ベクトル束論 (I)

小笠原藤次郎

(昭和 17 年 6 月 8 日受附)

アルキメデス的公理を滿足するベクトル束は單一的に定まるビコムパクト空間[1]の連續函數族のベクトル束に依つてベクトル束的同型に表現される。[2] この種の表現問題に就ては我國に於ても多くの學者に依つて多くの寄與がなされた。[3] 本論文の主要な目的の一つは上述の特性に基いてベクトル束を背景とする諸理論に實函數論的方法を適用して理論を精密にすることである。かやうな思想は Stone がスペクトル論を代數的位相的に研究しやうとした際にも見受けられる。[4] ベクトル束論 (I) では表現ブール空間, 半順線形空間に就て論ずる。即ちベクトル束を表現する連續函數族の定義範圍である表現ブール空間の位相的, 束論的特性づけを行つて以下の研究の足場を作り, 之を利用して具體的半順序線形空間の抽象化である Kantorovitch 空間[5]及び Bochner の條件 (L) を滿足する空間[6]の性質を調べた。稍詳しい內容は次に示す目次に依つて知ることが出來る。

---

(1) ビコムパクト Hausdorff 空間といふべきであるが以下簡單のためビコムパクト空間といふことにする。

(2) 前田文友, 小笠原藤次郎: ベクトル束の表現, 本紀要 12 卷 (昭和 17 年)。

(3) 角谷靜夫: 帝國學士院記事 **16** (昭和 15 年), 63-67.
吉田耕作: 帝國學士院記事 **17** (昭和 16 年), 121-124.
中野秀五郎: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **23** (1941), 485-511.

(4) M. H. Stone: Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (1941), 83-87.

(5) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 121-165.
L. Kantorovitch, B. Vulich: Compositio Math. **5** (1937), 119-165.

(6) S. Bochner: Proc. Nat. Acad. Sci. **26** (1940), 29-31.

第二章 Kantorovitch 空間

第三章 條件 (L) を滿足するベクトル束

第四章 抽象 L_p-空間

尙ベクトル束論 (II) に於てはベクトル値函數の積分論, Radon-Nikodym 型定理, 作用素表現論に就いて論ずる豫定である。

第一編 表現ブール空間

第一章 群束, ベクトル束

§1. 群束。

G を要素 $a, b, c, x, y, \dots$ からなる群束とする。即ち G は加群で半順序が定義されそれによつて束を作り $a \geqq b$ のとき任意の c について $a+c \geqq b+c$ が成立する。$a \geqq 0$ なる要素 a を正要素, $a \leqq 0$ なるとき a を負要素といふ。a と 0, $-a$ と 0 との結び $a \cup 0$, $(-a) \cup 0$ を夫々 a の正部分, 負部分といひ a_+, a_- で表す。a_+ と a_- との結びを a の絶對要素といひ $|a|$ で表す。二要素 a, b が $|a| \cap |b| = 0$ を滿足するとき a と b は直交するといふ。

補助定理 1.[1] $\quad a+b = a \cup b + a \cap b$

證明。 $a \cup b - b = (a-b) \cup (b-b) = (a-b) \cup 0 = (a-a) \cup (a-b)$

$$= a + (-a) \cup (-b) = a - a \cap b$$

これから

$$a+b = a \cup b + a \cap b$$ 以上。

補助定理 2.[2] G は配分束である。

證明。 $a \cup b = a \cup c$, $a \cap b = a \cap c$ とすれば補助定理 1 から

$$a+b = a \cup b + a \cap b = a \cup c + a \cap c = a+c$$

が成立つから $b=c$ となり G は配分束となる[3] 以上。

補助定理 3.[4] 正要素 a, b, c の間に $a \leqq b+c$, $a \cap c = 0$ が成立つとき $a \leqq b$ となる。

---

(1) G. Birkhoff: *Lattice Theory* New York (1940), 108。

(2) 同上, 108 頁。

(3) 同上, 75 頁。

(4) F. Riesz: Annals of Math. **41** (1940), 183, 定理 5.

證明。 $a+c=a\cup c+a\cap c=a\cup c\leqq b+c$ から $a\leqq c$ 以上。

補助定理 4. $a=a_+-a_-,\quad a_+\cap a_-=0$

證明。 $a=a\cup 0+a\cap 0=a\cup 0-(-a)\cup 0=a_+-a_-$

$a_+\cap a_-=c$ と置くと $c\geqq 0$. $f=a_+-c$, $g=a_--c$ とすると $a=f-g$ となる。これから

$$a_+=a\cup 0=(f-g)\cup 0\leqq f\cup 0=f=a_+-c.$$

從て $c\leqq 0$, 故に $c=0$ となる。 以上。

補助定理 5. $a=f-g$, $f\geqq 0$, $g\geqq 0$ のとき $a_+\leqq f$, $a_-\leqq g$ 且つ $f\cap g=0$ のときに限り $a_+=f$, $a_-=g$ となる。

證明。 $a_+=a\cup 0=(f-g)\cup 0\leqq f\cup 0=f$, 同様にして $a_-\leqq g$. 次に $c=f-a_+=g-a_-$ と置くと

$$f\cap g=(a_++c)\cap(a_-+c)=c$$

となり $c=0$ のときに限つて $f=a_+$, $g=a_-$ となる。

補助定理 6. $|a|=a\cup(-a)$

證明。 $c=a\cup(-a)$ と置く。

$$\begin{aligned}2c&=a\cup(-a)+a\cup(-a)\\&=\{a\cup(-a)+a\}+\{a\cup(-a)-a\}\\&=(2a)\cup 0+(-2a)\cup 0\\&=|2a|\geqq 0.\end{aligned}$$

これから $2c_+-2c_-\geqq 0$ 從つて

$$2c_+\geqq 2c_-\geqq c_-$$

補助定理 3 から $c_+\geqq c_-$ 故に $c_-=c_+\cap c_-=0$.

これから $c\geqq 0$ となる。c の定義から $c\geqq a, -a$, 從て $c\geqq a_+, a_-$ 故に $c\geqq|a|$. また一方 $|a|\geqq a, -a$ であるから $|a|\geqq c$ 故に $|a|=c$ となる。

以上。

補助定理 7.
$$\begin{aligned}&(a+b)_+\leqq a_++b_+,\\&(a+b)_-\leqq a_-+b_-\\&|a+b|\leqq|a|+|b|\end{aligned}$$

證明。 殆ど自明。 以上。

補助定理 8. n を自然数とすれば

$$n(a \cup b) = na \cup nb, \qquad n(a \cap b) = na \cap nb$$

證明。補助定理 6 を使つて

$$2a_+ = |a| + a = a \cup (-a) + a = (2a) \cup 0 = (2a)_+.$$

これから n が 2 の ㄇ のとき

$$na_+ = (na)_+$$

が成立つことが判る。n が 2 の ㄇ でないときは m を nより大な 2 の ㄇ とする。

$$ma_+ = na_+ + (m-n)a_+ \geqq (na)_+ + \{(m-n)a\}_+ \geqq (ma)_+$$

然るに $ma_+ = (ma)_+$ 從て $na_+ = (na)_+$ が成立たねばならない。

$$n(a \cup b) = n\{(a-b) \cup 0\} + nb = \{n(a-b)\} \cup 0 + nb = na \cup nb.$$

定理の後半も同樣に證明される。 以上。

補助定理 9. $a \cap b = 0$ ならば任意の自然數 m, n に對し $ma \cap nb = 0$.

證明。m と n の大なる方を例へば n とする。

$$ma \cap na \leqq na \cap nb = n(a \cap b) = 0$$ 以上。

補助定理 10.(1) $\{a_\alpha\}$, $\{b_\beta\}$ を任意の添數をもつ G の部分集合とし $\bigvee_\alpha a_\alpha$, $\bigvee_\beta b_\beta$ が存在するとするこのとき

(i) $\bigvee_{\alpha,\beta}(a_\alpha + b_\beta)$ か存在して $\bigvee_\alpha a_\alpha + \bigvee_\beta b_\beta$ に等しい。

(ii) $\bigvee_{\alpha,\beta}(a_\alpha \cup b_\beta)$ が存在して $\bigvee_\alpha a_\alpha \cup \bigvee_\beta b_\beta$ に等しい。

(iii) $\bigvee_{\alpha,\beta}(a_\alpha \cap b_\beta)$ が存在して $\bigvee_\alpha a_\alpha \cap \bigvee_\beta b_\beta$ に等しい。

證明。$f = \bigvee_\alpha a_\alpha$, $g = \bigvee_\beta b_\beta$ と置くと

(i) については, $a_\alpha + b_\beta \leqq f + g$ が成立つことは自明。今 c がすべての a_α, b_β に對し $a_\alpha + b_\beta \leqq c$ とすると $f + b_\beta \leqq c$ 從て $f + g \leqq c$ となり $\bigvee_{\alpha,\beta}(a_\alpha + b_\beta) = f + g$ となる。 以上。

(ii) については, (i) の場合と同樣の方法で證明される。

(iii) については, 先づ $\bigvee_\alpha a_\alpha \cap b = \bigvee_\alpha (a_\alpha \cap b)$ を證明する。有限個の a_α の結びを一般に $\bar{a}_\alpha$ で表すと

$$\bigvee_\alpha a_\alpha + b = \bigvee_\alpha (a_\alpha + b) = \bigvee_\alpha (\bar{a}_\alpha + b) = \bigvee_\alpha \{\bar{a}_\alpha \cup b) + (\bar{a}_\alpha \cap b)\}$$
$$= \bigvee_{\alpha,\alpha'} \{\bar{a}_\alpha \cup b) + (\bar{a}_{\alpha'} \cap b)\}$$

(1) 證明法は H. Freudenthal: Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936), 641-651 に據る。

$$=\bigvee_{\alpha}(\bar{a}_\alpha\cup b)+\bigvee_{\alpha}(\bar{a}_\alpha\cap b)$$
$$=\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cup b)+\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap b)$$
$$=\bigvee_{\alpha}a_\alpha\cup b+\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap b)$$

従て補助定理 1 から $\bigvee_{\alpha}a_\alpha\cap b=\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap b)$

$$\bigvee_{\alpha}a_\alpha\cap\bigvee_{\alpha}b_\beta=\bigvee_{\beta}a_\alpha\cap g=\bigvee_{\alpha}(a_\alpha\cap g)$$
$$=\bigvee_{\alpha}\bigvee_{\beta}(a_\alpha\cap b_\beta)$$
$$=\bigvee_{\alpha,\beta}(a_\alpha\cap b_\beta).$$
以上。

G の二要素 a, b の間に任意の自然数 n について $n|a|\leqq|b|$ が成立し $a\neq 0$ のとき a を b に對して無限小, b を a に對して無限大といひ, 或は單に a を相對無限小, b を相對無限大ともいふ。G に相對無限小要素が存在しないときは G はアルキメデス的といふ。

補助定理 11. G がアルキメデス的なるための條件は次の (i) 又は (ii) が成立つことである。

(i) $b\geqq na\geqq 0$, $n=1, 2, 3\ldots$ が成立つとき常に $a=0$.

(ii) $b\geqq 0$, $b+na\geqq 0$, $n=1, 2, 3\ldots$ が成立つとき $a\geqq 0$.

證明。(i) については殆ど自明。(ii) については $a=a_+-a_-$ として $na_-\leqq na_++b$ 然るに $na_-\cap na_+=0$ 故に $na_-\leqq b$ となる。G がアルキメデス的のときはこれから $a_-=0$ となり從て $a\geqq 0$ となる。逆に (ii) が常に成立つとする。このとき (i) が成立つことを證明すればよい。(i) を

$$b-n(-a)\geqq 0$$

の形に書くとき $-a\geqq 0$ となるから $a=0$ とならねばならぬ。 以上。

§2. 正規イデヤル。

$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 等で群束 G の部分集合を表す。$\mathfrak{M}$のすべての要素と直交する要素の全體を $\mathfrak{M}^\perp$ で表すとき

補助定理 1. $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{N}$ ならば $\mathfrak{M}^\perp\subset\mathfrak{N}^\perp$.

$$\mathfrak{M}^\perp=\mathfrak{M}^{\perp\perp\perp}.$$

證明。定理の前半は殆ど自明。後半は $\mathfrak{M}^{\perp\perp\perp}=(\mathfrak{M}^{\perp\perp})^\perp\subset\mathfrak{M}^\perp\subset(\mathfrak{M}^\perp)^{\perp\perp}=\mathfrak{M}^{\perp\perp\perp}$ から。 以上。

以下本節では G をアルキメデス的と假定する。

$\mathfrak{M}$ が G の部分群で a と共に $|b|\leq|a|$ なるすべての b を含むとき $\mathfrak{M}$ は正規部分群といふ。

$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^{\perp\perp}$ のとき $\mathfrak{M}$ を正規イデヤルと云ふ。

補助定理 2. $\mathfrak{M}$ を正規部分群, a を任意の正要素とする。a より小な正要素で $\mathfrak{M}$ に屬する要素の全體を $\{x_\alpha\}$ とする。a が $\bigvee_\alpha x_\alpha$ とならないときは $0<c\leq a$, $c\in\mathfrak{M}^\perp$ なる要素 c が存在する。

證明。假定により $a>a_1\geqq x_\alpha$, $x_\alpha\in\{x_\alpha\}$ なる a_1 が存在する。$c=a-a_1$ とする。$c\notin\mathfrak{M}^\perp$ ならば $c\geqq c_1>0$, $c_1\in\mathfrak{M}$ なる c_1 が存在する。$a>c_1$ であるから c_1 はある x_α に等しい。故に $a_1\geqq c_1$. 從て $a=c+a_1\geqq 2c_1\in\mathfrak{M}$. これからまた $a_1\geqq 2c_1$ となり $a\geqq 3c_1$ となる。かやうにして任意の自然數 n に對して $a\geqq nc_1$ となる。從て $c_1=0$ でなければならぬ。故に $c\in\mathfrak{M}^\perp$ となる。　以上。

補助定理 3. $\mathfrak{M}$ が正規イデヤルとなるための條件は次の (i), (ii) が成立することである。

(i) $\mathfrak{M}$ は正規部分群である。

(ii) c が $\mathfrak{M}$ の正要素のある集合 $\{a_\alpha\}$ で $\bigvee_\alpha a_\alpha$ として表されるとき $c\in\mathfrak{M}$ となる。

證明。必要條件となることは §1 補助定理 10 を使つて殆ど自明である。$\mathfrak{M}\subsetneqq\mathfrak{M}^{\perp\perp}$ とすると $\mathfrak{M}$ に屬しない $\mathfrak{M}^{\perp\perp}$ の正要素が存在し, 補助定理 2 から $\mathfrak{M}^\perp$, $\mathfrak{M}^{\perp\perp}$ に同時に屬する 0 でない正要素が存在することになり矛盾する。　以上。

定理。 アルキメデス的群束の正規イデヤルの全體は完全ブール代數となり $\mathfrak{A}$ を正規イデヤルとするとブール代數に於けるその補要素 $\mathfrak{A}'$ は $\mathfrak{A}^\perp$ で與へられる。

注意。正規イデヤルを包含關係で半順序をつけてそれによつて完全ブール代數になる意である。

證明。正規イデヤルを $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ 等で表す。完全束となることは殆ど自明。配分束となることを知るには $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{C}$ から $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$ が成立することを證明すればよい[1]。$\mathfrak{B}\neq\mathfrak{C}$ とし例へば $\mathfrak{B}\not\leq\mathfrak{C}$ とすると補助

(1) G. Birkhoff: 前掲 75 頁。

定理 2, 3 から $\mathfrak{C}$ に直交する 0 ならざる $\mathfrak{B}$ の正要素 b が存在する。$b\in\mathfrak{A}\cup\mathfrak{C}$ となることから $b\in\mathfrak{A}$ が證明出來る。從て $b\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\subset\mathfrak{C}$ となり矛盾が起る。$\mathfrak{A}\cup\mathfrak{A}^{\perp}$ は $\mathfrak{A}^{\perp}$ と $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ との共通要素のすべてに直交する要素の全體であるから G と一致する。$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^{\perp}=(0)$ となることは殆ど自明。

以上。

正規イデヤルの作るブール代數の表現ブール空間を群束 G の表現ブール空間といふ。

$\mathfrak{A}$ を正規イデヤルとし要素 x につき $x=x_1+x_2$, $x_1\in\mathfrak{A}$, $x_2\in\mathfrak{A}'$ の如く x を分解することが出來るならば x_1 を x の $\mathfrak{A}$ への射影といひ $P_{\mathfrak{A}}x$ で表す。$P_{\mathfrak{A}}x$ が存在すれば單獨的に定まることは定義から殆ど自明である。

補助定理 4. $P_{\mathfrak{A}}x$, $P_{\mathfrak{A}}y$ が存在するとする。

(i) $P_{\mathfrak{A}}x_+=(P_{\mathfrak{A}}x)_+$, $P_{\mathfrak{A}}x_-=(P_{\mathfrak{A}}x)_-$, $P_{\mathfrak{A}}|x|=|P_{\mathfrak{A}}x|$

(ii) $P_{\mathfrak{A}}(x\cup y)=P_{\mathfrak{A}}x\cup P_{\mathfrak{A}}y$, $P_{\mathfrak{A}}(x\cap y)=P_{\mathfrak{A}}x\cap P_{\mathfrak{A}}y$, $P_{\mathfrak{A}}(x\pm y)=P_{\mathfrak{A}}x\pm P_{\mathfrak{A}}y$.

(iii) $x\leqq y$ のための條件は $P_{\mathfrak{A}}x\leqq P_{\mathfrak{A}}y$, $P_{\mathfrak{A}'}x\leqq P_{\mathfrak{A}'}y$.

證明。(i), $x=x_1+x_2$, $x_1\in\mathfrak{A}$, $x_2\in\mathfrak{A}'$ のとき $x_+=x_{1+}+x_{2+}$ が成立つことから $P_{\mathfrak{A}}x_+=(P_{\mathfrak{A}}x)_+$. 他の證明も同樣。(ii) $P_{\mathfrak{A}}(x\pm y)=P_{\mathfrak{A}}x\pm P_{\mathfrak{A}}y$ は殆ど自明。これと (i) から (ii) の他の部分が證明される。(iii) は (i), (ii) から。以上。

補助定理 5. $x\geqq 0$ のとき $P_{\mathfrak{A}}x$ は $0\leqq a_\alpha\leqq x$, $a_\alpha\varepsilon\mathfrak{A}$ なるすべての a_α の $\bigvee\limits_\alpha a_\alpha$ として特性づけられる。

證明。$P_{\mathfrak{A}}x$ が存在するとき $P_{\mathfrak{A}}x+P_{\mathfrak{A}'}x=x\geqq a_\alpha$ 且 $a_\alpha\cap P_{\mathfrak{A}'}x=0$ から $P_{\mathfrak{A}}x\geqq a_\alpha$ 故に $P_{\mathfrak{A}}x=\bigvee\limits_\alpha a_\alpha$. 逆に $\bigvee\limits_\alpha a_\alpha$ が存在するときこれを x_1 とし $x_2=x-x_1$ とする。補助定理 2 を使つて $x_2\in\mathfrak{A}'$ なることが證明出來る。 以上。

補助定理 6. $\{x_\alpha\}$ に對し $\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$, $P_{\mathfrak{A}}\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$, $P_{\mathfrak{A}}x_\alpha$ が存在するならば $\bigvee\limits_\alpha P_{\mathfrak{A}}x_\alpha=P_{\mathfrak{A}}\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$.

證明。補助定理 4, (iii) を使つて殆ど自明。 以上。

補助定理 7. $\{\mathfrak{A}_\alpha\}$ を正規イデヤルの集合で $\alpha\neq\alpha'$ のとき $\mathfrak{A}_\alpha\cap\mathfrak{A}_{\alpha'}=(0)$. $\bigvee\limits_\alpha\mathfrak{A}_\alpha=G$ が成立するとする。

(i) x が正要素ですべての α につき $P_{\mathfrak{A}_\alpha}x$ が存在すれば $x=\bigvee\limits_\alpha P_{\mathfrak{A}_\alpha}x$ となる。

(ii) すべての α に對し $P_{\mathfrak{A}_\alpha}x$ が存在する x については $x=\bigvee_\alpha P_{\mathfrak{A}_\alpha}x_+ - \bigvee_\alpha P_{\mathfrak{A}_\alpha}x_-$

證明。(i) $x>c$ なる c が $\{P_{\mathfrak{A}_\alpha}x\}$ の上界とすると $x-c$ はすべての $\mathfrak{A}_\alpha$ に直交する。何者，$x-c\geqq a\epsilon\mathfrak{A}_\alpha$ なる正要素を考へると $x\geqq a+P_{\mathfrak{A}_\alpha}x$ となり補助定理 5 から $a=0$ となる。從て $x-c\in\bigwedge_\alpha\mathfrak{A}_\alpha^\perp=(\bigvee_\alpha\mathfrak{A}_\alpha)^\perp=(0)$ となり $x=c$ とならねばならぬ。(ii) は (i) から殆ど自明。　以上。

$\mathfrak{M}$ を含む最小の正規イデヤル $\mathfrak{M}^{\perp\perp}$ を $\mathfrak{M}$ によつて生起された正規イデヤルといふ。一個の要素 a から生起された正規イデヤルを主イデヤルといひ $\mathfrak{A}(a)$ で表す。$\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{A}(|a|)$ が成立するから今後斷らない限り $\mathfrak{A}(a)$ と書けば a は正なるものとする。

補助定理 8.

