqq \rho_i \tag{1}$$

darstellbar.(1)

Beweis. Wenn $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ ist, so soll von unserer Voraussetzung

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1'^{\sigma_1'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_s'^{\sigma_s'}$$

sein. Aus

$$\mathfrak{a} \equiv 0\ (\mathfrak{b}) \tag{2}$$

oder

$$\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\rho_r} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1'^{\sigma_1'} \ldots\ldots \mathfrak{p}_s'^{\sigma_s'}) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1'^{\sigma_1}) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1')$$

folgt etwa $\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1')$, und nach Satz 2 muss $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1'$ sein. Ebenso muss jedes $\mathfrak{p}_i'$ $(i = 1, \ldots\ldots, s)$ unter den $\mathfrak{p}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots\ldots, r)$ vorkommen. Also lässt $\mathfrak{b}$ sich als Potenzprodukt von einigen $\mathfrak{p}_\nu$ darstellen. Nun der Vorteil halber zeichnen wir mit $\mathfrak{p}^0$ ein Primideal, welches nicht in unsere Darstellung von $\mathfrak{b}$ vorkommt, adjungieren es in die Faktoren von $\mathfrak{b}$ und darstellen $\mathfrak{b}$ als Potenzprodukt von $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_r$, so erhalten wir die Darstellung

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\sigma_r}, \qquad \sigma_i \geqq 0\,. \tag{3}$$

Wenn im obigen Fall $\sigma_i = 0$ ist, so hat $\mathfrak{p}_i^0$ keinen Sinn und zeigt (3), dass bei unserer Voraussetzung $\mathfrak{p}_i$ nicht in die Darstellung von $\mathfrak{b}$ auftritt. Aus (2), (3) ist nun

$$\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\rho_r} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{\sigma_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\sigma_r}) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{\sigma_i})\,.$$

Da aber für $i \neq j$ $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ ist, so folgt daraus

$$\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{i-1}^{\rho_{i-1}} \mathfrak{p}_{i+1}^{\rho_{i+1}} \ldots\ldots \mathfrak{p}_r^{\rho_r} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\,,$$

und nach Satz 4 ergibt sich

$$\mathfrak{p}_i^{\rho_i} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{\sigma_i}) \qquad (i = 1, \ldots\ldots, r)\,.$$

Damit muss $0 \leqq \sigma_i \leqq \rho_i$ $(i = 1, \ldots\ldots, r)$ sein und unser Satz ist bewiesen.

Aus (1) kennen wir leicht, dass $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Teiler hat und daraus erhalten wir die folgenden Zusätze:

Zusatz 1. *In* $\mathfrak{R}$ *gilt der Teilerkettensatz.*

Zusatz 2. *In* $\mathfrak{R}$ *gilt der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.*

Satz 6. *In* $\mathfrak{R}$ *gibt es das Einheitselement.*

Zunächst muss $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$ sein. Denn bekanntlich ist $\mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}^2$. Ist $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{o}^2$, so soll nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{p}_1 \ldots\ldots \mathfrak{p}_r$, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{o}$ sein. Aber aus $\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{p}_1 \ldots\ldots \mathfrak{p}_r \subset \mathfrak{p}_i$ folgt $\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{p}_i$. Das ist ein Widerspruch. In $\mathfrak{R}$ gilt der

(1) Dieser Satz ist die Waerdensche Voraussetzung.

Teilerkettensatz, und $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^2$ ist; daraus folgt die Existenz des Einheitselementes.[1]

Satz 7. *In $\Re$ gibt es ein und einziges von o verschiedenes idempotentes Element.*

Beweis: Für das Einheitselement e von $\Re$ ist $e^2=e$. Nach Satz 6 gibt es damit in $\Re$ mindestens ein von o verschiedenes idempotenes Element. Nun setzen wir die Existenz des idempotenten Elementes e_1 ausser e, o voraus, so erhalten wir folgende Ergebnisse; d. h. sei $\mathfrak{X}$ die Gesamtheit aller Elemente x, die $e_1x=x$ erfüllten, und $\mathfrak{Y}$ die Gesamtheit aller Elemente y die $e_1y=0$ erfüllen, so bilden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Ideale, und offenbar ist $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]=\mathfrak{n}$, $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{o}$. Ist r ein beliebiges Element aus $\Re$, so wird $e_1^2=e_1$, $re_1^2=re_1$, $e_1(re_1)=re_1$, nämlich wird $re_1=x$ ein Element von $\mathfrak{X}$, und aus

$$re_1-re_1^2=0\,, \qquad e_1(r-re_1)=0\,,$$

ergibt sich, dass $r-re_1=y$ ein Element von $\mathfrak{Y}$ ist. Daher ist

$$r=x+y\,, \qquad x\equiv 0\ (\mathfrak{X})\,, \qquad y\equiv 0\ (\mathfrak{Y})\,,$$

was zeigt, dass $\Re$ die direkte Summe von Idealen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ ist, nämlich

$$\Re=\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\,.$$

Ferner aus $e_1\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$, $e_1\equiv 0\ (\mathfrak{X})$ folgt unmittelbar $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^2\neq\mathfrak{n}$, $\neq\mathfrak{o}$. Das widerspricht unserer Voraussetzung; womit der Satz bewiesen ist.