(i) $\mathfrak{A}(a)\cup\mathfrak{A}(b)=\mathfrak{A}(a\cup b)=\mathfrak{A}(a+b)$

(ii) $\mathfrak{A}(a)\cap\mathfrak{A}(b)=\mathfrak{A}(a\cap b)$

(iii) $a=\bigvee_\alpha a_\alpha,\ a_\alpha\geqq 0$ のとき $\mathfrak{A}(a)=\bigvee_\alpha\mathfrak{A}(a_\alpha)$

證明。(i) は自明，(ii) は $c=a\cap b,\ a=a_1+c,\ b=b_1+c$ とする。

$$\mathfrak{A}(a)\cap\mathfrak{A}(b)=\{\mathfrak{A}(a_1)\cup\mathfrak{A}(c)\}\cap\{\mathfrak{A}(b_1)\cup\mathfrak{A}(c)\}=\{\mathfrak{A}(a_1)\cap\mathfrak{A}(b_1)\}\cup\mathfrak{A}(c)$$

然るに $a_1\cap b_1=0$ から $\mathfrak{A}(a_1)\cap\mathfrak{A}(b_1)=(0)$ が容易に判る。(iii) は $\{a\}^\perp=\bigwedge_\alpha\{a_\alpha\}^\perp$ から $\mathfrak{A}(a)=\{a\}^{\perp\perp}=\bigvee_\alpha\{a_\alpha\}^{\perp\perp}=\bigvee_\alpha\mathfrak{A}(a_\alpha)$.　以上。

注意。(iii) の双對定理は成立しない。

G が σ-完全のときは主イデヤルへの射影は常に存在し主イデヤルの全體 P は σ-完全な廣義のブール代數となること，G が完全のとき正規イデヤルへの射影は常に存在し主イデヤルの全體 P は完全な廣義のブール代數となることを注意する。

§3. ベクトル束。

群束 G が群として實數若くは有理數からなる作用團をもち，λ を正數，a を G の正要素とするとき常に λa が正要素になるとの條件を滿足するとき，群束 G は實數若くは有理數からなる作用團をもつと云ふ。特に實數からなる作用團をもつ群束を實ベクトル束或は單にベクトル束といふ。ベクトル束については §1, 2 で述べた結果の外，作用團に關係したものがあるが多くは周知のことであるからそれ等に就て述べることは略する。

群束 G の要素と正整數から作られた對 $\left(\frac{1}{n}, a\right)$ の全體を考へ $ma=nb$ のとき $\left(\frac{1}{n}, a\right)=\left(\frac{1}{m}, b\right)$ と定めて類別し, $\left(\frac{1}{n}, a\right)$ の屬する類を $\left[\frac{1}{n}, a\right]$ で表しかやうな類の全體を G_r とし

(1) $ma \geqq nb$ のとき $\left[\frac{1}{n}, a\right] \geqq \left[\frac{1}{m}, b\right]$

(2) $\left[\frac{1}{n}, a\right]+\left[\frac{1}{m}, b\right]=\left[\frac{1}{mn}, ma+nb\right]$

(2) $\frac{q}{p}\left[\frac{1}{n}, a\right]=\left[\frac{1}{np}, qa\right]$, p は正整數, q は整數と定める。この定義は類の代表者の如何に關係しないことは, (i) については $\left[\frac{1}{n_1}, a_1\right]=\left[\frac{1}{n}, a\right]$ とすると $na_1=n_1a$ が成立し $ma \geqq nb$ から $mn_1a \geqq nn_1b$ 從て $mna_1 \geqq nn_1b$ となり §1 補助定理 8 を使つて $ma_1 \geqq n_1b$ が成立する。(ii), (iii) については殆ど自明である。以上の定義から G_r が有理數からなる作用圏をもつ群束となることが容易に證明される。$[1, a]$ と a とを恒等視するとき G は G_r の部分群束となる。これを定理の形で述べると

補助定理 1. 群束は有理數からなる作用圏をもつ群束に埋藏することが出來る。

補助定理 2. 群束 G が有理數からなる作用圏をもつときは $G=G_r$ である。

證明。 定義から殆ど自明。 以上。

補助定理 3. G がアルキメデス的のとき G_r もアルキメデス的となる。

證明。 $\left[\frac{1}{p}, a\right] \geqq 0$ 且任意の正整數について $n\left[\frac{1}{p}, a\right] \leqq \left[\frac{1}{q}, b\right]$ とすると $nqa \leqq pb$ となり G がアルキメデス的のときは $a=0$ となる。 以上。

補助定理 4. G がアルキメデス的のとき, $\mathfrak{A}_r$ を G_r の任意の正規イデヤル. $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A}_r$ に屬する G の要素の全體とすると $\mathfrak{A}$ は G の正規イデヤルとなる。$\mathfrak{A}_r$ と $\mathfrak{A}$ との對應で G_r と G の正規イデヤルの束同型對應が定義される。從て G_r と G は同一の表現ブール空間をもつといふ事が出來る。

證明。 先づ $\mathfrak{A}$ が G の正規部分群束となることは自明。今 G で $a=\bigvee_{\alpha} a_{\alpha}$, $a_{\alpha} \in \mathfrak{A}$ 且 $a_{\alpha} \geqq 0$, とする。G_r で $\left[\frac{1}{n}, c\right]$ が $\{a_{\alpha}\}$ の上界となるとする $c \geqq$

$\bigvee_{\alpha} na_{\alpha} = n\bigvee_{\alpha} a_{\alpha} = na$ となり $\left[\frac{1}{n}, c\right] \geqq [1, a]$ となるから a は $G_r{}'$ に於ても $a = \bigvee_{\alpha} a_{\alpha}$ 從て $\mathfrak{A}$ は G の正規イデヤルとなる。$\mathfrak{M}$ が G の部分集合のときある a に對し $|x| \leqq |a|$, $a \in \mathfrak{M}$, を滿足する G_r の要素全體を $\mathfrak{M}^*$ で表し, $\mathfrak{M}$ が G_r の部分集合のとき G_r, G の要素のうち $\mathfrak{M}$ のすべての要素に直交する要素の全體を夫々 $\mathfrak{M}^{\perp r}$, $\mathfrak{M}^{\perp}$ で表すと

$$\mathfrak{M}^{\perp r} = \mathfrak{M}^{\perp *}; \qquad \mathfrak{M}^{*\perp r} = \mathfrak{M}^{\perp *}$$

の成立することが容易に證明される。$\mathfrak{A}$ を G の正規イデヤルとすると $\mathfrak{A}^{\perp r \perp r} = \mathfrak{A}^{\perp * \perp *} = \mathfrak{A}^{\perp\perp *} = \mathfrak{A}^*$ となる。これから $\mathfrak{A}_r$ と $\mathfrak{A}$ の對應が束同型となることは明かである。　　以上。

定理 1. アルキメデス的群束はビコムパクト空間の連續函數のある族で群束的同型表現される。

注意。群束的同型とは對應が群及び束として同型となることをいふ。

證明。G をアルキメデス的群束とすると G_r もアルキメデス的になる。有理數からなる作用圜をもつ群束で本定理が成立するから, G はその表現ブール空間の連續函數で同型に表現されることが判る[1]

定理 2. アルキメデス的群束はベクトル束に埋藏することが出來る。

證明。定理 1 を使つて殆ど自明。　　以上。

群束 G の正要素 e について a を任意の G の要素とするとき $|a| \leqq ne$ なる正整數 n が存在するとき G の各要素は e に關して束的有界といふ。

定理 3. 群束 G の各要素が正要素 e に關して束的有界のとき e に關して無限小要素の全體は正規部分群束を作る。これを G_0 とすると差群束 $G - G_0$ はアルキメデス的群束である。

證明。有理數からなる作用圜をもつ群束に對して本定理が成立することから[2] 容易に判る。　　以上。

第二章 ブール代數, ブール空間

§1. 完全ブール代數とその表現ブール空間。

よく知られてゐる樣に完全不連結ビコムパクト Hausdorff 空間をブール

---

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎, 前揭。有理數からなる作用圜をもつ場合にも此處の方法が適用される。

(2) 同上。

空間[1]といふ。その基本開集合即ち開集合で同時に閉集合となるものは包含關係で半順序を定めるときブール代數となる。逆に任意のブール代數はある定まつた方法でブール空間が定義されその基本開集合の作るブール代數と束同型となる。かやうにブール代數とその表現ブール空間とが一對一對應してゐる。ブール空間を代數的，位相的に特性づけやうとするのが本章の主要な目的である。

補助定理 1.[2] A を σ-ブール代數，B を A と單位を共有する A の部分ブール代數とする。B を含む最小 σ-のブール代數 $\bar{B}$ は B を含み次の性質をもつ最小の集合 B_1 と一致する。

(1) $x_n \in B_1$, $n=1,2,3,\dots$ $x_n \frown x_m=0$, $n \neq m$ のとき $\bigvee_n x_n \in B_1$.

(2) $x_n \in B_1$, $n=1,2,3,\dots$, $x_1 \geqq x_2 \geqq \dots$ のとき $\bigwedge_n x_n \in B_1$.

證明。$\bar{B}$ は (1), (2) の性質をもつから $\bar{B} \supset B_1$ 故に B_1 が σ-完全ブール代數なることを證明すればよい。B_1 の二要素の交りが B_1 に屬することを證明する。B の任意の要素との交りが B_1 に屬するものの全體は B を含み (1), (2) の性質をもつから B_1 の定義により B_1 の任意の要素と B の任意の要素との交りは B_1 に屬する。同じ論法を B の代りに B_1 に對して繰返して B_1 の二要素の交りは B_1 に屬す。次に B_1 の要素でその補要素がまた B_1 の要素となるものも B を含み (1), (2) の性質をもつから B_1 自身その任意の要素の補要素は B_1 に屬する。これから B_1 の任意の二要素の結びも B_1 に屬すること從て B_1 がブール代數となることが判る。ブール代數で (1), (2) の性質をもつとき σ-完全となることは容易に判る。 以上。

補助定理 2. 補助定理 1 に於ける條件 (2) は次の條件 (2′) で置きかへられる。(2′) $x \in B_1$ のときその補要素 x' も $x' \in B_1$.

證明。補助定理 1 と同樣 B_1 が σ-完全ブール代數なることを證明すればよい。B の任意の要素との交りが B_1 に屬するやうな A の要素の全體は B を含み (1) を足滿することは自明。(2′) を滿足することはすべての $a \in B$ に對し $x \frown a \in B_1$ となつたとすると $x' \frown a=(x' \smile a') \frown a=\{(x \frown a) \smile a'\}' \in B_1$ が成立することから判る。從て B_1 の定義から B_1 の任意の要素と B の任

(1) M. H. Stone: Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 376-481.
(2) S. Saks: Theory of the Integral (1937), 85 頁。

意の要素の交りは B_1 に屬する。B の代りに B_1 に對してこの論法を繰返して B_1 の任意の二要素の交りは B_1 に屬する。この性質と (1), (2′) から B_1 が σ-ブール代數となることが容易に示される。

補助定理 3. A を σ-ブール代數とし二要素の對稱差を $x\Delta y$ で表すとき

$$(\bigvee_n x_n)\Delta(\bigvee_n y_n) \leqq \bigvee_n (x_n \Delta y_n)$$

證明。 $$(\bigvee_n x_n) \frown (\bigvee_n y_n)' = \bigvee_n x_n \frown \bigwedge_n y_n' \leqq \bigvee_n (x_n \frown y_n')$$

同様に $(\bigvee_n x_n)' \frown (\bigvee_n y_n) \leqq \bigvee_n (x_n' \frown y_n)$. これから定理の成立つことが容易に判る。 以上。

定理 1. Ω をブール代數 A の表現ブール空間とする。このとき次の諸命題は互に同義である。

(1°) A は完全である。

(2°) Ω の任意の Borel 集合は第一種集合を法として Ω の基本開集合と一致する。

(3°) Ω との任意の有界 B-可測 (Borel 可測の意) 函數は第一種集合上を除いて連續函數と一致する。

(4°) 第一種集合を除いて有限値をとる Ω 上の B-可測函數は第一種集合を除いて有限値をとる連續函數と第一種集合上を除いて一致する。

證明。 基本開集, 開集合, Borel 集合, 第一種集合を夫々 O, G, B, P 及び添數をつけて表すことにする。

(1°) → (2°) の證。

$O\Delta P$ (O と P の對稱差) の形をもつ集合の族を $\mathfrak{M}$ とするとき $\mathfrak{M}$ が次の諸性質をもつことを確めればよい。

(i) $E \in \mathfrak{M}$ のとき $E^c \in \mathfrak{M}$.

(ii) $E_n \in \mathfrak{M}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ のとき $\sum E_n \in \mathfrak{M}$.

(iii) $G \in \mathfrak{M}$.

(i) については, $E=O\Delta P$ から $E^c=O^c\Delta P$ となることから, (ii) については, $E_n=O_n\Delta P_n$ から $(\sum E_n)\Delta(\sum O_n) \subset \sum P_n$ と (iii) から $\sum E_n \in \mathfrak{M}$. (iii) については, A が完全であるから G に含まれるすべての基本開集合に對する A の要素の上端に對する基本開集合を考へるとき (iii) の成立が容易に分る。

$(2°) \to (3°)$ の證。

$f(p)$ を有界 B-可測函數とし $B_\alpha=[f(p)<\alpha]$, α は有理數, と置く。假定から $B_\alpha=O_\alpha \varDelta P_\alpha$, $\alpha<\beta$ のとき $O_\alpha \subset O_\beta$ が成立する。連續函數 $h(p)$ を

$$h(p)=\underset{\alpha}{\mathrm{g.l.b.}}\,(\alpha\,;\,p\in O_\alpha)=\underset{\alpha}{\mathrm{l.u.b.}}\,(\alpha\,;\,p\notin O_\alpha)$$

で定義するとき第一種集合を除いて $f(p)=h(p)$ となることを證明すればよい。然るに

$$[h(p)<\alpha]=\sum_{\beta<\alpha}O_\beta=\sum_{\beta<\alpha}(B_\beta \varDelta P_\beta)=B_\alpha \varDelta P'_\alpha \text{ の形。従て}$$

$$[h(p)\geqq\alpha]=B^c_\alpha \varDelta P'_\alpha.$$

これから

$$[f(p)\neq h(p)]=\sum_\alpha[f(p)\geqq\alpha>h(p)]+\sum_\alpha[f(p)<\alpha\leqq h(p)]$$

$$=\sum_\alpha B^c_\alpha(B_\alpha \varDelta P'_\alpha)+\sum_\alpha B_\alpha(B^c_\alpha \varDelta P'_\alpha)=P$$ となり $(2°)\to(3°)$ の成立が判る。

$(2°) \to (4°)$ の證。

$f(p)$ を $(4°)$ に述べられた B-可測函數とする。$B_\alpha=[f(p)<\alpha]$ とすると $B_\alpha=O_\alpha \varDelta P_\alpha$, $\alpha<\beta$ のとき $O_\alpha\subset O_\beta$ となる。且 $\prod_\alpha O_\alpha$, $\Omega-\sum_\alpha O_\alpha$ が第一種集合なることを顧慮して $(2°)\to(3°)$ の證明法に依つて $(2°)\to(4°)$ の成立を證明することが出來る。

$(4°)\to(3°)$ の成立は殆ど自明。

$(3°)\to(1°)$ の證。

任意の添數の集合を考へその要素を α で表す。$\{O_\alpha\}$ を考へ $\sum O_\alpha$ の特性函數を $f(p)$ としそれに對應する連續函數を $h(p)$ とすると $h(p)$ は $\overline{\sum O_\alpha}$ の特性函數となるから $\overline{\sum O_\alpha}$ は基本開集合となり A が完全なることが判る。 以上。

以下に於て混同の虞のないとき次の定義に從ふ。Borel 集合と第一種集合を法として一致する集合を可測集合, 可測集合全體からなる集合族を可測集合族といひ $\mathfrak{M}$ で表し, 第一種集合を除いての代りに殆ど到る所或はそれと同義の言葉を使ふ。殆ど到る所一致する集合或は函數は對等であるといふ。

以下本節で考へる函數は殆ど到る所有限な値をとるものとする。

定理 2. Ω をブール代數 A の表現ブール空間とする A が完全のとき次の諸命題は互に同義である。

(1°) $f(p)$ は Ω 上で可測である。

(2°) $f(p)$ は Baire の性質をもつ。

(3°) $f(p)$ は連續函數と對等である。

證明。 定理 1 の證明から殆ど自明である。　　以上。

定理 3. Ω をビコムパクト Hausdorff 空間 (以下單にビコムパクトと云ふ), その上の有界連續函數全體からなる族を $\mathfrak{L}_b$, 非稠密集合を除いて有限値をとる連續函數全體からなる族を $\mathfrak{L}_\Omega$ とする。このとき次の諸命題は互に同義である。

(1°) Ω は完全ブール代數の表現ブール空間である。

(2°) $\mathfrak{L}_b$ は完全ベクトル束である。

(3°) $\mathfrak{L}_\Omega$ は完全ベクトル束である。

注意。 (3°) に於て $\mathfrak{L}_\Omega$ の函數の和は有限値をとる點のみで單獨的に定まるやう定義されるものとする。詳細は以下の證明で明瞭になる。

證明。

(2°)→(1°) の證。 Ω の開集合の基底として $0\leqq f\leqq 1$, $f\varepsilon\mathfrak{L}_b$ による $[f(p)>0]$ の形の開集合全體をとることが出來ることは殆ど自明。先づ Ω がブール空間となることを證明するため Ω の任意の一點 p_0 を考へ $f(p_0)>\alpha>0$ とする。$f_1=(f-\alpha)\cup 0$ と置くと $[f(p)>\alpha]=[f_1(p)>0]$ が成立する。$f_n=nf_1\cap 1$, $n=2, 3, \ldots$ と置いて $\bigvee_n f_n$ を考へると, これは $\overline{[f_1(p)>0]}$ の特性函數を表す連續函數となる。從て $\overline{[f_1(p)>0]}$ は開且閉で $[f(p)>0]$ に含まれる。即ち Ω はブール空間となる。次に基本開集合の族 $\{O_\alpha\}$ を考へその特性函數を $f_\alpha(p)$ として $\bigvee f_\alpha$ を作るとこれは $\overline{\sum O_\alpha}$ の特性函數を表す連續函數となり Ω は完全ブール代數の表現ブール空間となる。

(1°)→(3°) の證。 $f, g\in\mathfrak{L}_\Omega$ のとき $f+g$ の定義の可能なること及び $f_\alpha\geqq 0$, $f_\alpha\in\mathfrak{L}_\Omega$ のとき $\bigwedge_\alpha f_\alpha$ の存在證明を行へば充分である。有限値をとる點で $h(p)=f(p)+g(p)$ と定義しその他の點で $h(p)$ を任意に定めると $h(p)$ は可測函數になる。從て定理 2 からこれと對等な連續函數が存在する。$h(p)$ の定義を任意に定めた點でこの連續函數と一致するやう $h(p)$ の定義をかへ $f+g=h$ と定める。次に $f(p)=\text{g. l. b.}_\alpha\, f_\alpha(p)$ と置くと $f(p)$ は上半連續函數である。これに對等な連續函數を h とするとき $h=\bigwedge_\alpha f_\alpha$ となることが容易に判る。

(3°)→(2°) は自明。　　以上。

定理 3 の條件が成立するとき $f=(o)\text{-}\overline{\lim} f_n$（束的上極限）は殆どすべての點で $\overline{\lim} f_n(p)$ を考へそれと對等な連續函數が f となることを注意する。

ブール空間が完全ブール代數の表現ブール空間となるとき完全ブール空間といふ。Ω が完全ブール空間のとき有界連續全體の族 $\mathfrak{L}_b$ は定理 3 から完全ベクトル束となる。$\mathfrak{L}_b$ の正規イデヤル $\mathfrak{A}$ には $\mathfrak{A}$ の何れかの函數が 0 にならない點からなる集合を對應させると，これは基本開集合でかやうにして正規イデヤルと基本開集合の間の一對一對應から Ω が L_b の表現ブール空間と見做されることが分る。

§2. 廣義の完全ブール空間。

完全不連結且局所的ビコムパクト空間のことを廣義のブール空間といふ。これは單位 0 をもつ廣義のブール代數（以下單に廣義のブール代數といふ）の表現空間と見做される。制限的完全な廣義のブール代數の表現空間となる廣義のブール空間を廣義の完全ブール空間と名付る。

定理 1. Ω を廣義のブール代數 A の表現空間とする。このとき次の諸命題は互に同義である。

(1。) A は完全な廣義のブール代數である。

(2°) Ω の任意の Borel 集合は第一種集合を法として Ω の開且閉集合と一致する。

(3°) Ω 上の任意の B-可測有界函數は第一種集合を法として連續函數と一致する。

(4°) 第一種集合上を除いて有限値をとる Ω 上の任意の B-可測函數は第一種集合を除いて有限値をとる連續函數と第一種集合上を除いて一致する。

證明。 廣義の完全ブール空間では任意の開集合の閉苞は開且閉集合となることを注意して §1 定理 1 の證明に準じて證明を行へばよい。以上。

§1 に於けると同樣可測集合，可測函數，殆ど到る所等を定義すると

函數 2. Ω を廣義の完全ブール空間とする。次の諸明題は互に同義である。

(1°) $f(p)$ は Ω 上の可測函數である。

(2°) $f(p)$ は Baire の性質をもつ。

(3°) $f(p)$ は連續函數と對等である。

定理 3. Ω を局所的ビコムパクト空間とし，その上の有界連續函數全體からなる族を $\mathfrak{L}_b$, 非稠密集合も除いて有限値をとる連續函數全體からなる族を L_Ω とする。このとき次の諸命題は互に同義である。

(1°) Ω は廣義の完全ブール空間である。

(2°) $\mathfrak{L}_b$ は完全ベクトル束である。

(3°) $\mathfrak{L}_\Omega$ は完全ベクトル束である。

定理 2, 3 の證明は 前 § の定理 2, 3 の證明に準じて行へばよい。

定理 4. 廣義の完全ブール空間は之に第一種集合を附加して完全ブール空間にすることが出來る。かやうな完全ブール空間は單獨的に定まる。從て廣義のブール代數は完全ブール代數に埋藏することが出來る。

證明。 Ω を廣義の完全ブール空間とし定理 3 の $\mathfrak{L}_b$ を考へる。$\mathfrak{L}_b$ の正規イデヤルト Ω の開且閉集合の間には §1 の終で述べた對應の仕方で一對一對應が存在する。$\mathfrak{L}_b$ の表現ブール空間に Ω をよく知られた方法で埋藏することに依つて[1] 定理が容易に證明される。　　　　以上。

廣義のブール空間は唯一點の附加によつてブール空間になるが廣義の完全ブール空間では唯一點の附加によつて完全ブール空間になるとはいへない。例へば無限個の孤立點のみからなる空間は廣義の完全ブール空間であるが唯一點を附加しただけでは完全ブール空間にならないことは明である。廣義の完全ブール空間で殆ど到る所有限な連續函數は上述の完全ブール空間に單獨的に定まる殆ど到る所有限な連續函數に擴大される。この性質は應用に際して重要なものと思はれる。ベクトル束の表現問題に於ても單位が存在しないとき廣義の完全ブール空間上の連續函數に依つて表現することが自然に思はれるに關らず完全ブール空間上で問題にするに何等不自然でないことが定理 4 に依つて明になる。また Ω を完全ブール空間，$\{\Omega_\alpha\}$ を Ω の基本開集合で任意の二つは互に素で $\Omega-\sum\Omega_\alpha$ が非稠密とする。各々の Ω_α 上で勝手に與へた連續函數から Ω 上の連續函數が單獨的に定まることを注意する。

§3. σ-ブール代數とその表現ブール空間。

---

(1) H. Wallman: Annals of Math. 39 (1938), 422-455.

σ-ブール代數とその表現ブール空間に就て §1 の所論に類するものが得られる。

定理 1. Ω をブール代數 A の表現ブール空間とするとき次の諸命題は互に同義である。

(1°) A は σ-ブール代數である。

(2°) Ω の基本開集合を含む最小の Borel 族の任意の集合は第一種集合を法として基本開集合と一致する。

(3°) Ω 上の任意の有界な Baire の函數は第一種集合上を除いて連續函數と一致する。

(4°) 第一種集合上を除いて有限値をとる Ω 上の任意の Baire の函數は第一種集合を除いて有限値をとる Ω 上の連續函數と第一種集合上を除いて一致する。

定理 2. Ω がブール代數 A の表現ブール空間で A が σ-ブール代數のとき第一種集合を法として基本開集合と一致する集合の族を $\mathfrak{M}$ とする ($\mathfrak{M}$ は Borel 族になる) とき次の條件は互に同義である。

(1°) $f(p)$ は第一種集合上を除いて連續函數と一致する。

(2°) $f(p)$ は $\mathfrak{M}$ に關して可測である。

定理 3. Ω をビコムパクト空間とするとき次の命題は互に同義である。

(1°) Ω は σ-ブール代數の表現ブール空間である。

(2°) $\mathfrak{L}_b$ を Ω 上の有界連續函數の全體とすると $\mathfrak{L}_b$ は σ-完全ベクトル束を作る。

(3°) $\mathfrak{L}_\Omega$ を Ω 上の第一種集合を除いて有限値をとる連續函數の全體とすると $\mathfrak{L}_\Omega$ は σ-完全ベクトル束を作る。

§4. アルキメデス的ベクトル束の完全化。

L をアルキメデス的ベクトル束, N をその正規イデヤル全體の作る完全ブール代數, Ω を N の表現ブール空間とする。$\{e_\alpha\}$ を $\mathfrak{L}$ の正要素の集合で $\alpha\neq\beta$ のとき $e_\alpha\cap e_\beta=0$, 及び $\{e_\alpha\}^{\perp}=(0)$ を滿足するものとする。λ を任意の有理數とし $x\in\mathfrak{L}$ に對し $\mathfrak{A}_\lambda^{(x)}=\bigvee_\alpha\left\{\mathfrak{A}\left((x-\lambda e_\alpha)_-\right)\cap\mathfrak{A}(e_\alpha)\right\}$ と置いて特性族 $\{\mathfrak{A}_x^{(x)}\}$ を作り Ω の點即ち N の要素から作られた極大双對イデヤル $\mathfrak{p}^*$ に對し

$$f_x(\mathfrak{p})^* = \underset{\lambda}{\mathrm{g.l.b.}}\ (\lambda\ ;\ \mathfrak{A}_\lambda^{(x)} \in \mathfrak{p}^*) = \underset{\lambda}{\mathrm{l.u.b.}}\ (\lambda\ ;\ \mathfrak{A}_\lambda^{(y)} \notin \mathfrak{p}^*)$$ で

L を Ω 上の殆ど到る所有限値をとる連續函數よりなるあるベクトル束 $\mathfrak{L}$ にベクトル束的に同型表現される[1] $\mathfrak{A} \in N$ のとき $\mathfrak{A}$ を含む極大双對イデヤルの全體が $\mathfrak{A}$ に對する Ω 上の基本開集合になるからこの基本開集合自身を $\mathfrak{A}$ で表すこととすると $\mathfrak{p}^* \in \mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A} \in \mathfrak{p}^*$ とは同義になる。e_a は $\mathfrak{A}(e_a)$ の特性函數を表す連續函數で表現される。

$\overline{\mathfrak{L}}$ を Ω 上の連續函數で $\mathfrak{L}$ のある函數の劣函數となるものの全體，即ち $|h| \leqq f,\ h \in \mathfrak{L}_\Omega,\ f \in \mathfrak{L}$ なる關係の成立する h 全體からなるものとする。

アルキメデス的ベクトル束 L の完全化[2] に就て表現空間を通して精密な結果を得るため先づ二三の定義を設ける。

L がベクトル束 L^* の部分ベクトル束 L_{**} と同型で $x_a \in L,\ x_a^{**} \in L_{**}$ が對應するとき $\wedge x_a$ の存在と $\wedge x_a^{**}$ が L^{**} の要素として L^* で存在することが同義で，それ等が存在するとき $\wedge x_a$ と $\wedge x_a^{**}$ が對應するとき（從てその双對命題も成立つ）L は L^*に完全に埋藏される，L は L^* の部分ベクトル束 L^{**}に完全に同型であるといふ。$L \subset L^*$ のとき $L^{**} = L$ とし自己對應で L が L^* に完全に埋藏されるとき L は L^* に完全に含まれるといふ。

L の空でない部分集合 M, N が $x \in M,\ y \in N$ のとき $x \leqq y$ が成立つ極大集合のとき (M, N) を切斷といふ。L^* が完全ベクトル束で L を完全に含むとき L^* の要素 x^* に對し L の要素からなる切斷 (M, N) が存在し $x = \vee(x\ ;\ x \in M) = \wedge(x\ ;\ x \in N)$ が成立するとき x^* は L の切斷で定義されるといふ。

補助定理 1. アルキメデス的ベクトル束 L は $x \leftrightarrow f_x(\mathfrak{p}^*)$ の對應で $\mathfrak{L}_\Omega$ に完全に埋藏される。

證明。$x = \wedge x_a$ が L で成立するとき $\mathfrak{L}_\Omega$ で $f_x = \wedge f_{x_a}$ が成立することを證明すれば充分である。今 $g = \wedge f_{x_a}$ とするとき $f_x \leqq g$ の成立は自明である。もし $f_x < g$ とすると適當な $\mathfrak{A}(e_a)$ に含まれ基本開集合 $\mathfrak{A}$ で $f_x(\mathfrak{p}) < g(\mathfrak{p}^*) - \lambda,\ \lambda > 0$ が成立する。このとき $0 < y \leqq \lambda e_a,\ y \in \mathfrak{A}$ なる y をとると

---

(1) 前田文友，小笠原藤次郎：前掲。
(2) 中野秀五郎：前掲。

$f_y(\mathfrak{p}^*)$ は $\mathfrak{A}$ 上では $0 \leqq f_x(\mathfrak{p}^*) \leqq \lambda$, $\mathfrak{A}'$ 上では $f_y(\mathfrak{p}^*)=0$ となり, $f_x(\mathfrak{p}^*)+f_y(\mathfrak{p}^*) \leqq g(\mathfrak{p}^*)$ 従て $f_{(x+y)}(\mathfrak{p}^*) \leqq g(\mathfrak{p}^*) \leqq f_{y_\alpha}(\mathfrak{p}^*)$ が成立つから, すべての α について $x+y \leqq x_\alpha$ が成立し $x+y \leqq x$ となつて $y=0$ とならねばない。これは明に矛盾である。 以上。

補助定理 2. $\bar{\mathfrak{L}}$ は完全ベクトル束で $\mathfrak{L}$ の要素の切斷として定義される。

證明。 $\bar{\mathfrak{L}}$ が完全ベクトル束となることは明である。從て h を $\bar{\mathfrak{L}}$ の任意の要素とするとき $h=\bigwedge(f; f \geqq h, f \in \mathfrak{L})$ を證明すれは充分である。これは補助定理 1 と同様に證明される。 以上。

補助定理 3. L^* を完全ベクトル束とし, L が L^* に完全に含まれるとする。L^* の要素のうち, L の切斷として定義せられる要素の全體を L_1 とすれば L_1 は完全ベクトル束で L は L_1 に完全に含まれる。

證明。 $x^* \in L_1$ の條件は L の部分集合 P, Q が存型し任意の $x \in P$, $y \in Q$ に對し $x \leqq x^* \leqq y$ が成立し且 $\bigwedge(y-x; x \in P, y \in Q)=0$ となることである。これは殆ど自明である。この條件から L_1 が完全ベクトル束であることが容易に證明される。L が L_1 に完全に含まれることは明である。

定理 1. アルキメデス的ベクトル束 L は $\bar{\mathfrak{L}}$ に完全に埋藏される。L を完全に埋藏する完全ベクトル束には極小なものが存在しそれは何れも $\bar{\mathfrak{L}}$ に同型である。

證明。 定理の前半は補助定理 1, 2 から自明。次に L^* を L を完全に埋藏する完全ベクトル束として補助定理 3 に於ける L_1 を考へる。$\bar{\mathfrak{L}}, L_1$ は夫々 $\mathfrak{L}, L$ から切斷に依つて定義されるから $\mathfrak{L}$ と L との切斷を對應させることに依つて $\bar{\mathfrak{L}}$ と L_1 の同型を證明することが出來る。L_1 が極小の性質をもつことは自明である。 以上。

以上に於てアルキメデス的ベクトル束の完全化について考へたが, アルキメデス的群束 G ではこれから有理數からなる作用閾をもつ群束 G_r を作り, 本節の初めに述べた方法で表現空間 Ω 上の連續函數で表現し上述のやうに $\bar{\mathfrak{L}}$ を考へ G_r の完全化が得られる。アルキメデス的ベクトル束に本節の定義を適用して

補助定理 4. アルキメデス的群束 G は $x \leftrightarrow f_x(\mathfrak{p}^*)$ の對應で $\mathfrak{L}_\Omega$ に完全に埋藏される。

證明。 $x=\bigwedge x_\alpha$ が G で成立するとき $\mathfrak{L}_\Omega$ で $f_x=\bigwedge f_{x_\alpha}$ の成立を證明すればよい。先づ $x=\bigwedge x_\alpha$ が G で成立することは第一章 §3, 補助定理 4 の證明中と同様の方法で示される。(即ち G が G_r に完全に含まれること)。G_r について補助定理 1 と同様に證明すればよい。 以上。

定理 2. 有理數からなる作用圏をもつアルキメデス的ベクトル束 G_r は $\overline{\mathfrak{L}}$ に完全に埋藏される。G_r を完全に埋藏する完全ベクトル束には極小のものが存在して，それは何れも $\overline{\mathfrak{L}}$ に同型である。

證明。 定理 1 の證明法に準ずる。 以上。

以上の所論から判る簡單な注意をする。L が完全ベクトル束の場合は $\mathfrak{L}=\overline{\mathfrak{L}}$ となるから $\mathfrak{L}_\Omega$ の任意の函數で $|h(\mathfrak{p}^*)|\leqq f_x(\mathfrak{p}^*)$ が成立するとき $h(\mathfrak{p}^*)$ は L のある要素の表現となる。例へば L が單位 e をもつとき $f_e(\mathfrak{p}^*)\equiv 1$ となる表現では Ω 上のすべての有界連續函數は L の要素の表現である。

§5. 分離空間。

Ω をビコムパクト空間，$\mathfrak{F}$ をその上の連續函數のある族とする。F の任意の函數が常に相等しい値をとる點を恒等視し分離空間 $\Omega_{\mathfrak{F}}$ を作りその上で $\mathfrak{F}$ を考へると最早 $\Omega_{\mathfrak{F}}$ の任意の二點は $\mathfrak{F}$ のある函數で異なつた値がとられる。$\Omega_{\mathfrak{F}}$ がビコムパクトとなることは殆ど自明である。

補助定理 1. Ω をビコムパクト空間，$\mathfrak{F}$ を Ω の連續函數からなる 1 を含むベクトル束で Ω の任意の二點は $\mathfrak{F}$ のある函數で異なつた値がとられるとする。このとき Ω 上の任意の有界連續函數は $\mathfrak{F}$ の函數で一様に近似される。

證明。 $\varphi(p)$ を Ω 上の任意の有界連續函數とする。$1\geqq\varphi(p)\geqq 0$ のとき定理を證明すれば充分である。Ω がビコムパクトであるから Ω の開集合の基底として $[f(p)>0]$, $0\leqq f\leqq 1$, $f\in\mathfrak{F}$ の形で與へられるものをとることが出來る。$0\leqq f\leqq 1$ を滿足する $\mathfrak{F}$ の函數で $\left[\varphi(p)\geqq\dfrac{i}{n}\right]$, $i=1,2,\dots,n$, で 1, $\left[\varphi(p)\leqq\dfrac{i-1}{n}\right]$ で 0 となるものを $f_i(p)$ とするとき。

$$\left|\varphi(p)-\frac{1}{n}\sum f_i(p)\right|\leqq\frac{1}{n}$$

となる。 以上。

注意。 $\mathfrak{F}$ が有理數を作用圏とする群束の場に於ても補助定理 1 が成立することは上の證明法から自明。

補助定理 2. Ω 及び Ω_1 をビコムパクト空間, $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}_1$ とを夫々 Ω 及び Ω_1 上のすべての有界連續函數からなるベクトル束とする。$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}_1$ がベクトル束的同型で 1 が 1 に對應するとき Ω と Ω_1 とは位相的に對等である。

證明。p を Ω の任意の一點とする。p を零點とする $\mathfrak{F}$ のすべての連續函數の全體を $\mathfrak{F}(p)$ で表す。$\mathfrak{F}(p)$ に對應する $\mathfrak{F}_1$ のすべての連續函數は唯一點 p_1 を共通の零とする $\mathfrak{F}_1$ のすべての連續函數からなることが容易に證明される。p に p_1 を對應させるとき Ω と Ω_1 とは位相的に對等となる。

何者, $f\in\mathfrak{F}$, $f_1\in\mathfrak{F}_1$ が互に對應するとする。$f(p)=\lambda$ と置くとき $f-\lambda$ には $f_1-\lambda$ が對應し $f_1(p_1)=\lambda$ となることから容易に判る。 以上。

"ベクトル束の表現" に於て主イデヤルによるものと正規イデヤルによるものとを考へた。即ち L を σ-完全ベクトル束且單位 e が存在するとする。主イデヤルの作る σ-ブール代數 P の表現ブール空間を Ω, 正規イデヤルの作る完全ブール代數 N の表現ブール空間を Ω_1 とする。e を恒等的に 1 になるやうに L を Ω 及び Ω_1 上の連續函數で表現する。Ω から表現函數で分離空間を作るには e に關して有界な要素に對應する表現函數だけを考へれば充分であるから Ω は Ω_1 の分離空間となり且 Ω 上のすべての有界連續函數が表現函數になる。從て Ω 上への表現は補助定理 2 が示す樣に單獨的に定まるビコムパクト空間上の表現である。アルキメデス的ベクトル束の場合も表現空間を表現函數から分離空間を作るとき單位 e を恒等的に 1 にするやうな單獨的に定まるビコムパクト空間への表現になることが判る。

§6. 廣義の收歛及び有界性。

L を完全ベクトル束, Ω をその表現ブール空間, $\mathfrak{L}_\Omega$ を Ω 上殆ど到る所有限な値をとる連續函數の作る完全ベクトル束とする。L を Ω 上の連續函數で表現し $\mathfrak{L}_\Omega$ に埋藏する。

定理 1. E を L の部分集合とする。次の二つの命題は同義である。

(1°) E は $\mathfrak{L}_\Omega$ で束的有界である。

(2°) $\mathfrak{A}$ を L の任意の主イデヤルのときその (0) でない部分主イデヤル $\mathfrak{A}_1$ が存在し $\mathfrak{A}_1$ への E の射影は束的有界である。

證明。

---

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎: 前掲。

$(1°)\to(2°)$ の證。E の任意の要素 x につき $|x|\leqq h,\ h\in\mathfrak{L}_\Omega$ とする。$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(e)$ と置く。$h(\mathfrak{p}^*)\equiv 0$ のとき $(2°)$ の成立は自明。然らざるときは正數 n と基本開集合 O が存在して O 上 $f_e(\mathfrak{p}^*)>0,\ h(\mathfrak{p}^*)\leqq nf_e(\mathfrak{p}^*)$ が成立する。O の特性函數を $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ とするとき $f_e(\mathfrak{p}^*)\varphi(\mathfrak{p}^*)$ に應ずる L の要素を e_1 とすると $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}(e_1)$ とすれば $(2°)$ が成立する。

$(2°)\to(1°)$ の證。$h(\mathfrak{p}^*)=\mathrm{l.u.b.}(f_{|x|}(\mathfrak{p}^*)\,;\,x\in E)$ と置く。$h(\mathfrak{p}^*)$ が殆ど有限値をとるときは $(1°)$ が成立する。そうでない場合には $(\mathfrak{p}^*\,;\,h(^*)=+\infty)$ と對等な基本開集合を O とする。O の部分基本開集合 O_1 (その特性函數 $e_1\in L$) が存在しそこである $x\in E$ に對し $f_{|x|}(\mathfrak{p}^*)>0$ が成立する。かやうな一つの x に對し $e=|x|\frown e_1$ と置くと $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(e)$ に對し最早 $(2°)$ は成立しない。 以上。

定理 1 の條件 $(2°)$ を滿足する L の部分集合 E は廣義の束的有界であると云ふ。

定理 2. L の要素列 $\{x_n\}$ と要素 $x\in L$ について次の二つの命題は同義である。

$(1°)$ $x_n\to x\,(o)$ が $\mathfrak{L}_\Omega$ で成立する。

$(2°)$ $\mathfrak{A}$ を L の任意の主イデヤルとするとき (0) でない $\mathfrak{A}$ の部分主イデヤル $\mathfrak{A}_1$ が存在し $P_{\mathfrak{A}_1}x_n\to P_{\mathfrak{A}_1}x\,(o)$ が成立する。

證明。$(1°)\to(2°)$ の證。定理 1 から $\mathfrak{A}$ に對しその部分主イデヤル $\mathfrak{A}_1$ が存在し $\mathfrak{A}_1$ への $\{x_n\}$, x の射影は束的有界となるから $(2°)$ が成立する。

$(2°)\to(1°)$ の證。$\left(\mathfrak{p}^*\,;\,\overline{\lim_{n\to\infty}}f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)\neq f_x(\mathfrak{p}^*)\right)$ が第一種集合となることが前定理 1 の後半の證明と同様に示される。 以上。

定理 2 の條件 $(2°)$ を滿足するとき $\{x_n\}$ は x に廣義の (o)-收斂をすると云ふ。

定理 3. L の要素列 $\{x_n\}$ が $x\in L$ に (o)-收斂する條件は $\{x_n\}$ が束的有界で x に廣義の (o)-收斂をなすことである。

第三章　環束

§ 1. 環束。

環單位 e もつ環 R が次の條件を滿足するとき環束といふ。

(1) R は群束である。

(2) e は群束の單位である。即ち $e>0$ で $x>0$, $x\in R$ のとき $e\frown x>0$ となること。

(3) $x>0$, $y>0$; $x,y\in R$ のとき $xy\geqq 0$.

特にアルキメデス的公理を滿足するときアルキメデス的環束といふ。第 3 節まで環束とはアルキメデス的とする。尙完全環束, σ-完全環束等の意義も自明のことと思ふ。本章の目的は表現空間を通して環束の可換性及び連續函數による表現(1) を論ずることである。

§ 2. 各要素が單位 e に關して有界な環束。

G を單位 e もち各要素が e に關して有界な群束とする。G の任意二要素の間に配分の法則が成立るやうな積が定義され, e が積の單位となる。即ち $a,b,c\in G$ のとき

$$a(b+c)=ab+ac\,,\quad (b+c)a=ba+ca\quad ea=ae=a$$

が成立し $a>0$, $b>0$ のとき $ab\geqq 0$ を滿足するものとする。

積について結合の法則を假定しない。この條件のもとに積の性質を調べて見る。補助定理の形でその性質を述べると

補助定理 1. G が完全ベクトル束のとき積は可換である。

證明。 $a>0$, $b>0$ のとき $ab=ba$ を證明すればよい。更に a,b は e に關する特性要素の正有理數係數の一次的結合で e に關して一様に近似することが出來るから a,b が特性要素のとき證明すれば充分である。このとき $ab\leqq a\frown b$ が成立するから e を恒等的に 1 ならしめるやう G を表現ブール空間上の連續函數で表現すると

$$f_{ab}(\mathfrak{p}^*)\leqq f_a(\mathfrak{p}^*)f_b(\mathfrak{p}^*)$$

が成立する。$e-a=a'$ とすると a',b について

$$f_{a'b}(\mathfrak{p}^*)\leqq f_{a'}(\mathfrak{p}^*)f_b(\mathfrak{p}^*)$$

この二式を邊々相加へて

$$f_b(\mathfrak{p}^*)\leqq f_b(\mathfrak{p}^*)$$

となるから $f_{ab}(\mathfrak{p}^*)=f_a(\mathfrak{p}^*)f_b(\mathfrak{p}^*)$ が成立する。a と b とを入れかへて考へることにより $f_{ab}(\mathfrak{p}^*)=f_{ba}(\mathfrak{p}^*)$ 即ち $ab=ba$ が成立する。 以上。

補助定理 2. G が完全ベクトル束のとき e を恒等的 1 ならしめる樣 G

---

(1) 中野秀五郎: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **23** (1941), 485–511 に於ても同様な問題が取扱はれて居る。

をその表現ブール空間の連續函數で表現すると任意の $a, b \in G$ に對し $f_{ab}(\mathfrak{p}^*)=f_a(\mathfrak{p}^*)f_b(\mathfrak{p}^*)$ となる。

證明。特性要素 a, b について成立することから容易に證明される。

以上。

補助定理 3. G がアルキメデス的群束のとき積 a, b は可換である。

證明。第一章 §3 の方法で有理數からなる作用圜をもつ G_r を作り同所の記法で $\left[\frac{1}{n}, a\right]\cdot\left[\frac{1}{m}, b\right]=\left[\frac{1}{nm}, ab\right]$ と定めるとき G_r につき G に設けた本節の始めの假定が成立する。從て最初から $G=G_r$ として差支ない。G を完全に含む完全ベクトル束の極小なもの G^* を考へる。第二章 §4 の所論から G^* の任意の要素 x^* には有向集合を添數とする e に關して一樣有界な $\{a_\alpha\}$, $\{w_\alpha\}$, a_α, $w_\alpha \varepsilon G$ を適當にとり

$$|x^*-a_\alpha| \leqq w_\alpha, \quad \alpha<\beta \text{ のとき } w_\alpha \leqq w_\beta, \quad \wedge w_\alpha=0$$

ならしめることが出來る。この性質を使つて G^* の要素の間に極限方法で積の定義を擴大すれば補助定理 1 から補助定理 3 の成立が分る。以上。

補助定理 4. G がアルキメデス的のとき e を恒等的に 1 となる樣に G の表現空間の連續函數で G を表現すると任意の $a, b \in G$ に對し

$$f_{ab}(\mathfrak{p}^*)=f_a(\mathfrak{p}^*)f_b(\mathfrak{p}^*)$$

が成立する。

證明。補助定理 2, 3 から。 以上。

定理。各要素が e に關して有界なアルキメデス的環束 R（積の結合律を假定する必要はない）は常に可換で單獨的に定まるビコムパクト空間の有界連續函數環と環束的同型に表現される。特に G が有理數からなる作用圜をもつときは稠密な連續函數環で環束的同型に表現される。

證明。定理の前半は補助定理 3, 4 に依つて自明。定理の後半は補助定理 3, 4 と第二章 §5 の所論から容易に證明出來る。 以上。

§3. 環束の可換性とその表現。

R をアルキメデス的環束とする。§2 の定理を一般にして論ずるため若干の補助定理から始める。

補助定理 1. $a>0$, 且つ e に關して有界のとき

$$(ax)_+=(ax)_+, \quad (ax)_-=ax_-$$

ax_+

證明。 $a\leqq ne$ とする。$ax=ax_+-ax_-$, $ax_+\frown ax_-\leqq n(x_+\frown x_-)=0$.