Satz 8. *In $\Re$ ist das Radikal*[2] *prim.*

Beweis: Wäre das Radikal $\mathfrak{r}$ von $\Re$ nicht prim, so nach dem Durchschnittssatz von Noether ergäbe sich

$$\mathfrak{r}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_k] \qquad (k\geqq 2)\,.$$

Da jedes zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_i$ teilerlos ist, so folgte

$$\mathfrak{r}=[\mathfrak{p}_1^{a_1}, \mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}]\,, \qquad \Re=(\mathfrak{p}_1^{a_1}, \mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k})\,, \qquad \mathfrak{r}=\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}\,.$$

Damit könnte wir aus der Existenz von Einheitselement e zwei Elemente e_1 und e_2 finden, so dass $e\equiv e_1+e_2$, $e_1\equiv e_1^2\ (\mathfrak{r})$, $e_2\equiv e_2^2\ (\mathfrak{r})$, $e_1\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{a_1})\not\equiv 0\ (\mathfrak{r})$ wären. Daher folgte $e_1=e_1^2+r$ für ein Element r aus $\mathfrak{r}$. Da aber für eine passende Zahl n

$$(e_1-e_1^2)^n=r^n=0\,, \qquad \text{oder} \qquad e_1^n=e^{n+1}a\not\equiv 0\ (\mathfrak{r})$$

ist, so ergäbe sich

$$e_1^n=e_1^n(e_1a)^n\,, \qquad e_1^na^n=(e_1^na^n)^2\neq 0\,.$$

Das zeigte die Existenz des idempotenten Elementes ausser e und o entgegen Satz 7. Damit muss das Radikal $\mathfrak{r}$ prim sein.

---

(1) S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, dieses Jour., **1** (1930), 159.

(2) Die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus $\Re$ heisst das *Radikal von* $\Re$.

Aus den soeben gewonnenen Ergebnissen erhalten wir nun die folgenden vier Bedingungen als die notwendigen dafür, dass in $\mathfrak{R}$ unsere Voraussetzung erfüllt sein soll:

I. *In $\mathfrak{R}$ gilt der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.*

II. *In $\mathfrak{R}$ gibt es das Einheitselement.*

III. *In $\mathfrak{R}$ ist das Radikal $\mathfrak{r}$ prim.*

IV. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*

Hinreichende Bedingungen.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend. Denn aus I, II ergibt sich der Teilerkettensatz.(1) Nach I ist jedes von $\mathfrak{n}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ teilerlos(2) und daraus folgt, dass in $\mathfrak{R}$ jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ein Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist, nämlich

$$\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]. \tag{1}$$

Anderseits aus IV ergibt sich, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ und für jede ganze Zahl n kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}^n$ und $\mathfrak{p}^{n+1}$ eingeschaltet werden kann.(3) Derhalb wird jedes $\mathfrak{p}^n$ nach dem Beweis von Satz 4 stets primär und ferner wird jedes Primärideal $\mathfrak{q}$ eine Potenz vom zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}$ sein.(4) Aber nach III ist $\mathfrak{R}$ nicht als eine direkte Summe darstellbar. Denn, wäre $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2$, so hätten wir für Einheitselement e von $\mathfrak{R}$

$$e=r_1+r_2, \qquad r_1\equiv 0\ (\mathfrak{R}_1), \qquad r_2\equiv 0\ (\mathfrak{R}_2), \qquad r_1r_2=0,$$

und daraus ergäbe sich $r_1=r_1^2$, $r_2=r_2^2$. Daher würde

$$r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{r}), \qquad r_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{r}), \qquad r_1r_2\equiv 0\ (\mathfrak{r})$$

entgegen III. Folglich ist für jedes $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{n}$ stets $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$. Also aus (1) erhalten wir die Darstellung

$$\mathfrak{a}=[\mathfrak{p}_1^{\rho_1}, \mathfrak{p}_2^{\rho_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n^{\rho_n}],$$

und wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{p}_1^{\rho_1}, \mathfrak{p}_2^{\rho_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n^{\rho_n}$ ergibt sich

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\mathfrak{p}_2^{\rho_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{\rho_n},$$

und weiter ist diese Darstellung offenbar eindeutig.

Folgerungen.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

Im kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass

(1) S. Mori, Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz, loc. cit.

(2) E. Noether, loc. cit., § 7.

(3), (4) M. Sono, On Congruences. II. Memo. of Science, Kyoto Imp. Univ. **111** (1918), 123.

jedes von $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{n}$ *verschiedene Ideal von* $\mathfrak{R}$ *sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen, von* $\mathfrak{o}$ *und* $\mathfrak{n}$ *verschiedenen Primidealen darstellen lässt, dass in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden vier Axiome erfüllt sind:*

I. *Der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.*

II. *Existenz des Einheitselementes.*

III. *Das Radikal von* $\mathfrak{R}$ *ist prim.*

IV. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$.

Wenn Noethersche eindeutige Zerlegung in unserer Fassung gelte, so wird die Bedingung „*Ohne Nullteiler*" unnötig.

Beispiel: Sei $\mathfrak{R}$ der Körper der rationalen Zahlen, $\mathfrak{R}[x]$ ein Polynomring mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ der Restklassenring $\mathfrak{R}[x]/(x^2)$, so gibt es in $\bar{\mathfrak{R}}$ nur drei Ideale $(1), (x), (x^2)=(0)$, und offenbar ist (x) ein Primideal aus $\bar{\mathfrak{R}}$. Damit ist in $\bar{\mathfrak{R}}$ unsere eindeutige Zerlegung jedes Ideals möglich, und x ist aber Nullteiler.

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori bin ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit und sein dauerndes Interesse an ihrem Fortgang zu grossem Dank verpflichtet.