以上。

補助定理 2. $x>0$ のとき $x=\bigvee_n(x\frown ne)$.

證明。 $x\varepsilon\mathfrak{A}(e)=R$ から第一章 §2 補助定理 5 から容易に證明される。

以上。

補助定理 3. $a>0$ を e に關して有界, 任意の $x>0$ に對し $x_n=x\frown ne$ と置くと $ax=\bigvee_n ax_n$.

證明。 $a\leqq me$ とすると $\bigwedge(ax-ax_n)\leqq m\bigwedge(x-x_n)=0$ から。 以上。

補助定理 4. $x>0$, $y>0$, $xy=0$ ならば $x\frown y=0$.

證明。 $x_m=x\frown me$, $y_n=y\frown ne$ とするとき $x_my_n\leqq xy=0$ から $x_my_n=0$. x_m, y_n は e に關して有界であるから §2 の定理から $x_m\frown y_n=0$. 從て第一章 §1 補助定理 10 と 本節補助定理 3 から $x\frown y=0$. 以上。

補助定理 5. $a>0$ が e に關して有界のとき $x>0$ に對して $a\frown x=0$ ならば $ax=0$.

證明。 $x_n=x\frown ne$ と置くと $a\frown x_n\leqq a\frown x=0$ 且 a と x_n は e に關して有界從て §2 の定理から $ax_n=0$ 從て補助定理 3 から $ax=0$. 以上。

補助定理 6. R が有理數からなる作用圏をもつならば $x>0$, $y_n\downarrow 0$ のとき $xy_n\downarrow 0$.

證明。 R を e が恒等的 1 となる様に R の表現ブール空間 Ω 上の連續函數で表現する。任意の自然數 m に對して $x_m=x\frown me$, $x'_m=x-x_m$ と置く。一點 $\mathfrak{p}^*$ で $f_x(\mathfrak{p}^*)<m$ とするときその點の近傍 $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ は正規イデヤル) で $f_x(\mathfrak{p}^*)<m$ となり從て $\mathfrak{A}$ 上で $f_{x'_m}(\mathfrak{p}^*)=0$ となる。從て任意の正の有理數 λ に對し $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}((x_{m'}-\lambda e)_+)=(0)$. e に關して有界な $\mathfrak{A}$ の任意の正要素 u をとる。$u\frown(x'_m-\lambda e)_+=0=(ux'_m-\lambda u)_+$ (補助定理 1, 5). 從て $ux'_m\leqq\lambda u$. 然るに λ は任意であるから $ux'_m=0$. 故に $u(x'_my_n-\lambda e)_+=(ux'_my_n-\lambda u)_+=(-\lambda u)_+=0$ (補助定理 1). 從て $u\frown(x'_my_n-\lambda e)_+=0$ (補助定理 4). これから $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}\big((x'_my-\lambda e)_+\big)=0$ となる。 即ち $\mathfrak{p}^*\in\mathfrak{A}$ のとき $f_{x'_my}(\mathfrak{p}^*)=0$. 故に $f_{xy_n}(\mathfrak{p}^*)=f_{x_my_n}(\mathfrak{p}^*)$. x_m は有界であるから $n\to\infty$ のとき $x_my_n\downarrow 0$ が成立する。從て第一種集合を除いて $f_{xy_n}(\mathfrak{p}^*)\downarrow 0$ なることが判る。これから $xy_n\downarrow 0$ が成立することになる。

以上。

定理 1. アルキメデス的環束 R は可換である。

證明。 R を §2 に於ける様に有理數を作用圏とする環束に擴大して考へる。從て始めから R は有理數からなる作用圏をもつ場合を考へればよい。$x>0,\ y>0$ のとき $xy=yx$ を證明すれば充分である。x が e に關して有界のときは $y_n=y\frown ne$ と置くと §2 の定理を使つて

$$xy=\bigvee xy_n=\bigvee y_nx=yx.$$

x が有界でないときは $\bigwedge(xy-xy_n)=\bigwedge x(y-y_n)=0$ (補助定理 6) から $xy=\bigvee xy_n=\bigvee y_nx=yx$ を得る。 以上。

補助定理 1. アルキメデス的環束 R の單位 e が恒等的に 1 となるやうに R の表現ブール空間 Ω 上の連續函數で R を表現するとき，第一種集合を除いて

$$f_{xy}(\mathfrak{p}^*)=f_x(\mathfrak{p}^*)f_y(\mathfrak{p}^*)$$

が成立する。

證明。 $x>0,\ y>0$ をして證明すれば充分である。x, y が e に關して有界のときは §2 の定理から本補助定理が成立する。x, y の何れか例へば x は e に關して有界 y は有界でないとすると $y_n=ne\frown y$ と置いて補助定理 3 を使つて

$$f_{xy}(\mathfrak{p}^*)=\lim_{n\to\infty}f_{xy_n}(\mathfrak{p}^*)=f_x(\mathfrak{p}_*)\lim_{n\to\infty}f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)=f_x(\mathfrak{p}^*)f_y(\mathfrak{p}^*)$$

が第一種集合を除いて成立する。x, y の何れも有界でないときは再び同じ方法を繰返せばよい。 以上。

定理 2. アルキメデス的環束 R は單獨的に定まるビコムパクト空間の第一種集合上を除いて有限値をとる連續函數族の環束に依つて環束的同型に表現される。

證明。 補助定理 7 及び第二章 §5 の所論から。 以上。

定理 3. 單位 e もつアルキメデス的群束 G は必要あるときは G を擴大して e を環單位とする環束に擴大することが出來る。且つ積は G 上では單獨的に定まる。

證明。 定理 2 を使つて。 以上。

L を單位 e をもつアルキメデス的ベクトル束とし e が恒等的に 1 になる様にその表現空間 Ω 上の連續函數で L を表現する。x を L の任意の要素

としすべての有理数 λ につき $\bigvee(2\lambda x-\lambda^2)$ が存在するとき之を x^2 と定める。之を表現空間の上で考へると Ω 上のすべての連續函數の完全ベクトル束 $\mathfrak{L}_\Omega$ では $\underset{\lambda}{\mathrm{l.u.b.}}\,(2\lambda f_x(\mathfrak{p}^*)-\lambda^2)=\{f_x(\mathfrak{p}^*)\}^2$ なる。從て之に應ずる L の要素が存在するとき之を x^2 と定めることである。L の表現に固有な上述の表現空間の分離空間を考へても x^2 の表現函數は x の表現函數の自乘となる。x, y の積として $xy=\frac{1}{4}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$ で定義するのが Riesz の積の定義[1] の方法であり, Riesz の積に關する性質はこれから明瞭になる。

§4. 有限次元の環束。

R を實數よりなる作用團をもつ有限次元即ち一次的獨立な要素の數が有限な環束とする。アルキメデス的公理を代數的性質で究めるため, 始め R にアルキメデス的公理を假定せずに進む。R_b で e に關して有界な要素からなる R の部分環束とする。

補助定理 1. R_b の根基は e に關する無限小の全體と一致する。

證明。x を e に關して無限小とする。$x^2, x^3 \cdots$ が 0 でないとする。このとき $x>0$ として一般性を失はない。何者 $|x^n|=|x|^n$ が容易に證明出來るから。x^{n+1} は x^n に關して無限小となることから有限個の x^n の一次的結合が 0 となればその係數は悉く 0 となり矛盾が起る。即ち無限小要素は ロ 零元となる。x が無限小のとき ax, xa も無限小, 從て ロ 零元となるから x は根基に屬す。逆に根基に屬する任意の要素 x は無限小である。之を證明するには $x>0$ として $x^2=0$ のとき x が無限小なることを證明すれば充分である。α を任意の正數とすると $x^2-\alpha^2e<0$ 從て $\alpha(x-\alpha e)_+\leqq(x+\alpha e)(x-\alpha e)_+=(x^2-\alpha^2e)_+=0$ 從て $x\leqq\alpha e$ となり x は無限小となる。 以上。

定理 1. R_b に於ては "アルキメデス的公理" と "半單純" とは同義である。

證明。補助定理 1 から。 以上。

補助定理 2. R_b がアルキメデス的公理を滿足するとき $R=R_b$ が成立する。

證明。R_b がアルキメデス的公理を滿足するときは R_b は完全環束[2] とな

---

(1) F. Riesz: Acta Szeged **10** (1941), 9.
(2) 小笠原藤次郎: 本誌 **11** (昭和 17 年), 127.

るから實數全體の作る環束の直積となることは §3 に述べた表現論から容易に判る。e を原始 ▽ 等元 $e_i, i=1,2,\dots n$ に分解する。今 R がアルキメデス的でないとすると正要素 x, y が存在して任意の正數 α に對し $x\geqq\alpha y>0$ が成立する。$y\frown e_i>0$ を滿足する e_i をとると $y\frown e_i=\lambda e_i$ $\lambda>0$ の形に書かれる。從て $x\geqq\alpha e_i$, $xe_i=x$ が任意の正數 α について成立するとして差支ない。これから $x^2\geqq\alpha x, \dots$ となる。この無限大的性質が矛盾を起すことは補助定理 1 の證明中と同様に論ずることが出來る。R がアルキメデス的となると R は完全環束となり各要素が單位に關して有界となることは自明である。　以上。

定理 2. R がアルキメデス的となる條件は ▽ 零元の非在 (或は $x>0$ のとき $x^2>0$) である。

證明。補助定理 1, 2 から。　以上。

定理 3. R が可換のとき“アルキメデス的公理”と“半單純”とは同義である。

證明。補助定理 1, 2 から。　以上。

有限次元でない環束では定理 3 は成立しない。例へばすべての實係數の ▽ 級數を考へ之を辭書的に順序づけ積として Cauchy 積をとるとアルキメデス的でないが ▽ 零元は存在しない。

第四章　ベクトル値測度

§1. ベクトル値測度。

A を完全ブール代數, Ω をその表現ブール空間とする。

第二章ではかやうな Ω を完全ブール空間と呼んだ。A の要素 a に對應する Ω の基本開集合を O_a で表す。Ω の基本開集合を含む最小の Borel 族を $\mathfrak{B}$ とする。

L をアルキメデス的ベクトル束, $\mu(a)$, $a\in A$ を A 上で定義された L を値域とする完全加法的ベクトル値函數とする。即ち $a=\sum a_n$, $a_n\frown a_m=0$, $(n\neq m)$ のとき $\mu(a)=\sum\mu(a_n)$, ((0)-極限で) が成立することを假定する。今 $\mu(O_a)=\mu(a)$ と置いて Ω の基本開集合上のベクトル値集合函數を定義すると

定理 1. $\mu(O_a)$ は $\mathfrak{B}$ 上の完全加法的ベクトル値集合函數に擴大される。而も擴大の仕方は唯一通りに限る。

證明。 $E\in\mathfrak{B}$ とする。第二章 §1 の所論から $E=O\Delta P$ (基本開集合と第一種集合の對稱差) の形で表すことが出來る。$\mu(E)=\mu(O)$ と置くと $E=\sum E_n$, $E_nE_m=0$, $(n\neq m)$ のとき $E_n=O_n\Delta P_n$ とするとき O, O_n に對應する A の要素を a, a_n とすると $a=\bigvee a_n$, $a_n\cap a_m=0$, $(n\neq m)$ となることは容易に判るから $\mu(E)=\mu(O)=\sum\mu(O_n)=\sum\mu(E_n)$ となる。今 $\nu(E)$ を $\mu(O_a)$ の $\mathfrak{B}$ 上での擴大とし $\mu(E)=\nu(E)$ となる $\mathfrak{B}$ の要素の全體を $\mathfrak{N}$ とすると

(i) $E\in\mathfrak{N}$ のとき $E^c\in\mathfrak{N}$, (ii) $E_n\in\mathfrak{N}$, $E_nE_m=0$ $(n\neq m)$ のとき $\sum E_n\in\mathfrak{N}$ (iii) $O_a\in\mathfrak{N}$ の成立は明である。從て第二章 §1 補助定理 2 に依つて $\mathfrak{B}=\mathfrak{N}$ となる。 以上。

$\mu(a)\geqq 0$, $a\in A$ のとき $\mu(E)\geqq 0$, $E\in\mathfrak{B}$ となる。特に $a\neq 0$ のとき $\mu(a)>0$ となるならば $\mu(E)=0$, $E\in\mathfrak{B}$ と E は $\mathfrak{B}$ に屬する第一種集合とは同義である。

$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{B}$ の集合と第一種集合を除いて一致する ($\mathfrak{B}$ の代りに基本開集合, 或は Borel 集合をとつても同義) 集合の族とする。第二章では $\mathfrak{M}$ に屬する集合のことを可測集合と呼んだ。

定理 2. $\mu(O_a)$ は $\mathfrak{M}$ 上の完全加法的ベクトル値集合函數に擴大される。

證明。 $E\in\mathfrak{M}$ は $E=O\Delta P$ の形で表されるから $\mu(E)=\mu(O)$ と置けばよい。これが完全加法的となることは定理 1 と同論法で證明される。

L が完全ベクトル束で Ω がその表現空間のときを考へる。L が單位 e をもつとき正規イデヤル $\mathfrak{A}$ への射影 $P_{\mathfrak{A}}e$ は正規イデヤルの完全ブール代數 N 上の完全加法的ベクトル値函數である。これから Ω の任意の可測集合に對し定理 2 に依つて測度が與へられる。[1] 之を Ω のベクトル値測度函數といふ。

以上完全ブール代數の表間ブール空間に對して論じたが A が σ ブール代數で Ω が A の表現空間の場合にも同様の結果が得られる。

次に A をブール代數, Ω をその表現空間, L を Kantorovitch の意味での K_6^- 型正則ベクトル束とする。[2] $\mu(a)$ を A 上で定義された L を値域とする束的有界な加法的函數とする。從前通り $\mu(O_a)=\mu(a)$ と置くと

---

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎: 前掲。

(2) L. Kantorovitch: Recueil Math. 49 (1940), 209-284 特に 211 頁。單に正則ベクトル束ともいふ。尚第二編 第二章 §1 を見よ。

定理 3. 加法的集合函數 $\mu(O_a)$ は Ω の Borel 集合族上の完全加法的集合函數に擴大される。

證明。 $\mu(O_a)\geqq 0$ として證明すれば充分である。何者，一般の場合は μ の正及負部分について論ずればよいから。 G, O, E 及びそれに添數をつけて夫々開集合，基本開集合，一般の集合を表はすことにする。

$$\mu^*(G)=\bigvee\{\mu(O)\,;\ O\subset G\},\qquad \mu^*(E)=\bigwedge\{\mu^*(G)\,;\ E\subset G\}$$

と置いて

(1°) $\mu(G_1+G_2)+\mu^*(G_1G_2)\leqq\mu^*(G_1)+\mu^*(G_2)$

(1°) の證。 $O\subset G_1+G_2$, $O_1\subset G_1G_2$ なる任意の O, O_1 をとる。O_2 を O_1 と素な O の部分で $O-G_2\subset O_2\subset G_1$ を滿足するやうにとる。$O_3=O-O_2$ と定めると

$$\mu(O)+\mu(O_1)=\mu(O_2)+\mu(O_1)+\mu(O_3)=\mu(O_1+O_2)+\mu(O_3)\leqq\mu^*(G_1)+\mu^*(G_2)$$

の成立から (1°) が證明される。

(2°) G と O が互に素のとき $\mu^*(G+O)=\mu^*(G)+\mu(O)$

(2°) の證。 $O_1\subset G$ なる任意の O_1 をとり $O_2=O_1+O$ とする。$\mu(O_1)+\mu(O)\leqq\mu^*(G+O)$ これから $\mu^*(G)+\mu(O)\leqq\mu^*(G+O)$.

然るに (1°) から $\mu^*(G)+\mu(O)\geqq\mu^*(G+O)$ 故に (2°) が成立する。

(3°) $\overline{E}_1$ と E_2 が互に素のとき $\mu^*(E_1+E_2)=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)$

(3°) の證。 E_2 が開集合のとき $O\subset E_2$ なる任意の O に對し $\mu^*(E_1+E_2)\geqq\mu^*(E_1+O)=\mu^*(E_1)+\mu(O)$. 從て $\mu^*(E_1+E_2)\geqq\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)$. (1°) に依つて (3°) が成立する。一般の場合には $G\supset E_1+E_2$ なる任意の G をとり $G_1=\overline{E}_1^c$ と定めると $\mu^*(G)\geqq\mu^*(E_1+GG_1)=\mu^*(E_1)+\mu^*(GG_1)\geqq\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2)$. これから (3°) の成立が證明される。

次に可測集合に定義を與へる。E が Ω のすべての部分集合 X に對して

$$\mu^*(X)=\mu^*(XE)+\mu^*(XE^c)$$

が成立するとき E を可測と云ふ。

(4°) E が可測のとき E^c も可測である。

(4°) の證。 殆ど自明。

(5°) E_1, E_2 が可測のとき E_1+E_2, E_1E_2 も可測で $\mu^*(E_1+E_2)+\mu^*(E_1E_2)$
$=\mu^*(E_1)+\mu(E_2)$ が成立する。

(5°) の證。 $\mu_X^*(E)=\mu^*(XE)$, $\mu_{X*}(E)=\mu^*(X)-\mu^*(XE^c)$ と置くと可測の條件は $\mu_X^*(E)=\mu_{X*}(E)$ となる。(1°) から

$$\mu_X^*(E_1+E_2)+\mu_X^*(E_1E_2)\leqq\mu_X^*(E_1)+\mu_X^*(E_2)$$

$$\mu_{X*}(E_1+E_2)+\mu_{X*}(E_1E_2)\geqq\mu_{X*}(E_1)+\mu_{X*}(E_2)$$

が成立する。この式から容易に (5°) の成立が判る。

以上で可測集合は體 (Körper) を作ることが判る。

(6°) 開集合は可測である。

(6°) の證。(3°) と可測の定義から。

(7°) $G=\sum G_n$ のとき $\mu^*(G)\leqq\sum\mu^*(G_n)$

(7°) の證。 G の補集合を F とし G_a を $F\subset G_a$ なる任意の開集合とする。Ω は G_a と有限個の G_n で被覆されるから

$$\mu(\Omega)=\mu^*(G)+\mu^*(F)\leqq\mu^*(G_a)+\sum\mu^*(G_n)$$

これから (7°) が證明される。

(8°) $E=\sum E_n$ のとき $\mu^*(E)\leqq\sum\mu^*(E_n)$

(8°) の證。 L が正則であることから正要素 e が存在して(1) 各の E_n に對し

$$\mu^*(E_n)\leqq\mu^*(G_n)\leqq\mu^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}e,\qquad \varepsilon \text{ は任意の正數}$$

なる G_n が存在する。(7°) を使つて

$$\mu^*(E)\leqq\mu^*(\sum G_n)\leqq\sum\mu^*(G_n)\leqq\sum\mu^*(E_n)+\varepsilon e$$

これから (8°) の成立が判る。

(9°) E_n, $n=1,2,\ldots$ が可測のとき $\sum E_n$ も可測でもし E_n が互に素ならば $\mu^*(\sum E_n)=\sum\mu^*(E_n)$

(9°) の證。 可測集合が體を作ることから E_n が互に素として證明すればよい。(5°) の記法を使つて (8°) から

$$\mu_X^*(\sum E_n)\leqq\sum\mu_X^*(E_n),$$

また $\mu_{X*}(\sum E_n)\geqq\sum\mu_{X*}(E_n)$ が容易に證明出來るから (9°) が成立する。

$\mu^*(E)$ は基本開集合の上では $\mu(O_a)$ と一致することは自明。これから定理 3 の成立が容易に判る。　　以上。

---

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. 44 (1937), 121-168. 定理 27+a.

集合函數の擴大に關する E. Hopf の定理[1] も K_6^- 型正則ベクトル束を値域とする集合函數に對して擴張することが出來る。

§2. 正則ベクトル束の表現ブール空間。

L を單位 e をもつ K_6^- 型正則ベクトル束，Ω を L の表現空間とし，$\mathfrak{L}_\Omega$ を第一種集合を除いて有限値をとる連續函數の全體とする。$\mathfrak{L}_\Omega$ が完全ベクトル束であることは第二章 §1 で證明したが更に次の定理が成立する。

定理。$\mathfrak{L}_\Omega$ は K_6 型正則ベクトル束[1] である。

證明。L を e が恒等的に 1 となる様に表現空間 Ω 上の連續函數で表現し $\mathfrak{L}_\Omega$ に埋藏する。$\mathfrak{L}_\Omega$ の要素は x 或は $f_x(\mathfrak{p}^*)$ 等で表す。第 1 節で定義した Ω の可測集合の測度函數を μ とすると Ω 上の可測函數に對し Lebesque-Stieltjes 積分が定義される。$x \in \mathfrak{L}_\Omega$ に對し $\rho(x)=\int_\Omega \frac{|f_x(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_x(\mathfrak{p}^*)|}d\mu$ 換言すれば $\frac{|f_x(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_x(\mathfrak{p}^*)|}$ を表す $\mathfrak{L}_\Omega$ の要素を $\rho(x)$ とすると $\rho(x) \epsilon L$, $0 \leqq \rho(x) \leqq e$ が成立する。これについて次のことがいへる。

(1) $\rho(x) \geqq 0$, $x=0$ のときに限り $\rho(x)=0$.

(2) $\rho(x+y) \leqq \rho(x)+\rho(y)$.

(3) $|x|<|y|$ のとき $\rho(x)<\rho(y)$, $|x|=|y|$ のとき $\rho(x)=\rho(y)$.

(4) $x_n \downarrow 0$ のとき $\rho(x_n) \downarrow 0$.

(5) $x_n>0$, $x_n \uparrow +\infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}\rho(x_{n+p}-x_n)>0$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n)>0$$

但し，lim は (o)-lim を意味する。

Kantorovitch の證明法[3] を多少修正して $\mathfrak{L}_\Omega$ が K_6 型正則ベクトル束となることが證明出來る。それには次に述べる二三の注意で充分であらう。

(1°) E を $\mathfrak{L}_\Omega$ の任意の部分集合とすると E の可附番部分集合 E' が存在して $\bigvee(x\,;\,x \in E)=\bigvee(x\,;\,x \in E')$.[4]

(1°) の證。E が正要素からなるとき證明すればよい。$E=\bigvee\big(\rho(x)\,;\,x \in E\big)$

(1) A. Kolmogoroff: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933, 15-16 頁。

(2) Kantorovitch: Recueil Math. 49 (1940), 209-284, 特に 211 頁。

(3) L. Kantorovitch: Recueil Math. 44 (1937), 121-168, 特に 147-150.

と置く。L が正則であるから[3] E の可附番部分集合 $\{x_n\}$ が存在し $z=\bigvee\rho(x_n)$ が成立する。

$$f_z(\mathfrak{p}^*)=\underset{n}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\frac{|f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)|}=\frac{|\underset{n}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)|}{1+|\underset{n}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,f_{x_n}(\mathfrak{p}^*)|}$$

が殆ど到る所で（第一種集合を除いてと同義）成立つ。

$\bigvee x_n=+\infty$ のとき $\bigvee(x;\,x\in E)=+\infty$ となることは自明。$\bigvee x_n=y\in\mathfrak{L}_\Omega$ のときは上の等式から

$$f_z(\mathfrak{p}^*)=\frac{|f_y(\mathfrak{p}^*)|}{1+|f_y(\mathfrak{p}^*)|},\qquad \text{殆ど到る所で,}$$

これから $\rho(y)=z$ となる，任意の $x\in E$ を考へる。明かに

$$x\cup y=\bigvee(x_n\cup y),\quad \text{從て}\quad z=\bigvee\rho(x_n\cup y)$$

これから上と同論法で $\rho(y)=z=\rho(x\cup y)$ 故に (3) から $y=x\cup y$ 即ち $y=\bigvee(x;\,x\in E)$ となる。

この證明から判る樣に $\bigvee(x;\,x\in E)=+\infty$ のときでも Ω 上の函數として考へると殆ど到る所で $\bigvee x_n$ と一致することを注意する。

$\rho(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigvee\big(\rho(x_i);\,1\leqq i\leqq n\big)$ と定めると $x_n\to 0\,(o)$ の條件は $\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_n,x_{n+1},\ldots,x_m)=0$ となることに對しては上述の Kantorovitch の證明を殆どそのまゝ成立つ。

(2°) $x_n\downarrow 0$, $x_n^{(k)}\downarrow x_n$ ($k\to\infty$ のとき) から $x_n^{k_n}\to 0\,(o)$ なる列 $\{x_n^{k_n}\}$ が存在する。

(2°) の證。$\rho(x_n^{(k)})-\rho(x_n)\leqq\rho(x_n^{(k)}-x_n)$ から $k\to\infty$ のとき $\rho(x_n^{(k)})\downarrow\rho(x_n)$. 從て L の正則性[1] から正要素 y が存在し

$$\rho(x_n^{(k_n)})-\rho(x_n)\leqq\frac{1}{2^n}y,\quad k_n<k_{n+1}\quad n=1,2,3,\ldots$$

これから

$$\rho(x_n^{(k_n)},x_{n+1}^{(k_{n+1})},\ldots x_m^{(k_m)})\leqq\rho(x_n,x_{n+1},\ldots x_m)+$$
$$\sum_{n\leqq i\leqq m}\big(\rho(x_i^{(k_i)})-\rho(x_i)\big)\leqq\rho(x_n,x_{n+1},\ldots x_n)+\frac{1}{2^{n-1}}y$$

これから $x_n^{(k_n)}\to 0\,(o)$ が成立することが判る。

---

(1) L. Kantorovitch: 前掲, 定理 27+a.

(3°) E を $\mathfrak{L}_\Omega$ の部分集合で實數列 $\{\lambda_n\}$ につき $\lambda_n\to 0$ が成立つとき $\{x_n\}$ を E の部分列とすると $\lambda_n x_n\to 0\,(o)$. この命題が E について成立するとき E は (0)-有界である。

(3°) の證。 E が正要素からなり有限個の部分集合と共にその結びを含むとき證明すれば充分である。この場合に $x_n\uparrow+\infty$, $x_n\in E$ とする。また $\lambda_n\downarrow 0$ なる任意の實數列を考へる。(5) から, $\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_m x_n)=z_m$ と置くと $z_m\geqq z>0$ なる z が存在する。このとき正要素 y が存在し

$$\rho(\lambda_m x_{n_m})\geqq z_m-\frac{1}{2^m}y,\quad n_m<n_{m+1}\quad m=1,2,3,\dots$$

が成立つ。[1] 然るに $\lambda_m x_{n_m}\to 0\,(o)$ であるから $m\to\infty$ とすると $z\leqq 0$ となり $z>0$ に反する。故に E は (o)-有界である。 以上。

第二編 半順序線形空間

第一章 作用素の擴大定理

§1. Hahn-Banach 型定理。

定理 1. X を線形空間, Y を完全ベクトル束とする。$p(x)$ を Y を値域とする X 上の函數で

$$p(x_1+x_2)\leqq p(x_1)+p(x_2),\quad t \text{ が正數のとき } p(tx)=tp(x)$$

が成立つとする。

今 $f(x)$ を Y を値域とする X の部分線形空間 X_0 上の線形函數で X_0 上で $f(x)\leqq p(x)$ が成立するときこの關係を保存して $f(x)$ を X 上の線形函數 $F(x)$ に擴大される。即ち X_0 上で $F(x)=f(x)$, X 上で $F(x)\leqq p(t)$ が成立つ線形函數 $F(x)$ が存在する。

證明。 Banach に從つて[1] 殆ど文字通り證明を行へばよい。 以上。

定理 2. 定理 1 に於て X をベクトル束で, $p(x)$ が更に $|x_1|\leqq|x_2|$ のとき $p(x_1)\leqq p(x_2)$ が成立つとき定理 1 の $F(x)$ は正則である。

注意。 $F(x)$ が正則とは正線形函數を優函數としてもつことをいふ。そのための條件は任意の正要素 x に對し $(F(x');\ |x'|\leqq x)$ が束的有界のことである。[3]

---

(1) Kantorovitch: 前掲, 定理 27⁺a.
(2) S. Banach, *Théorie des opérations linéares*, (1932), 28 頁。
(3) L. Kantorovitch, Recueil Math. 7 (1940), 特に 219-223 頁。

證明。 $|x'|\leqq x$ のとき $|F(x')|\leqq p(x)$ が成立つことから容易に判る。

以上。

Y を完全ベクトル束とするとき $y_1+iy_2, y_1, y_2\in Y$ の形で表される要素の全體を Z で表し Z を通例の方法で線形空間とし $|y_1+iy_2|=\bigvee(c_1y_1+c_2y_2;\ c_1, c_2$ は $c_1^2+c_2^2=1$ を滿足する任意の實數) と定めるとき Z を複素ベクトル束と云ひ $Z=Y+iY$ で表す。Bohnenblust, Sobczyk[1] に倣つて次の定理を證明する。

定理 3. X をノルムの定義された複素線形空間, Y を完全ベクトル束, $Z=Y+iY$ とする。$p(x)$ が Y を値域とする X 上の函數で

$$p(x)=p(\|x\|),\quad p(x_1+x_2)\leq p(x_1)+p(x_2),\quad \text{正數 } t \text{ に對し}\quad p(tx)=tp(x),$$

が成立つとする。

今 $f(x)$ を Z を値域とする, X の複素部分線形空間 X_0 上の複素線形函數で $|f(x)|\leqq p(x)$ を滿足するものとする。このとき X 上の複素線形函數 $F(x)$ で

$$X_0 \text{ 上で } F(x)=f(x),\quad X \text{ 上で } |F(x)|\leqq p(x)$$

を滿足するものが存在する。

證明。 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ は $f(x)$ の實及び虚部分とすれば, X_0 上で $f_2(x)=-f_1(ix)$ が成立することが容易に判る。而も $|f_1(x)|\leqq|f(x)|\leqq p(x)$ が成立するから定理 1 による $f_1(x)$ の擴大を $F_1(x)$ と置き $F(x)=F_1(x)-iF_1(ix)$ と定めこれが問題の $F(x)$ となることを證明すればよい。先ず $x\in X_0$ のとき $f(x)=F(x)$ となることは定義から明である。次に $x\in X$ のとき $F_1(e^{i\alpha}x)=\cos\alpha\cdot F_1(x)+\sin\alpha F_1(ix)$ となるから $|\cos\alpha F_1(x)+\sin\alpha F_1(ix)|\leqq p(e^{i\alpha}x)$ $=p(x)$ 從て

$$|F(x)|\leqq p(x).$$

以上。

定理 4. X を σ-完全ベクトル束, $W=X+iX$, Y を完全ベクトル束, $Z=Y+iY$ とする。$p(w)$ を Y を値域とする W 上の函數で

$$p(w)=p(|w|),\quad p(w_1+w_2)\leqq p(w_1)+p(w_2),\quad \text{正數 } t \text{ に對して}\quad p(tw)=tp(w)$$

が成立するとする。

今 $f(w)$ を W の複素部分線形空間 W_0 上で定義され Z を値域とする複素線形函數とし $|f(w)|\leqq p(w)$ が成立つものとする。このとき W 上で定義

(1) Bohnenblust-Sobozyk, Bull. A. M. S. **44** (1933), 91-93.

され Z を値域とする複素線形函數 $F(w)$ で W_0 上で $F(w)=f(w)$, W 上で $|F(w)|\leqq p(w)$ となるものが存在する。

證明。 定理 3 の證明に準ず。　　以上。

§2. 正線形函數の擴大。

定理 1. X をベクトル束, X_0 を X の部分線形空間で任意の $x\in X$ に對し $x_0'\leqq x\leqq x_0''$ が成立つ $x_0', x_0''\in X_0$ が存在するとする。Y を完全ベクトル束とし, $f(x)$ を X_0 で定義され Y を値域とする正線形函數とする。このとき X_0 上で $f(x)$ と一致する X 上の正線形函數が存在する。

證明。 Krein-Smulian の證明法[1] による。x を X_0 に屬しない X の任意の要素とする。$x_0'\leqq x\leqq x_0''$, $x_0', x_0''\in X_0$ とすると $f(x_0')\leqq f(x_0'')$ となるから $\bigvee\left(f(x_0');\ x_0'\leqq x,\ x_0'\in X_0\right)\leqq y\leqq \bigwedge\left(f(x_0'');\ x_0''\geqq x,\ x_0''\in X_0\right)$ を滿足する $y\in Y$ が存在する。かゝる一つの y をとる。X_0 と x を含む最小の線形空間を X_1 とすると X_1 の任意の要素 x_1 は $x_1=x_0+tx$, $x_0\in X$, t は實數, の形で表される。$f_1(x_1)=f(z_0)+ty$ と定めるとき $f_1(x)$ は X_1 上の正線函數であることが容易に判る。本定理の證明はこれから容易である。　　以上。

定理 2. X_0 をアルキメデス的ベクトル束, X を X_0 を含む極小完全ベクトル束, Y を完全ベクトル束とする。Y を値域とする, X_0 上の正線形函數 $f(x)$ は X 上の正線形函數に擴大される。

證明。 前定理から。　　以上。

アルキメデス的ベクトル束 X_0 に次の方法で極限概念を擴げる。任意の有向集合を添數とする束的有界な X_0 の部分集合 $\{x_\alpha\}$ が $x\in X_0$ に δ-收斂するとは $|x-x_\alpha|\leqq w_\alpha$ を滿足し $\alpha>\beta$ とき $w_\alpha\leqq w_\beta$ 且 $\bigvee w_\alpha=0$ となる X_0 の部分集合 $\{w_\alpha\}$ が存在すること定める。X_0 上の正線形函數 $f(x)$ がこの δ-極限で連續のとき即ち上の場合に $\bigwedge f(w_\alpha)=0$ が成立するときは定理 2 の擴大は單獨的に定まる。

第二章 Kantorovitch 空間

§1. Kantorovitch 空間。

X をベクトル束とする。若し Y の各要素 x に實數 $\|x\|$ が對應し

(1) Krein-Smulian, Annals of Math. 41 (1940), 558 頁。

(1) $\|x\| \geqq 0$, $x=0$ のときに限り $\|x\|=0$.

(2) $\|x_1+x_2\| \leqq \|x_1\|+\|x_2\|$.

(3) α が實數のとき $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

(4) $|x_1| \leqq |x_2|$ のとき $\|x_1\| \leqq \|x_2\|$.

(5) $x_n \downarrow 0$ のとき $\|x_n\| \to 0$.

(6) $x_n \leqq x_{n+1}$ $n=1,2,3,\ldots$ 且つ $\{\|x_n\|\}$ が有界のとき $\bigvee x_n$ 存在する。

このうち (1)—(4) が成立つとき X をノルムの附けられた半順序空間といひ，尙 X が完備のとき X を Banach 束といふ。(1)—(6) が成立するとき X を Kantorovitch 空間，或は簡單に K-空間と云ふ。K-空間の性質を調べる。

補助定理 1. K-空間は σ-完全ベクトル束である。

證明。$0 \leqq x_n \leqq x$, $n=1,2,3,\ldots$ のとき $\bigvee\limits_n x_n$ の存在を證明すれば充分である。$x_n'=x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n$ と置くと $0 \leqq x_n' \leqq x_{n+1}' \leqq x$ が成立ち $\|x_n'\| \leqq \|x\|$ となるから (6) により $\bigvee\limits_n x_n'$ 即ち $\bigvee\limits_n x_n$ が存在する。　　以上。

補助定理 2. X が K-空間のとき $x_n \to (o)$ ならば $\|x_n - x\| \to 0$.

證明。假定から $|x_n - x| \leqq x_n'$, $x_n' \downarrow 0$ なる $\{x_n'\}$ が存在する。從て (4), (5) から $\|x_n - x\| \to 0$ が成立つ。　　以上。

補助定理 3. K-空間は完備である。

證明。$\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\|=0$ とする。$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{p_n}\}$ を $p_n < p_{n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$, $m > p_n$ のとき $\|x_{p_n} - x_m\| \leqq \dfrac{1}{2^n}$ なるやうにとる。$x_n'=|x_{p_1}|+|x_{p_2}-x_{p_1}|+\cdots+|x_{p_n}-x_{p_{n-1}}|$ と置くと (6) により $\bigvee x_n'$ が存在する。これから $(o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}$ の存在が判る。これを x とすると補助定理 2 により $\|x_{p_n}-x\| \to 0$. 從て $\|x_n - x\| \to 0$ が成立つ。　　以上。

補助定理 4. K-空間に於ては位相的收斂（或は (t)-收斂）はノルムでの收斂と，束的收斂（或は (0)-收斂）は複ノルムでの收斂と一致する。

注意。複ノルムでの收斂とは $\|x_1, x_2, \ldots x_n\|=\|(|x_1| \cup |x_2| \cup \cdots \cup |x_n|\|$ と置いて $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\|=0$ が成立つとき $\{x_n\}$ は複ノルムで 0 に收斂すると云ふ。記號で $x_n \to 0\,(k)$ と書く。

證明。$x_n \to 0\,(t)$ とすれば (t)-收斂の定義から $\{x_n\}$ の任意の部分列は 0

に (o)-收斂する部分列をもつ。補助定理 2 を使つて $\|x_n\|\to 0$. 逆に $\|x_n\|\to 0$ のとき補助定理 3 の證明から判る樣に $\{x_n\}$ の任意の部分列は (o)-收斂部分列をもつ。故に $x_n\to 0\,(t)$. 次に $x_n\to 0\,(k)$ とするとき (6) から $\bar{x}_n=\bigvee(|x_m|;\, m\geqq n)$ が存在し, $\bar{x}_n\downarrow 0$ なることが知られるから $x_n\to 0\,(o)$. 逆に $x_n\to 0\,(o)$ とすると上に定義した $\bar{x}_n$ について $\bar{x}_n\downarrow 0$ が成立ち, これから $x_n\to 0\,(k)$ が容易に判る。 以上。

補助定理 5. *K*-空間が可分のとき束的單位をもつ。

證明。 稠密可附番集合を $\{x_n\}$ とし正數列 a_n を適當にとり $\sum a_n|x_n|$ が (o)-斂するやうにとる。これを e と置くと e が束的單位となる。何者正要素 x につき $x\frown e=0$ とする。x に (o)-收斂する $\{x_n\}$ の部分列を $\{x_n'\}$ とすると "交り" の連續性から $x\frown x=0$ 即ち $x=0$ となる。 以上。

K-空間と正則ベクトル束の關係を調べるため次の條件を思ひ出す。[1]

完全ベクトル束について次の條件を考へる。

(α) $\{E_n\}$ を有限或は無限の極限 (o)-lim $\bigvee(x;\, x\in E_n)$ が存在する束的有界部分集合列とする。 このとき E_n の有限部分集合 E_n' が存在し (o)-lim $\bigvee(x;\, x\in E_n')=$(0)-lim $\bigvee(x;\, x\in E)$ が成立つ。

(β) $\bigvee(x;\, E_n)=+\infty$ $n=1,2,3,\ldots$ が成立つ部分集合 E_n に對し有限部分集合 E_n' が存在し $\bigvee_n\big(\bigvee(x;\, x\in E_n')\big)=+\infty$ が成立つ。

(γ) 部分集合 E について任意の 0 に收斂する實數列 $\{\lambda_n\}$ に對し如何な E からの要素列 $\{x_n\}$ をとるも常に $\lambda_n x_n\to 0\,(o)$ が成立つならば E は束的有界である。

このうち (α) の成立つとき正則ベクトル束或は K_6^- 型正則ベクトル束と云ひ, (α), (γ) が成立するとき狹義の正則ベクトル束或は K_6 型正則ベクトル束と云ふ。

補助定理 6. 可分な *K*-空間は完全ベクトル束で (α), (β), (γ) を滿足する。即ち狹義の正則ベクトル束である。

證明。 X を可分 *K*-空間とする。E を X の任意の部分集合とすると E に於て稠密な可附番部分集合 E' が存在する。もし $\bigvee(x;\, x\in E')=+\infty$ の

---

(1) L. Kantorovitch, Recueil Math. 44 (1937), 138, Recueil Math. 49 (1940), 211.

ときは明に $\bigvee(x;\ x\in E)=+\infty$ となり。又 $\bigvee(x;\ x\in E')=x_0\in X$ とすると E の任意の要素 x に對しこれに (o)-收斂する E' の要素列 $\{x'_n\}$ が存在する。これから容易に $x\leqq x_0$ が判る。故に $x_0=\bigvee(x;\ x\in E)$ となる。(γ) の成立つことは (6) を使つて容易に判る。(α) の成立つことを見るには E_n の有限部分集合 E'_n を $\|\bigvee(x;\ x\in E_n)-\bigvee(x;\ x\in E'_n)\|\leqq\dfrac{1}{2^n}$ で定めればよい。(β) は他の性質から出る。 以上。

補助定理 7. *K*-空間の任意の可附番部分集合に對し之を含む可分部分 *K*-空間が存在する。

證明。 X を K-空間, $\{x_n\}$ を X の要素列とする。正數列 $\{\alpha_n\}$ を適當にとり $\sum\alpha_n|x_n|$ が (0)-收斂するやうにする。之を e と置いて X の主イデヤル $\mathfrak{A}(e)$ を考へると容易に $\mathfrak{A}(e)$ 自身が K-空間となるから最初から X が束的單位 e をもち各要素 x_n が e に關して有界と假定してよい。e が恒等的に 1 となる様に X を主イデヤルによる方法で[1] ビコムパクト空間の連續函數で表現し $\{x_n\}$ に對應する連續函數による分離空間 Ω を考へる。Ω はコムパクト計量空間となるからその上の有界連續函數の全體は一様位相で可分, 從て之に對應する X の要素の全體を X_0 とすると X_0 は可分な X の部分ベクトル束となる。X_0 の計量的完備化を X_1 とし X_1 が問題の可分 K-空間となることを示せばよい° X_1 が可分, ベクトル束で (1)—(4) を滿足することは容易に分る。X_1 で $x_n\downarrow 0$ のとき X に於ても $x_n\downarrow 0$ となる。何者 X で $x'=\bigwedge x_n$ と置くと $x_n\downarrow x'$ となり $\|x_n-x'\|\to 0$ となるから $x'\in X_1$ 從て $x'=0$ となる。故に $\|x_n\|\to 0$ が成立つ。(6) についても同様に證明される。

以上。

注意。 補助定理 6 の證明から X_1 の部分集合 E が可分のとき $\bigvee(x;\ x\in E)$ は X_1 に於ても X に於ても同一の要素を表す。

定理 1. *K*-空間に於て束的有界な集合は弱コムパクトである。

注意。 こゝの弱コンパクトは制限的弱コムパクトの意。

證明。 K-空間が可分のとき證明すれば充分である。X を單位 e をもつ可分 K-空間, $\{x_n\}$ を $|x_n|\leqq e$ なる列とする。X が可分であるからその共軛空間 $\bar{X}$ のなかに可附番集合からなる X の全集合 (total set) が存在する。

---

(1) 前田文友, 小笠原藤次郎, 本誌 **12** (昭和 17 年)。

從て X の連續正線形汎函數 $F(x)$ が存在し $x\geqq 0$, $F(x)=0$ のとき $x=0$ となる。X を X の表現ブール空間 Ω 上の連續函數で而も e が恒等的に 1 となる様に表現する。$\mathfrak{M}$ を Ω の可測集合族としベクトル値測度函數を $\mu(E)$, $E\epsilon\mathfrak{M}$ とする。$m(E)=F\big(\mu(E)\big)$ と置くと $m(E)$ は $\mathfrak{M}$ 上の完全加法的測度函數で $m(E)=0$ と E が第一種集合とは同義となる。x_n に對應する Ω 上の連續函數を $f_n(\mathfrak{p}^*)$ と置くと $|f_n(\mathfrak{p}^*)|\leqq 1$ となる。$F(x_n)=\int_\Omega f_n(\mathfrak{p}^*)dm$ と書かれることから可積分函數の作る L 空間の場合の定理[1] を使つて次の事が判る。可測函數 $f(\mathfrak{p}^*)$, $|f(\mathfrak{p}^*)|\leqq|$ が存在し任意の有界可測函數 $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ に對し部分列 $f_{n'}(\mathfrak{p}^*)$ について $\int_\Omega f_{n'}(\mathfrak{p}^*)\varphi(\mathfrak{p}^*)dm\rightarrow\int_\Omega f(\mathfrak{p}^*)\varphi(\mathfrak{p}^*)dm.$ 今 $G(x)$ を任意の連續正線形汎函數とするとき $m'(E)=G\big(\mu(E)\big)$ と置く。$m(E)=0$ のとき $m'(E)=0$ となるから $m'(E)=\int_E\psi(\mathfrak{p}^*)dm$, $\psi(\mathfrak{p}^*)$ は可測函數, の形に表される。正數 λ を充分大にとり $E_0=\big(\mathfrak{p}^*;|\psi(\mathfrak{p}^*)|\geqq\lambda\big)$ と置くとき $m'(E_0)<\varepsilon$ ならしめる。$G(x_{n'})=\int_\Omega f_{n'}(\mathfrak{p}^*)dm'=\int_{\Omega-E_0}f_{n'}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm+\int_{E_0}f_{n'}(\mathfrak{p}^*)dm'$ と置いて容易に $\lim G(x_{n'})=\int_\Omega f(\mathfrak{p}^*)dm'$ となることが判る。從て $f(\mathfrak{p}^*)$ に應ずる X の要素を x とすると $|x|\leqq e$ 且 $\lim G(x_{n'})=G(x)$. 次に任意の $G\epsilon\bar{X}$ は正線形汎函數の差となるから定理 2 が完全に證明された。　以上。

定理 2. K-空間は弱完備である。

證明。 K-空間が可分でその單位 e に關して $\{x_n\}$ が有界とし任意の $G\epsilon\bar{X}$ について $\lim G(x_n)$ が有限確定のとき $\lim G(x_n)=G(x)$ なる $x\epsilon X$ が存在することを證明すればよい。

前定理の證明中の記法を踏襲すると $f_n(\mathfrak{p}^*)$ は有界な連續函數である。$G\big(\mu(E)\big)=\int_E\psi dm$, $\psi(\mathfrak{p}^*)$ は可測函數と置くと $G(x_n)=\int_\Omega f_n(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm$ となり $\lim\int_E f_n\psi dm$ が常に存在するから $\int_E f_n\psi dm$ は一様絶對連續となる。[2] $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ が有界可測のとき $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ に對應する $\bar{X}$ の要素が存在する。即ち $\int_\Omega f\varphi dm$ が X の要素 x に對應する函數を $f(\mathfrak{p}^*)$ として連續正線形汎函數となる。何者

---

(1) N. Dunfold, Compositio Math. **5** (1939), 635-646, 定理 3.

(2) S. Saks: Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 966-970.

$|\varphi(\mathfrak{p}^*)|\leqq M$ とすると $\left|\int_\Omega f\varphi dm\right|\leqq M\int_\Omega |f|\,dm=MF(|x|)\leqq M\|F\|\,\|x\|$ となるからである。故に可積分函數空間の定理から可測函數 $f(\mathfrak{p}^*)$ が存在し任意の有界可測函數 $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ に對して

$$\lim\int_\Omega f_n\varphi dm=\int_\Omega f\varphi dm$$

となる。$\Omega_\lambda=\left(\mathfrak{p}^*;\,0\leqq f(\mathfrak{p}^*)\leqq\lambda\right)$ と置く。$f_{n,\lambda}(\mathfrak{p}^*)$ を $\Omega-\Omega_\lambda$ で 0 Ω_λ で $f_n(\mathfrak{p}^*)$ となる函數, それに對應する X の要素を $x_{n,\lambda}$ とする。同様に $f(\mathfrak{p}^*)$ に對し $f_{,\lambda}(\mathfrak{p}^*)$, $x_{,\lambda}$ を定義する。明かに可測集合 E に對し

$$\lim\int_E f_{n,\lambda}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm$$

は有限確定で有界な $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ について

$$\lim\int_\Omega f_{n,\lambda}\varphi dm=\int_\Omega f_{,\lambda}\varphi dm\quad,$$

これから $m(E)<\delta$ のとき $\left|\int_E f_{n,\lambda}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm\right|<\varepsilon$, $\left|\int_E f_{,\lambda}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm\right|<\varepsilon$ ならしめ得る。從て

$$\lim_n\int_\Omega f_{n,\lambda}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm=\int_\Omega f_{,\lambda}(\mathfrak{p}^*)\psi(\mathfrak{p}^*)dm$$

が成立する。即ち $\lim\limits_n G(x_{n,\lambda})=G(x_{,\lambda})$. $\{\|x_n\|\}$ は有界であるから $\|x_n\|\leqq c$ とすると $\|x_{,\lambda}\|\leqq c$ が成立する。故に (6) から $\max\left(f(\mathfrak{p}^*),0\right)$ に對應する X の要素が存在する。$\min\left(f(\mathfrak{p}^*),0\right)$ についても同様にして結局 $f(\mathfrak{p}^*)$ に對應する X の要素が存在することを知る。これを x とする。$\lim\limits_n G(x_n)=G(x)$ なることは上と同様に證明される。　　以上。

定理 3. K-空間は狹義の正則ベクトル束である。

證明。X を K-空間とし E を X の任意の部分集合とするとき E の可附番部分集合 E' が存在し $\bigvee(x;\,x\in E')=\bigwedge(x;\,x\in E)$ の證明すれば補助定理 6 の論法で X が狹義の正則ベクトル束になる。((β) も成立する)。そのためには E が正要素からなりその任意の有限部分集合と共にその結びを含むものとして一般性を失はない。$(\|x\|;\,x\in E)$ が有界でないときは明に E は $\|x_n\|\to+\infty$ なる $\{x_n\}$ を含むから $E'=\{x_n\}$ とすれば $\bigvee(x;\,x\in E')=\bigvee(x;\,x\in E)$ が成立つ。次に $(\|x\|;\,x\in E)$ が有界のとき E_1 を E の可附番

個の要素の l. u. b. からなる全體とするとき明に l. u. b. $(\|x\|;\ x\in E_1)=$ l. u. b. $(\|x\|;\ x\in E)$.

この共通の上端を M として $E_2=(x;\ \|x\|=M,\ x\in E_1)$ と定める。E_2 の要素の中に最大なものが存在することを證明すれば E' の存在が判ることになる。E_2 の中に最大要素が存在しないとすると，第一級及び第二級の順序數を添數とする列 $\{x_\alpha\}$, ($x_\alpha\in E_2$, $\alpha<\beta$ のとき $x_\alpha<x_\beta$) が存在する。$y_\alpha=y_{\alpha+1}-y_\alpha$ と置くとき $\|y_\alpha\|>0$ で $\{y_\alpha\}$ は非可附番であるから正數 λ が存在して，無數に多くの y_α について $\|y_\alpha\|>\lambda$ が成立する。かやうな y_α の列 $\{y_{\alpha_n}\}$, $(\alpha_n<\alpha_{n+1})$ をとる。$\{x_{\alpha_n}\}$ を考へると (6) から $\bigvee x_{\alpha_n}$ が存在する。このとき $\|x_{\alpha_n}-\bigvee x_{\alpha_n}\|\to 0$ が成立しなければならないと共に $\|x_{\alpha_n}-\bigvee x_{\alpha_n}\|\geqq\|y_{\alpha_n}\|>\lambda$ となるから矛盾が起る。

定理 3 により K-空間は Kantorovitch-Vulich(1) の $\mathfrak{K}_2$ 型空間と同義になることが判る。Kantorovitch は $|x_1|<|x_2|$ のとき $\|x_1\|<\|x_2\|$ が成立する K-空間を特に B_2 型空間と呼んだ。

§2. Banach 束と K-空間。

X をノルムの附けられた半順序線形空間とする。X の共軛空間 $\bar{X}$ の要素 $f(x)$ が X のすべての正要素 x に對し $f(x)\geqq 0$ を滿足するとき $f\geqq 0$ と定める。

補助定理 1. $\bar{X}$ は完全ベクトル束である。

證明。$f\in\bar{X}$ のとき f の正部分 f_+ は定義により $x\geqq 0$ のとき $f_+(x)=$ l. u. b. $\big(f(x');\ 0\leqq x'\leqq x\big)$ 從て $|f_+(x)|\leqq\|f\|\,\|x\|$ が成立する。任意の $x\in X$ についても $|f_+(x)|\leqq\|f\|\,\|x\|$ となるから $f_+\in\bar{X}$. これに依つて X はベクトル束となることが判る。また E を束的有界な $\bar{X}$ の部分集合としその l. u. b. が $\bar{X}$ に屬することが同論法で證明される。　以上。

補助定理 2. $\bar{X}$ は Banach 束である。

證明。先づ $f\in\bar{X}$ のとき $\|f\|=\||f|\|$ の證。$|f|$ について次の二つの性質,(3) 即ち (1°) $|f(x)|\leqq|f|(|x|)$ (2°) $x>0$ のとき $|f|(x)=$ l. u. b. $\big(|f(x')|;\ |x'|\leqq x\big)$, を顧慮するならば容易に $\||f|\|=$ l. u. b. $\big(|f|(|x|);\ \|x\|=1\big)=$ l. u. b. $\big(|f(x')|;$

(1) L. Kantorovitch, B. Vulich: Compositio Math. **5** (1937), 120.
(2) L. Kantorovitch: Recueil Math. **44** (1937), 153.
(3) L. Kantorovitch: Recueil Math. **7** (1940), 222-223.

$\|x'\|=1\big)=\|f\|$ なることが判る。また $|f|\leqq|g|$ のとき $\|f\|\leqq\|g\|$ も同様に證明される。$\bar{X}$ がノルムについて完備であるから補助定理 2 が成立することが判る。 以上。

補助定理 3. X を $\bar{\bar{X}}$ の中に通常の方法で埋藏するとき X は $\bar{\bar{X}}$ の部分ベクト束となる。

證明。 任意の $\bar{X}$ の正要素 f に對し $f(x)\geqq 0$ が成立するとき $x\geqq 0$ なること，及び $f(x_-)=\text{l. u. b.}\big(f'(x)\,;\ 0\leqq f'\leqq f,\ f'\epsilon\bar{X}\big)$ を證明すればよい。$x_->0$ とするとき x_- と直交する X の全體は正規イデヤルを作る。これを X_0 とし $y=x_0+tx_-$, $x_0\in X_0$, のとき $f(y)=t\|x\|$ と定めると $|f(y)|\leqq\|y\|$ となる。f を X 上にノルムを變へないやうに擴大する。これを矢張り f で表し次いで f の正部分を g とすると $g(x_+)=0$, $g(x_-)>0$ となる。依て $g(x)=-g(x_-)<0$ となる。從てすべての正要素 f に對し $f(x)\geqq 0$ のときは $x\geqq 0$ となる。次に上に考へた X_0 と, x_- の生成する主イデヤル X_1 を考へ $y=x_0+x_1$; $x_0\in X_0$ $x_1\in X_1$ に對し $\bar{X}$ の正要素 $f(x)$ から $g(y)=f(x_0)$ によつて $g(y)$ を定義し次いで X 上にノルムを變へない様に擴大し，これを矢張り g で表して $f'=f\frown(g\smile 0)$ を作るとき $0\leqq f'\leqq f$ 且 $f'(x)=f(x_+)$ となる。また任意の $0\leqq f'\leqq f$ なる f' に對しては $f'(x)\leqq f'(x_+)\leqq f(x_+)$ となるから $f(x_+)=\text{l. u. b.}\big(f'(x)\,;\ 0\leqq f'\leqq f\big)$ となる。 以上。

補助定理 3 に依つて X は，完全ベクトル束を作る Banach 束 $\bar{\bar{X}}$ に埋藏されることが判つた。

こそからしてもノルムの附けられた半順序線形空間は通常用ひられるノルムによる完備化によつて Banach 束となる。

定理 1. X を Banach 束とする。X が K-空間なるための條件は X が弱完備なることである。

證明。§1 で K-空間は弱完備なることを證明した。次に X を弱完備 Banach 束とする。§1 の性質 (6) についてみるに $0\leqq x_n\leqq x_{n+1}$ $n=1,2,\ldots$ 且 $\|x_n\|\leqq M$ とするとき任意の $\bar{X}$ の正要素 f に對し $\lim f(x_n)$ は有限確定，從て任意の $f\in\bar{X}$ についてこのことが成立するから x_n は X のある要素例へば x に弱收斂する。任意の $\bar{X}$ の正要素 f に對し $f(x_n)\leqq f(x)$ となる

から $x_n \leqq x$ が成立つ。次に $x_n \leqq x'$, $n=1,2,\ldots$ とするとき正要素 $f \in \bar{X}$ に對し $f(x)=\lim f(x_n) \leqq f(x')$, これから $x \leqq x'$ となる。故に $x=\bigvee x_n$ となる。$\bar{X}$ の單位球に X の要素による弱位相を與へるときビコムパクトになる。(1) これから $0 \leqq f \epsilon \bar{X}$ 且 $\|f\| \leqq 1$ なる f の全體を Γ とするとき Γ もビコムパクトになる。今 $x_n \downarrow 0$ とするとき x_n は 0 に弱收斂することが容易に示される。Γ 上で $f(x_n)$ を f の函數と考へるとき連續函數を表し $n \to +\infty$ のとき單調に 0 に收斂する。Dini の定理を使つてこの收斂が一樣であること即ち $\|x_n\| \to 0$ なることが知られる。故に §1 の (5) の性質が成立する。これから X が K-空間になることが判る。　以上。

Banach 空間が正則のとき弱完備となるから

定理 2. Banach 空間として正則な Banach 束は K-空間である。

定理 3. 一樣凸性をもつ Banach 束は K-空間である。

證明。一樣凸性をもつ Banach 空間は Banach 空間として正則である。(2) 從て定理 2 から定理 3 の成立が判る。　以上。

§3. Banach 束とその正則性。

可分 Banach 空間が正則となる條件は局所弱コムパクトである。これはよく知られた事であるが一般な Banach 空間に於ても局所弱コムパクトが正則となるための條件か否かは未知の問題である。然し Banach 束に對してはこの問題が肯定的に解決されることを本節で述べる。

X を Banach 束, $\bar{X}$ をその共軛 Banach 束とする。H が X の部分集合のとき $H^{\perp\!\perp}$ ですべての $x \epsilon H$ に對し $|F|(|x|)=0$ となる $\bar{X}$ の要素 F の全體を表す。H が $\bar{X}$ の部分集合のときには $H^{\perp\!\perp}$ ですべての $F \epsilon H$ に對し $|F|(|x|)=0$ となる X の要素 x の全體を表す。

補助定理 1. $H \subset X$ のとき $H^{\perp\!\perp}$ は $\bar{X}$ の正規イデヤルである。

證明。$H^{\perp\!\perp}$ が $\bar{X}$ の正規線形部分空間となることは殆ど自明である。從て $\bar{X}$ の正要素 F が $H^{\perp\!\perp}$ の正要素のある集合 $\{F_\alpha\}$ の上端のとき $F \in H^{\perp\!\perp}$ なることを證明すれば充分である。

これも上端の定義から殆ど明である。　以上。

---

(1) L. Alaoglu: Annals of Math. **41** (1940), 252–267, 定理 1–3.
(2) D. Milman: C. R. URSS, **20** (1938), 243–246.

補助定理 2. X が正則ベクトル束のとき X の閉ぢた正規形部分空間は正規イデヤルである。

證明。H を X の閉ぢた正規線形部分空間とする。x を H の正要素のある集合の上端とすると x は H の正要素列のノルムによる極限となるから[1] $x \in H$ となり，從て H は正規イデヤルとなる。[2]

補助定理 3. $H \subset \bar{X}$ で且 X が正則ベクトル束のとき H^{*} は X の正規イデヤルである。

證明。補助定理 2 を使つて。 以上。

定理 1. X が正則ベクトル束のとき X と $\bar{X}$ の正規イデヤルは 1−1 對應をなし同じ表現ブール空間をもつ。

證明。$\mathfrak{A}$ を X の正規イデヤルとするとき明かに $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^{**}$. $x_0 \in \mathfrak{A}^{\perp}$ なる正要素 x_0 を考へる。F を x_0 で正値をとる $\bar{X}$ の任意の要素とし $F_1(x) = F(P_{\mathfrak{A}^{\perp}} x)$ と定めると $F_1 \in \mathfrak{A}^{*}$ 且 $|F_1|(|x_0|) > 0$ となるから $x_0 \notin \mathfrak{A}^{**}$, 故に $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{**}$.

次に $\mathfrak{B}$ を $\bar{X}$ の任意の正規イデヤルとする。明かに $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^{**}$. $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}^{**}$ とすると $G \in \mathfrak{B}^{**}, \mathfrak{B}^{\perp}$ なる正要素 G が存在する。a を $G(a) > 0$ を滿足する正要素とする。$G(a) = G(b)$, $0 < b \leqq a$ なる b の全體を B とすると $b_1, b_2 \in B$ のとき $G(a) - G(b_1 \frown b_2) = G\big((a-b_1) \smile (a-b_2)\big) \leqq G(a-b_1) + G(a-b_2) = 0$ の成立から $b_1 \frown b_2 \in B$ なることが判る。今 $c = \bigwedge(b\,;\, b \in B)$ とすると $b_n \downarrow c$ なる B の單調列 $\{b_n\}$ が存在する。故に $G(a) = G(c)$. 後章に示す定理[3]に依つて任意の $F \in \mathfrak{B}$ に對し $F(c) = 0$ 即ち $c \in \mathfrak{B}^{*}$ となるから $G \notin \mathfrak{B}^{**}$ となる。

故に $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{**}$ となる。

以上で $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{*}$, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^{*}$ に依つて X と $\bar{X}$ の正規イデヤルの 1−1 對應の成立が判つた。これから容易に $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^{*\perp}$, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^{*\perp}$ に依つて X と $\bar{X}$ の正規イデヤルの作る完全ブール代數 $N, \bar{N}$ の同型が知られる。從て X と $\bar{X}$ の表現ブール空間は同一になる。 以上。

定理 1 の假定のもとに X の表現ブール空間を Ω とし，$\{e_\alpha\}$ を $\alpha \neq \beta$ の

---

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. 44 (1937), 139, 定理 23 a.
(2) 第一編第一章 §1 補助定理 3.
(3) 第四章 §1 補助定理 8.

とき $e_\alpha \frown e_\beta=0$, $\{e_\alpha\}^\perp=(0)$ を滿足する X の正要素の集合とする。e_α を $\mathfrak{A}(e_\alpha)$ に對應する Ω の基本開集合 Ω_α の特性函數となる樣に X を表現する。記述を簡單にするため $\{e_\alpha\}$ が唯一個の要素からなるとき，即ち X が單位 e をもつ場合を考へ e を Ω の特性函數になる樣に X を表現する。このとき $\mu(E)$ をベクトル値測度函數とする。$\bar{X}$ の正要素の集合 $\{F_\alpha\}$ を上述の $\{e_\alpha\}$ と同じ性質をもつやうにとる。$\mathfrak{A}(F_\alpha)$ に對應する（定理 1 で述べた同型對應で）X の主イデヤルの生成要素を e に關する特性要素[1] $\tilde{e}_\alpha$ に選ぶ。$m_\alpha(E)=F_\alpha\big(\mu(E)\big)$ とすると E が $\tilde{e}_\alpha$ に對應する基本開集合 $\tilde{O}_\alpha$ と共通點を有しないときは $m_\alpha(E)=0$ となる。$G\varepsilon\mathfrak{A}(F_\alpha)$ なる任意の G をとる。$G\big(\mu(E)\big)$ は $m_\alpha(E)$ に關して絕對連續となるので $G\big(\mu(E)\big)=\int_\Omega \varphi(\mathfrak{p}^*)dm_\alpha$ となる $\Omega-\tilde{O}_\alpha$ で 0 となる可測函數 $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ が存在する。$\varphi(\mathfrak{p}^*)$ を連續函數として選ぶ。このとき $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ は G に對し單獨的に定まる。且つ $G(x)=\int_\Omega f_x(\mathfrak{p}^*)\varphi(\mathfrak{p}^*)dm_\alpha$ が成立つ。λ を任意の實數とするとき $\mathfrak{A}\big((G-\lambda F_\alpha)\big)$ に對應する X の主イデヤルは上の式から $\big(\mathfrak{p}^*;\ \varphi(\mathfrak{p}^*)-\lambda<0\big)$ と對等な基本開集合の特性函數に對應する X の正要素で生成される主イデヤルである。

從て F_α を $\tilde{O}_\alpha$ の特性函數となる表現に於て G は $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ で表現されることが判る。任意の G についてはその $\mathfrak{A}(F_\alpha)$ への射影を G_α とするとき G_α に對應する $\varphi_\alpha(\mathfrak{p}^*)$ から單獨的に定まる連續函數が G に對應する。

定理 2. X と $\bar{X}$ が共に K-空間のとき X は Banach 空間として正則である。

證明。$X, \bar{X}, \bar{\bar{X}}$ は共に同一の表現ブール空間 Ω をもつ。（定理 1 から）。$\bar{\bar{X}}$ の要素を上に述べた方法で Ω 上の連續函數に依つて表現するとき X の要素に對應する連續函數は $f_x(\mathfrak{p}^*)$ になることが容易に確められる。從て X は $\bar{\bar{X}}$ の閉ぢた正規線型部分空間を作り且 X のすべての要素と直交する $\bar{\bar{X}}$ の正要素が存在しないことが判る。今 $\xi\in\bar{\bar{X}}$, $\xi\notin X$ なる正要素 ξ が存在するとすると，$0\leqq x\leqq\xi$ なる X のすべての要素を考へる。$\|x\|\leqq\|\xi\|$ からかやうな x の上端を x_0 とすると $x_0\in X$ で $\xi_0=\xi-x_0$ と置くと ξ_0 は X に直交

(1) $a\frown b=0$, $a+b=e$ のとき a を e に關する特性要素と云ふ。

する正要素となるり矛盾が起る。故に $X=\overline{\overline{X}}$ 即ち X は Banach 空間として正則である。

定理 3. Banach 束 X が正則となるための條件は X が局所弱コムパクトとなることである。

證明。 X が弱コムパクトのときは $\overline{X}$ も局所弱コムパクトである(1) 又局所弱コムパクトのときは弱完備であることは明である。從て $X, \overline{X}$ が共に K-空間となるから定理 2 に依り X は正則である。必要條件であることは自明。 以上。

定理 4. Banach 束 $X, \overline{X}$ が共に弱完備のとき X は正則である。

證明。 $X, \overline{X}$ が共に K-空間になるから，定理 2 により X は正則になる。 以上。

定理 5. K-空間が局所弱コムパクトのとき Banach 空間として正則である。

證明。 定理 3 から。 以上。

§4. K-空間に於けるエルゴード定理。

定理 1. T を K-空間 X を X 自身の內へ移す線形作用素且つ $\|T^n\|\leqq c$, $n=1,2,3,\ldots$ なる常數 c が存在するとする。今アル要素 x について $\{T^nx\}$ $n=1,2,3,\ldots$ が束的有界のとき

$$\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

は $n\to+\infty$ のとき X の一要素に强收斂する。

證明。 K-空間に於ては束的有界な集合は弱コムパクトである。從て吉田氏の平均エルゴード定理から(2) 本定理の成立が判る。

定理 2. T を K-空間 X を X 自身の內へ移す線形作用素且つ各々の $x\in X$ について $\{T^nx\}$ $n=1,2,3,\ldots$ が (o)-有界のとき

$$\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

は $n\to+\infty$ のとき (o)-收斂をなす。

證明。 $\|T^n\|\leqq c$, $n=1,2,\ldots$ が成立つ常數 c が存在する。

---

(1) V. Gantmacher and V. Smulian: C. R. URSS, **17** (1937), 91-94, 定理 3.

(2) K. Yosida: 帝國學士院記事, **14** (昭和 13 年), 292-293.

$$\widetilde{T}x=(o)\text{-}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}-(o)\text{-}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

と置くと $\widetilde{T}x$ はノルムで x の連續函數である。[1]

$$\widetilde{T}x=\widetilde{T}(-x)\geqq 0, \qquad \widetilde{T}(x+y)\leqq\widetilde{T}x+\widetilde{T}y$$

が成立つことは自明である。

$$x_n=\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

と置くと定理 1 により x_n は X の一要素 $\bar{x}$ に强收斂する。

$$x-\bar{x}=x-x_n+x_n-\bar{x}$$

から　$$\widetilde{T}(x-\bar{x})\leqq\widetilde{T}(x-x_n)+\widetilde{T}(x_n-\bar{x}).$$

然るに $x'=x-x_n$ と置くと $|T^nx|\leqq x_0$ として

$$\left|\frac{Tx'+T^2x'+\cdots+T^mx'}{m}\right|\leqq\frac{\sum_{k=1}^{n}|T^kx-T^{m+k}x|}{m}\leqq\frac{2n}{m}x_0$$

の成立から $\widetilde{T}(x-x_n)=0$ となることが判る。

故に　$$\widetilde{T}(x-\bar{x})\leqq\widetilde{T}(x_n-\bar{x}).$$

然るに $\|x_n-\bar{x}\|\to 0$ のため $n\to+\infty$ のとき $\widetilde{T}(x_n-\bar{x})\to 0\ (t)$. 故に $\widetilde{T}(x-\bar{x})=0$ となる。また $T\bar{x}=\bar{x}$ であるから $\widetilde{T}\bar{x}=0$.

從て　$$\widetilde{T}x\leqq\widetilde{T}(x-\bar{x})+\widetilde{T}\bar{x}=0$$

即ち $\dfrac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$ は $n\to+\infty$ のとき (o)-收斂することが判る。

以上。

次に X を單位 e をもつ K-空間とする。e が恒等的に 1 になる様に X をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數で表現する。Ω 上殆ど到る所有限値をとる Ω 上の連續函數の全體を $\mathfrak{L}_\Omega$ とし X を $\mathfrak{L}_\Omega$ に埋藏する。$\mathfrak{L}_\Omega$ の要素は x 或は $f_x(\mathfrak{p}^*)$ 等で表す。$\dfrac{|x|}{1+|x|}$ は X に屬することから $\mathfrak{L}_\Omega$ に計量を導入して F-型空間にすることが出來る。即ち

$$\rho(x)=\left\|\frac{|x|}{1+|x|}\right\|.$$

---

(1) K. Yosida: 帝國學士院記事, **16** (昭和 15 年), 280-284, 定理 1.

と定義すると $\rho(x)$ は

(1) $\rho(x)\geqq 0$, $x=0$ のときに限り $\rho(x)=0$.

(2) $\rho(x+y)\leqq\rho(x)+\rho(y)$.

(3) $|x|\leqq|y|$ のとき $\rho(x)\leqq\rho(y)$

(4) $x_n\downarrow 0$ のとき $\rho(x_n)\to 0$

(5) $x_n\geqq 0$, $x_n\uparrow+\infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to+\infty}\rho(x_{n+p}-x_n)>0$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\lim_{n\to+\infty}\rho(\lambda x_n)>0$$

(6) x_n, $x\in X$ 且 $\|x_n-x\|\to 0$ のとき $\rho(x_n-x)\to 0$

を滿足する。

此等の條件が滿足されることの證明は容易になされるから此處では略する。尙 (t)-收斂と ρ による計量での收斂と一致する。かやうにして X から誘導された空間 $\mathfrak{L}_\Omega$ を X の誘導 S-空間といふ。誘導 S-空間はまた X から計量 ρ に依つて完備化によつて得られたものとも見做される。

誘導 S-空間の援をかりて吉田氏の個別エルゴード定理[1] を K-空間で論ずることが出來る。

第三章 條件 (L) を滿足するベクトル束

§1. 條件 (L).

ベクトル束 X が

(L): (o)-連續正線形汎函數列 $\{F_n(x)\}$ が存在し任意の正要素の單調列 $x_1\leqq x_2\leqq\cdots$ に對し $\lim_{N\to\infty}F_n(x_N)<+\infty$ のとき $\bigvee x_N$ が存在する。[2]

を滿足するとき X を Bochner 束或は條件 (L) を滿足するベクトル束といふ。

例へば $0\leqq t\leqq 1$ 上の可積分函數の作る L 空間は $x(t)$ を可積分函數とするとき $F(x)$ として $\int_0^1 x(t)dt$ をとれば (L) を滿足することが判る。列空間 (s) に對しては $F_n(x)$ として x の第 n 番目の座標を表すものとすれば (L) を滿足する。

---

(1) K. Yosida: 帝國學士院記事, **16** (昭和 15 年), 280-284, 定理 2.

(2) S. Bochner: Proc. Nat. Acad. Sci. **26** (1940), 29-31.

補助定理 1. Bochner 束は σ-完全ベクトル束である。

證明。條件 (L) から容易に判る。　　　　以上。

補助定理 2. Bochner 束に於てすべての n について條件 (L) の函數 F_n に對し $F_n(|x|)=0$ が成立つとき $x=0$ となる。

證明。$x_N=N|x|$ と置くと $F_n(x_N)=NF_n(|x|)=0$ となるから $\bigvee x_N$ が存在する。これから $|x|=0$ 從て $x=0$ が成立つ。　　　　以上。

補助定理 3. Bochner 束に於て $|x|<|y|$ のとき條件 (L) の何れか一つの函數 F_n に對し $F_n(|x|)<F_n(|y|)$ が成立つ。

證明。補助定理 2 を使つて。　　　　以上。

X が Bochner 束のとき X の各要素 x に實數 $\rho(x)$ を次の式で定める。

$$\rho(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\frac{F_n(|x|)}{1+F_n(|x|)}$$

このとき以上の補助定理から直に次のことが判る。

(1)　$\rho(x)=\rho(|x|)\geqq 0$ $x=0$ のときに限り $\rho(x)=0$ となる。

(2)　$\rho(x+y)\leqq\rho(x)+\rho(y)$.

(3)　$|x|<|y|$ のとき $\rho(x)<\rho(y)$.

(4)　$x_n\downarrow 0$ のとき $\rho(x_n)\to 0$

(5)　$x_n>0$ $x_n\uparrow+\infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty}\rho(x_{n+p}-x_n)>0$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n)>0$$

定理 1. Bochner 束は狹義の正則ベクトル束である。

證明。上述の (1)—(5) が成立することから第二章 §1 の (α), (γ) が成立する完全ベクトル束になる。[1]　　　　以上。

補助定理 4. X を Bochner 束とするとき次のことが成立つ。

(1°)　E を X の任意の部分集合とするとき E の可附番部分集合 E' が存在して $\bigvee(x;x\in E)$ が有限たると無限たるとに關せず $\bigvee(x;x\in E')=\bigvee(x;x\in E)$.

(2°)　X は ρ による計量で完備である。

---

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. 2 (1937), 147-153.

(3°) $x_n\to(o)$ と $\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_{n+1},\dots x_m)=0$ とは同義。こゝに $\rho(x_1,x_2,\dots x_n)$ $=\rho(|x_1|\cup|x_2|\cup\cdots\cup|x_n|)$ を表す。

(4°) $x_n\to0\,(t)$ と $\rho(x_n)\to0$ とは同義。即ち位相的收歛と ρ による計量的收歛は同義である。

證明。 Kantorovitch の所論から。[1]

補助定理 5. Bochner 束の正規イデヤルは Bochner 束である。從て主イデヤルは Bochner 束である。

證明。 Bochner 束の正規イデヤルが條件 (L) を滿足することは殆ど自明である。 以上。

定理 2. Bochner 束に於ては束的有界な集合は弱コムパクトである。

注意。 玆で "弱コンパクト" は Banach 空間に於けると同様の意味で使用される。詳細は證明から明になる。

證明。 X を Banach 束とし, H を束的有界な X の部分集合とする。補助定理 5 に依つて H が單位 e をもち $x\in H$ に對し $|x|\leqq e$ が成立つ場合につき證明すれば充分である。

先づ e が恒等的に 1 になる様に X をその表現ブール空間 Ω 上の連續函數で表現する。$\mu(E)$ を Ω の可測集合族上で定義せられたベクトル値測度函數とする。條件 (L) の F_n に對し $m_n(E)=F_n\big(\mu(E)\big)$ を定めると $m_n(E)$ は完全加法的測度函數となり補助定理 2 に依つてすべての n について $m_n(E)=0$ と E が第一種集合とは同義になる。正數列 $\{a_n\}$ を $\sum_1^\infty a_n m_n(\Omega)$ が收歛する様にとり $m(E)=\sum_1^\infty a_n m_n(E)$ に依つて完全加法的測度函數 $m(E)$ を導入すると $m(E)=0$ と E が第一種集合とは同義になり "殆ど到る所" を兩義 ("測度 0 を除いて" と "第一種集合を除いて") に解しても混亂が起らない。

次に $f(\mathfrak{p}^*)$ を Ω 上の可測函數とし $f(\mathfrak{p}^*)$ が m に關して可積分のとき $f(\mathfrak{p}^*)$ に對應する X の要素か存在することを證明する。これには殆ど到る所で $f(\mathfrak{p}^*)\geqq0$ として論じて差支ないことは自明である。$f(\mathfrak{p}^*)$ は各々の m_n に關しても可積分となることは m の定義から判る。今 $f_N(\mathfrak{p}^*)$ を自然數 N に對し

---

(1) L. Kantorovitch: 同上。

$$f(\mathfrak{p}^*)<N \text{ のとき } \quad f_N(\mathfrak{p}^*)=f(\mathfrak{p}^*)$$
$$f(\mathfrak{p}^*)\geq N \text{ のとき } \quad f_N(\mathfrak{p}^*)=N$$

と定める。$f_N(\mathfrak{p}^*)$ に對應する X の要素が存在するから之を x_N で表す。このとき

$$F(x_N)=\int_\Omega f_N(\mathfrak{p}^*)dm_n$$

が成立つことが判る。$N\to\infty$ のとき $\lim\limits_{N\to\infty}F_n(x_N)<+\infty$ となるから條件 (L) に依つて $\bigvee\limits_N x_N\in X$. 明に $f(\mathfrak{p}^*)$ は $\bigvee\limits_N x_N$ に對應する函數である。之に依つて X に對應する Ω 上の函數は m に關して可積分函數を悉く含む（殆ど到る等しい値をとる函數は同一とみる)。

上述から X の任意の (o)-連續正則函數[1] $F(x)$ には殆と到る所有限な値をとる可測函數 $\varphi(\mathfrak{p}^*)$ が對應して，Ω 上の m に關して可積分な函數 $f(\mathfrak{p}^*)$ に對應する $x\in X$ について

$$F(x)=\int_\Omega f(\mathfrak{p}^*)\varphi(\mathfrak{p}^*)dm$$

が成立つことが證明される。(但しこの逆は一般には成立しない。）そのためには $F(x)$ の定義域を m に關して可積分な函數に對應する X の要素全體に限り之を L-空間と考へて F が連續汎函數になることをみればよい。これは殆ど明である。

これから證明の本筋に入る。H に對應する函數は殆ど到る所絶對値が高々 1 に等しい。$\{x_n\}$ を H の任意の列としそれに應ずる函數を $f_n(\mathfrak{p}^*)$ とする。L-空間の定理[2] から $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n'}\}$ が存在して任意の有界可測函數 $\phi(\mathfrak{p}^*)$ に對し

$$(1^\circ)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_{n'}(\mathfrak{p}^*)\phi(\mathfrak{p}^*)dm=\int_\Omega f(\mathfrak{p}^*)\phi(\mathfrak{p}^*)dm$$

が成立つ Ω 上の可積分函數 $f(\mathfrak{p}^*)$（明に $|f(\mathfrak{p}^*)|\leqq 1$）が存在する。$f(\mathfrak{p}^*)$ に對應する X の要素を x とすると任意の (o)-連續正則線形汎函數下に對し

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x)$$

となる。　　　　以上。

注意。 定理の證明中 (1°) から次のことが判る。m に關して絶對値の自乘

(1) L. Kantorovitch: Recueil Math. 49 (1940), 219.

と共に可積分な函數の全體即ち Hilbert 空間 L_2 を考へると $f_{n'}$ は f に弱收斂する。これから F. Riesz の證明法(1) に依つて f に (o)-收斂する

$$\sum_{r}^{s} c_K f_K,\quad c_K \geqq 0,\quad \sum_{r}^{s} c_K = 1$$

なる形の列が存在する。尙 r は如何程にも大きくとることが出來る。

§2. 條件 (L) を滿足する K-空間。

條件 (L) を滿足する K-空間について簡單な考察を加へる。

定理 1. X を條件 (L) を滿足する單位をもつ K-空間とすると X はノルムの適當なつけかへに依つて可積分函數（ある測度函數に就て）の空間と同型になる。

證明。條件 (L) に表れる (o)-連續正線形汎函數を $F_n \in \bar{X}$ とする。正數列 $\{a_n\}$ を $\sum \|a_n F_n\|$ が收斂する樣にとる。

$$F = \sum a_n F_n$$

と置くと F を條件 (L) に表れる (o)-連續正線形汎函數として差支ない。e を X の單位とし e を恒等的 1 となるやう X をその表現ブール空間 Ω の連續函數で表現する。$\mu(E)$ を Ω の可測集合に對し定義されたベクトル値測度函數とする。$m(E) = F\big(\mu(E)\big)$ と置くと $m(E)=0$ と E が第一種集合であることとが同義になる。$f_x(\mathfrak{p}^*)$ を $x \in L$ に對應する連續函數とすると明に $F(x) = \int_\Omega f_x(\mathfrak{p}^*)dm$ となる。逆に $f(\mathfrak{p}^*)$ を $\int_\Omega |f(\mathfrak{p}^*)|\,dm < +\infty$ なる Ω 上の任意の可測函數とすると $f(\mathfrak{p}^*)$ に對等な連續函數は X のある要素の表現になつてゐる。それを證明するためには $f(\mathfrak{p}_*)$ を負ならざる値をとる連續函數として一般性を失はない。今 $f_n(\mathfrak{p}^*) = \min\big(f(\mathfrak{p}^*), n\big)$ と置くと明に $f_n(\mathfrak{p}^*)$ に X のある要素 x_n の表現である。$F(x_n) = \int_\Omega f_n(\mathfrak{p}^*)dm < \int_\Omega f(\mathfrak{p}^*)dm$ から $\bigvee x_n \in X$ 且 $f(\mathfrak{p}^*)$ が $\bigvee x_n$ の表現になることが判る。

次に X に新しいノルムとして $\|x\|_F = F(|x|)$ を導入する。この新しいノルムをもつ X を X_F で表すと X と X_F が共に K-空間であるから

$$\frac{1}{M}\|x\| \leqq \|x\|_F \leqq M\|x\|$$

なる正數 M が存在する。これから定理の成立が判る。　　　　以上。

---

(1) F. Riesz: Acta Szeged. **10** (1941), 14–15.

定理 2. X を K-空間とするとき X がノルムの適當なつけかへで (l) 空間になる條件は X が條件 (L) を滿足する可分空間で弱收斂と强收斂が同義になることである。

證明。 條件が必要であることはよく知られた定理から判る。定理の條件が滿足されたとする。X は可分のため單位 e の存在が判る。$0 \leqq x \leqq e$ なる區間は弱コムパクトであるが定理の條件からコムパクトになり，從て X は列空間になる。これから前定理と同證明法で X がノルムの適當なつけかへで (l) 空間になることが判る。

§3. エルゴード定理。

Bobhner 束に於ける一つのエルゴード定理に就て述べる。

定理 1. X を Bochner 束とする。T を X を X 自身に變換する (t)-連續線形函數とし任意の $x \in X$ に對し $\{T^n x\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ は (o)-有界とする。このとき

$$(o)\text{-}\lim_{n\to+\infty} \frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

が存在する。

證明。 $\widetilde{T}x=(o)\text{-}\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \dfrac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}-(o)\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \dfrac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$

と置くと $\widetilde{T}x$ は (t)-連續函數である。[2] 明に $\widetilde{T}(x+y) \leqq \widetilde{T}x+\widetilde{T}y$; $\widetilde{T}x=\widetilde{T}(-x) \geqq 0$ が成立する。

$$x_n=\frac{Tx_0+T^2x_0+\cdots+T^nx_0}{n}$$

と置くと $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ は (o)-有界であるから前節定理 2 に依つて弱コムパクトである。$\{x_n\}$ の部分列の弱收斂極根を $\bar{x}$ とすると前節定理 2 注意から $\bar{x}$ は

$$y_n=\sum_{r=n}^{m} c_{nr}x_r, \quad c_{nr} \geqq 0, \quad \sum c_{nr}=1$$

なる形の $\{y_n\}$ の (o)-收斂極限となる。

$F(x)$ を任意の (o)-連續正線形汎函數とする。このとき $|T^n x| \leqq e$ として

$$|F(Ty_n)-F(y_n)| \leqq \sum c_{nr} F\left(\left|\frac{T-T^{r+1}}{r}x_0\right|\right) \leqq \frac{2}{n}F(e).$$

---

(1) T. Ogasawara: 本誌, **11** (1942), 127-128.

(2) K. Yosida: 帝國學士院記事, **16** (1940), 280-284, 定理 2.

然るに $F(Tx)$ は x の (o)-連續線形汎函數であるから

$$F(T\bar{x})=F(\bar{x})$$

となる。從て $T\bar{x}=\bar{x}$ となり $\widetilde{T}\bar{x}=0$ が成立つことが判る。y_n を $T^r x_0$ の項で表すと

$$y_n=\sum_{r=1}^{m'} c'_{nr}T^r x_0, \quad c'_{nr}\geqq 0, \quad \sum_{r=1}^{m'} c'_{nr}=1$$

の形で書かれる。

$$x_0-\bar{x}=x_0-\sum_{r=1}^{m'} c'_{nr}T^r x_0+\bar{x}_n$$

と置くと

$$\widetilde{T}(x_0-\bar{x})\leqq\sum_{r=1}^{m'} c'_{nr}\widetilde{T}(x_0-T^r x_0)+\widetilde{T}(\bar{x}_n).$$

然るに $\bar{x}_n\to 0\,(o)$ となるから $n\to+\infty$ のとき $\widetilde{T}(\bar{x}_n)\to 0\,(t)$. 一方 $x'=x_0-T^r x_0$ と置くと

$$\left|\frac{Tx'+T^2x'+\cdots+T^nx'}{n}\right|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{r}(T^k x_0-T^{n+k}x_0)}{n}\right|\leqq\frac{2r}{n}e$$

これから $\dfrac{Tx'+T^2x'+\cdots+T^nx'}{n}\to 0\,(o)$ が成立つ。故に $\widetilde{T}(x_0-T^r x_0)=0.$

從て $\widetilde{T}(x_0-\bar{x})\leqq\widetilde{T}(\bar{x}_n)$, $n\to+\infty$ として $\widetilde{T}(x_0-\bar{x})=0.$ 故に

$$\widetilde{T}x_0\leqq\widetilde{T}(x_0-\bar{x})+\widetilde{T}(\bar{x})=0$$

即ち任意の $x\in X$ に對して

$$(o)\text{-}\lim\frac{Tx+T^2x+\cdots+T^nx}{n}$$

が存在することが判る。

第四章　抽象 L_p-空間

§1.　連續函數空間の線形汎函數。

Ω をビコムパクト空間とする。E 及びそれに添數或は肩符をつけて Ω の Borel 集合を，G に就ても同樣の記法で Ω の開集合を示す。また $m(F)$ に就ても同樣の記法で完全加法的實數値集合函數を表し，その全體を M で示す。特に常に $m(E)\geqq 0$ のとき m を測度函數といひ，更に

(1)　任意の E に對し $m(E)=\lim m(G_n)$, $G_n\supset E$

なる G_n が存在するとき m は正則であるといふ。

$m\leqq m'$ を任意の E に對し $m(E)\leqq m'(E)$ が成立することと定めるとき

M は完全ベクトル束を作ることは周知である。

補助定理 1. m, m' が正則な測度函數のとき，すべての G に對し $m(G) \leqq m'(G)$ ならば $m \leqq m'$，特に $m(\Omega)=m'(\Omega)$ が成立つとき $m=m'$ となる。

證明。(1) から容易に判る。 以上。

補助定理 2. m, m' が測度函數で $m \leqq m'$ が成立つとする。m' が正則ならば m も正則である。

證明。(1) から。 以上。

補助定理 3. 測度函數 m, m' に對し $\big(E;\ m(E)=0\big) \supset \big(E;\ m'(E)=0\big)$ のとき m' が正則ならば m も正則である。

證明。(1) から。 以上。

補助定理 4. m_n, $n=1, 2, \ldots$ を正則測度函數とする。$\bigvee m_n$ が存在するとき $\bigvee m_n$ も正則である。

證明。補助定理 3 を使つて。 以上。

m が正則測度函數の差として表されるとき m は正則といふ。或は m の絶對部分が正則のとき m を正則と定義してもよい。正則な m の全體を M_r で表すと

定理 1. M, M_r は共に狹義の正則ベクトル束で，M_r は M の正規イデヤルである。

證明。$m \in M$ に對し $\|m\|=|m|(\Omega)$ と定めると，M は K-空間となるから M は狹義の正則ベクトル束である。M_r についても同樣。

$m=\bigvee m_n$, $0 \leqq m_n \in M_r$ から補助定理 4 により $m \in M_r$ となるから第一編第一章 §2 補助定理 3 により M_r は正規イデヤルとなる。 以上。

C を Ω 上の有界連續函數全體全の作るベクトル束とし，F を C の任意の正線形汎函數とする。F と正則測度函數 m との間に

(2) $$F(f)=\int_{\Omega} f(p)dm, \qquad f(p) \in C$$

(3) $$m(G)=\text{l. u. b.}\big(F(f)\,;\, f \in S(G)\big), \qquad m(E)=\text{g. l. b.}\big(m(G);\ G \supset E\big)$$

に依つて 1−1 對應が存在する。但し $S(G)$ は G の補集合上で 0 となる $0 \leqq f \leqq 1$ なる $f \in C$ の全體を表す。このことは A. Markoff[1] に依つて證明された。

(1) A. Markoff: Recueil Math. 4 (1938), 165-190.

C の共軛空間 $\bar{C}$ の要素は正線形汎函數の差として表されるものの全體からなる。

補助定理 5. $\bar{C}$ と M_r は (2) なる關係でベクトル束的に同型である。

證明。 $F\in\bar{C}$ とし F_+, F_- に m_+, m_- が對應するとする。$m=m_+-m_-$ と定めると明に (2) が成立つ。逆に (2) が成立つ M_r の任意の要素を m' とし, m'_+, m'_- に F_1, F_2 が對應するとせば

$$F_+-F_-=F=F_1-F_2$$

となる。$F_1\frown F_2$ に應ずる M_r の要素を m'' とすると $m''\leqq m'_+, m'_-$ のため $m''=0$ となる。これから $F_+=F_1$, $F_-=F_2$ 從て $m_+=m'_+$, $m_-=m'_-$, $m=m'$ となる。補助定理の證明はこれから容易である。　　以上。

補助定理 6. $F_1\frown F_2=0$ なる任意の $F_1, F_2\varepsilon\bar{C}$ に對し次の性質が成立つ。

(1°) $f\in C$ を任意の正要素とすると

$$(F_1+F_2)(f)=\text{l. u. b.}\left(F_1(f')+F_2(f'')\,;\, f'\frown f''=0,\ f', f''\leqq f\right)$$

(2°) f, g を C の任意の正要素とすると, 任意の正數 ε に對し $|F_1(f)-F_1(f')|<\varepsilon$, $|F_2(g)-F_2(f'')|<\varepsilon$, $0\leqq f'\leqq f$, $0\leqq f''\leqq g$, $f'\frown f''=0$ なる $f', f''\varepsilon C$ が存在する。

證明。 (2°) を證明すれば充分である。F_1, F_2 に對應する M_r の要素を m_1, m_2 とする。$m=m_1+m_2$ と置くと

$$m_1(E)=m(E\Omega_1)\qquad m_2(E)=m(E\Omega_2)\qquad \Omega_1\Omega_2=0\qquad \Omega_1+\Omega_2=\Omega$$

なる Borel 集合 Ω_1, Ω_2 が存在する。[1] 閉集合 H_1, H_2 を $m(\Omega_1-H_1)<\dfrac{\varepsilon}{\|F_1\|}$, $m(\Omega_2-H_2)<\dfrac{\varepsilon}{\|F_2\|}$, $\Omega_1\supset H_1$, $\Omega_2\supset H_2$ なるやうにとる。$f_1, f_2\in C$ を $f_1\frown f_2=0$, $0\leqq f_1$, $f_2\leqq 1$ 且 f_1 は H_1 上で 1, f_2 は H_2 上で 1 となるやうに定める。$f'=ff_1$, $f''=gf_2$ と定めると $0\leqq f'\leqq f$, $0\leqq f''\leqq g$ $f'\frown f''=0$ となり,

$F_1(f-f')\leqq\int_{\Omega_1-H_1}fdm<\varepsilon$, 同樣に $F_2(g-f'')<\varepsilon$ となる。　　以上。

補助定理 7. 單位 e に關して各要素が有界なアルキメデス的ベクトル束 X に於て

$$\|x\|=\text{g. l. b.}\,(a\,;\,|x|\leqq ae)$$

---

(1) Radon-Nikodym の定理から。 S. Saks, *Theory of the Integral* (1937), 參照。

と定めたとき X がノルムに關して完備となるならば, $F_1 \frown F_2=0$ なる X の正線形汎函數 F_1, F_2 につき, 次の性質が成立つ。

(1°) L の任意の正要素 x に對し

$$(F_1+F_2)(x)=\text{l. u. b.}\left(F_1(x')+F_2(x'')\,;\ x'\frown x''=0,\ x', x''\leqq x\right)$$

(2°) X の任意の正要素 x, y に對し任意の正數 ε を與へるとき

$$|F_1(x)-F(x')|<\varepsilon,\quad |F_2(y)-F_2(x'')|<\varepsilon,\quad x'\frown x''=0\quad x'\leqq x,\quad x''\leqq y$$

なる $x', x''\in X$ が存在する。

證明。 X はあるビコムパクト空間のすべての有界連續函數に依つてベクトル的同型に表現されるから前補助定理 6 から自明となる。 以上。

次に Ω を σ-ブール代數の表現ブール空間とし, Ω 上の有界連續函數の作るベクトル束を C とし, C の線型汎函數を考へる。F が (o)-連續正線形汎函數のとき F に對應する正則な測度函數 $m(E)$ について次のことが判る。O を基本開集合, f をその特性函數とすると (1) から

$$m(O)=F(f).$$

$\mathfrak{B}$ を基本開集合を含む最小の Borel 族とし $\nu(E)$ を $E\in\mathfrak{B}$ のとき E と對等な基本開集合 O をとり $\nu(E)=m(O)$ と定めるとき $\nu(E)$ は $\mathfrak{B}$ 上の測度函數になる。$m(E)=\nu(E)$ を滿足する $E\varepsilon\mathfrak{B}$ の全體を $\mathfrak{B}_1$ とすると $E\in\mathfrak{B}_1$ のとき明かに $E^c\in\mathfrak{B}_1$. $E_n\in\mathfrak{B}_1$, $n=1, 2, \dots$ 且 E_n が互に素のとき $\sum m(E_n)=\sum\nu(O_n)$ が成立つ。但し O_n は E_n に對應する基本開集合である。F が (o)-連續なることから $\sum O_n$, 從て $\sum E_n$ に對應する基本開集合を O とすると $\sum\nu(O_n)=\nu(\sum O_n)=\nu(O)$ となり $\sum E_n\in\mathfrak{B}_1$. またすべての基本開集合が $\mathfrak{B}_1$ に屬するから $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}$ となる。

F_1, F_2 を $F_1\frown F_2=0$ なる C の (o)-連續線形汎函數とする。F_1, F_2 に對應する正則な測度函數を m_1, m_2 とすると補助定理 5 から $m_1\frown m_2=0$. $m=m_1+m_2$ と置くとすべての E に對し $m_1(E)=m(E\Omega_1)$, $m_2(E)=m(E\Omega_2)$, $\Omega_1+\Omega_2=\Omega$ が成立つ互に素な Borel 集合 Ω_1, Ω_2 が存在する。m は正則測度函數であるから

$$H_1\subset H_2\subset\cdots\subset\Omega_1\subset\cdots\subset G_2\subset G_1$$

$$\lim_{n\to+\infty} m(G_n-H_n)=0$$

が成立つ閉集合及開集合の列 $\{H_n\}$, $\{G_n\}$ が存在する。基本開集合列 $\{O_n\}$ を $H_n \subset O_n \subset G_n$ となる様にとり $\overline{\mathrm{Lim}}\, O_n$ と對等な基本開集合を O とする。容易に $m(\Omega_1 \Delta O)=0$ となることが判る。但し $\Omega_1 \Delta O$ は Ω_1 と O との對稱差を表す。O の補集合を O' とするとすべての E に對し

$$m_1(E)=m(EO), \qquad m_2(E)=m(EO')$$

となる。$f(p)$ を任意の正連續函數とし $f_1(p)$ を O 上で $f(p)$ と一致し O' 上で 0 となる函數, $f_2=f-f_1$ とすると

$$F_1(f_2)+F_2(f_1)=0, \quad f_1 \frown f_2=0, \quad f_1+f_2=f$$

が成立つ。これから次の補助定理が得られる。

補助定理 8. X を σ-完全ベクトル束, F_1, F_2 を $F_1 \frown F_2=0$ を滿足する X の (0)-連續線形汎函數とする。今 a を X の任意の正要素とすると a を直交する二つの部分 a_1, a_2 に分け

$$F_1(a_1)=0, \qquad F_2(a_2)=0$$

ならしめることが出來る。

證明。a によつて生成される主イデヤルをその主イデヤルによる表現空間上の連續函數で表現し, a が恒等的に 1 となるやうにすれば上述の結果から補助定理 8 が成立つことが判る。 以上。

§2. 抽象 L_p-空間。

X をノルムの附けられた半順序線形空間とし更に

$$I_p \qquad x \frown y=0 \text{ のとき } \|x+y\|=\{\|x\|^p+\|y\|^p\}^{\frac{1}{p}} \ .\ 1 \leqq p \leqq +\infty$$

を滿足するものとする。但し $p=+\infty$ のとき $\{\|x\|^p+\|y\|^p\}^{\frac{1}{p}}$ は

$$\max\{\|x\|, \|y\|\}$$

を表すものとする。X がノルムについて完備のとき抽象 L_p-空間といふ。

X のノルムに依る完備化を X_1 で表すと X_1 は Banach 束であるが尙次の補助定理が成立する。

補助定理 1. X_1 は抽象 L_p-空間である。

證明。$x, y \in X_1$, $x \frown y=0$ のとき I_p が成立つことを證明すれば充分である。$\|x_n-x\| \to 0$, $\|y_n-y\| \to 0$ なる X の正要素列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をとる。$x'_n=(x_n-y_n)_+$, $y'_n=(x_n-y_n)_-$ とすると $\|x'_n-x\| \to 0$, $\|y'_n-y\| \to 0$ となる

$$\|x+y\|=\lim\|x'_n+y'_n\|=\lim\{\|x'_n\|^p+\|y'_n\|^p\}^{\frac{1}{p}}$$
$$=\{\|x\|^p+\|y\|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

となり I_p が成立つ。 以上。

p の共軛數を p' で表す。即ち $1<p<+\infty$ のとき $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ に依り，$p=1$ のとき $p'=+\infty$, $p=+\infty$ のとき $p'=1$ に依つて p' を定義する。

補助定理 2. X の共軛空間 $\overline{X}$ は完全ベクトル束を作る。

また $\overline{X}$ は抽象 $L_{p'}$-空間である。

證明。 $I_{p'}$ が $\overline{X}$ で成立することを證明すればよい。$\overline{X}=\overline{X}_1$ となるため最初から X を抽象 L_p-空間として論する。$F\cap G=0$ なる $F, G\in\overline{X}$ を考へると

$$(1)\quad \|F+G\|=\|F\cup G\|=\text{l. u. b.}\Big(F(x)+G(y)\,;\ x\cap y=0,\ \|x\|^p+\|y\|^p\leqq 1\Big)$$

(§1 補助定理 7)

$c_1^p+c_2^p=1$ を滿足するあらゆる $c_1\geqq 0$, $c_2\geqq 0$ を考へると (1) の右邊は

$$\text{l. u. b.}\Big(c_1F(x)+c_2G(y)\,;\ x\cap y=0,\quad c_1^p+c_2^p=1,\quad \|x\|=\|y\|=1\Big)$$
$$=\text{l. u. b.}\Big(\{F(x)^{p'}+G(y)^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}\,;\ x\cap y=0\quad \|x\|=\|y\|=1)\Big)$$
$$=\{\|F\|^{p'}+\|G\|^{p'}\}^{\frac{1}{p'}}$$

(§1 補助定理 7)

が成立つ。 以上。

補助定理 3. X は完全ベクトル束を作る抽象 L_p-空間 $\overline{\overline{X}}$ に埋藏される。

證明。 補助定理 2 を使つて。 以上。

補助定理 4. $\overline{\overline{X}}$ は $1<p<+\infty$ とき一様凸性をもつ。故に正則 Banach 空間である。

證明。 x, y を $\overline{\overline{X}}$ の任意の要素とする。e を $|x|, |y|\leqq e$ なる $\overline{\overline{X}}$ の正要素とし x, y を e に關する特性要素の一次的結合で e に關して一様に近似する。例へば

$$|x-\sum_1^n\lambda_ie_i|\leqq\varepsilon e\qquad |y-\sum_1^n\mu_ie_i|\leqq\varepsilon e.$$

今 $x'=\sum\lambda_ie_i$, $y'=\sum\mu_ie_i$ と置くと

$$(2)\quad p\geqq 2\ \text{のとき}\quad \|x'+y'\|^p+\|x'-y'\|^p\leqq 2^{p-1}(\|x'\|^p+\|y'\|^p)$$
$$1<p\leqq 2\ \text{のとき}\quad \|x'+y'\|^{p'}+\|x'-y'\|^{p'}\leqq 2(\|x'\|^p+\|y'\|^p)^{p'-1}$$

が成立つことが計算される。[1]

従て (2) に於て x', y' の代りに x, y と置いた式が成立し $\overline{\overline{X}}$ が一様凸性をもつことが判る。　　以上。

定理 1. X が抽象 L_p-空間, $1<p<+\infty$ のとき次の性質をもつ

(1°) 完全ベクトル束である。

(2°) Banach 空間として正則。

(3°) K-空間である (B_2 空間)。

證明。 $\overline{\overline{X}}$ が正則 Banach 空間であるから X も正則 Banach 空間となる。(1°), (3°) は第二章の所論からその成立が判る。　　以上。

補助定理 5. $\overline{\overline{X}}$ は $p=1$ のとき K-空間 (B_2 空間) になる。

證明。 x, y を $\overline{\overline{X}}$ の任意の正要素とし, 補助定理 4 の證明中の x', y' を考へる。($\lambda_i, \mu_i \geqq 0$ としてよい)。

$$\|x'+y'\|=\|x'\|+\|y'\|$$

が成立つことから

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$$

となる。$x_n \downarrow 0$ とすると $\{\|x_n\|\}$ は單調減少列を作るから

$$\lim_{n, m\to\infty} \|x_n-x_m\|=\lim_{n, m\to\infty}\{\|x_n\|-\|x_m\|\}=0$$

故に $\|x_n-x\|\to 0$ となる x が存在する。$x_n\geqq 0$ から $x\geqq 0$ となる故に $x=0$ でなければならない。故に $\|x_n\|\to 0$. $0\leqq x_n\leqq x_{n+1}$, $\{\|x_n\|\}$ か有界のとき上と同様の方法で $\bigvee x_n$ の存在を證明することが出來る。故に $\overline{\overline{X}}$ は K-空間である。

定理 2. X が抽象 L_1-空間のとき次の性質をもつ

(1°) 完全ベクトル束である。

(2°) K-空間 (B_2 空間) である。

證明。 $\overline{\overline{X}}$ の閉 Banach 束となることから容易に判る。　　以上。

補助定理 6. $p=+\infty$ のとき $\overline{\overline{X}}$ に於て

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0 \text{ のとき } \|x\cup y\|=\max\{\|x\|, \|y\|\}$$

が成立つ。

證明。 補助定理 4 の證明中の様に x', y' を考へる (λ_i, μ_i を $\lambda_i, \mu_i\geqq 0$ と

---

(1) R. P. Boas, J. R.: Bull. A. M. S. 46 (1940), 304-311.

してよい)。明に $\|x'\cup y'\|=\max\{\|x'\|, \|y'\|\}$ これから $\|x\cup y\|=\max\{\|x\|, \|y\|\}$ が成立つ。

定理 3. $p=\infty$ のとき X に於て

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0 \text{ のとき } \|x\cup y\|=\max\{\|x\|, \|y\|\}$$

が成立つ。

證明。補助定理 6 から。 以上。

X が少くとも三つの互に直交する 0 でない正要素をもつとき I_p を Bohnenblust の條件 (P)(1)

(P): $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, $x_1\frown x_2=0$ $y_1\frown y_2=0$ $\|x_1\|=\|y_1\|$, $\|x_2\|=\|y_2\|$ のとき $\|x\|=\|y\|$ が成立する。

で置きかへて論ずることも出來る。

§3. 抽象 L_p-空間の具體的 L_p-空間による表現(2)

X を抽象 L_p-空間とする。先づ $p<+\infty$ の場合を考へる。X の正要素の集合 $\{e_\alpha\}$ を $\alpha\neq\beta$ のとき $e_\alpha\frown e_\beta=0$, $\{e_\alpha\}^\perp=(0)$ なる樣にとる。簡單のため $\{e_\alpha\}$ が唯一個の要素からなる場合即ち X が單位をもつときから考へる。X の表現空間を Ω とし e を恒等的に 1 ならしめる樣 X を Ω の連續函數で表現し x には $f_x(\mathfrak{p}^*)$ が對應するものとする。ベクトル値測度函數を $\mu(E)$ とし可測集合 E に對し $m(E)=\|\mu(E)\|^p$ と置くとき $m(E)$ は完全加法的測度函數で, 第一種集合と零測度集合は同義になる。從て可測函數, 對等, 殆ど到る所等を兩義 (第一編第二章第一節の意味と測度函數 $m(E)$ に關してとの) に考へても混亂は起らない。$x=\int_\Omega f_x(\mathfrak{p}^*)d\mu$ と書かれることから §2, I_p を使つて

$$\|x\|=\left[\int_\Omega |f_x(\mathfrak{p}^*)|^p dm\right]^{\frac{1}{p}}$$

と書かれることが容易に判る。逆に $\int_\Omega |f(\mathfrak{p}^*)|^p dm<+\infty$ なる Ω 上の可測函數 $f(\mathfrak{p}^*)$ を考へると $f(\mathfrak{p}^*)$ に對等な連續函數が X の一要素の表現函數になることを證明する。そのためには $f(\mathfrak{p}^*)$ を負ならざる値をとる連續函數として論じて差支ない。今 $f_n(\mathfrak{p}^*)$ を $\min\left(f(\mathfrak{p}^*), n\right)$

---

(1) Bohnenblust, Duke Math. Journal **6** (1940), 627-640.
(2) H. Nakano: 帝國學士院記事 **17** (昭和 16 年), 311-317.

で定義すると $f_n(\mathfrak{p}^*)$ は有界連續函數となるから X の要素 x_n の表現になつてゐる。

$$\|x_n\|=\left[\int_\Omega \left(f_n(\mathfrak{p})\right)^p dm\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\int_\Omega \left(f(\mathfrak{p}^*)\right)^p dm\right]^{\frac{1}{p}}$$

且 $x_n \leqq x_{n+1}$ となるから抽象 L_p 空間の性質によつて $\vee x_p \in X$ 且 $f(\mathfrak{p}^*)$ は $\vee x_n$ の表現となる。m に關して p 束が可積分な可測函數の作る Banach 束を $L_p(\Omega; m)$ で表すと X は $L_p(\Omega; m)$ で同型表現されたことになる。

次に一般の場合即ち X が單位をもたない場合を考へる。e_a が $\mathfrak{A}(e_a)$ に對應する Ω の基本開集合 Ω_a の特性函數になるやうに X を Ω 上の連續函數で表現する。E を Ω の可測集合とし E に對等な Ω の基本開集合の特性函數を表現函數とする X の要素が存在する場合には例へば之を a とすると $m(E)=\|a\|^p$ と置き，そうでない場合には $m(E)=+\infty$ と置く。$m(E)$ は Ω の可測集合に對して定義された $+\infty$ をも含めて負ならざる値をとる完全加法的集合函數であり，上の場合と略々同樣にして X は $L_p(\Omega; m)$ で同型表現出來る。今 X の表現ブール空間を考へる代りに X が $\mathfrak{A}(e_a)$ の直和となつてゐることに注意すると $\mathfrak{A}(e_a)$ に對應する測度函數 m_a を本節の始めに述べた樣に定める。X が $L_p(\Omega_a; m_a)$ の直和として同型表現されることが容易に證明される。

次に X が抽象 L_∞-空間の場合について考へる。$\bar{X}$ は抽象 L_1-空間であるから上述に依つて Ω を $\bar{X}$ の表現ブール空間とするとき $L_1(\Omega; m)$ なる形の同型表現が得られる。$\bar{\bar{X}}$ の要素は Ω の有界可測函數，從て Ω の有界連續函數の全體で表現され $\bar{\bar{X}}$ の要素のノルムは對應する連續函數の絕對值の上端で與へられる。X の要素は $\bar{\bar{X}}$ の要素として考へられるから X は Ω の連續函數で表現され X の要素のノルムは對應する連續函數の絕對值の上端で與へられる。

$1<p<+\infty$ のとき抽象 L_p-空間とその共軛空間は同一の表現ブール空間をもち，X が $L_p(\Omega; m)$ で表現されるとき $\bar{X}$ は $L_p(\Omega; m)$ の共軛空間で同型表現される。之は $\bar{X}$ を抽象 $L_{p'}$-空間，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$，として上述の方法で表現したものと本質的に異なる所はない。

以上は抽象 L_p-空間 X の表現に就いて述べたが X がノルムに就いて完備でないときは上記の表現に於てその稠密な部分空間で表現される。

本研究に於て御懇切な御指導を賜つた前田教授に深く感謝する。尙本研究は文部省科學研究費の補助に依つてなされたものである。