ベクトル束の表現

前田文友
小笠原藤次郎

(昭和17年6月8日受附)

ベクトル束の函數による表現については，すでに角谷 [1],[1] [2], Stone [2], 吉田 [1], 吉田-深宮 [1], 中野 [2] 等によつて論ぜられて居るが，こゝでは Wecken [1] の特性族を用ふる比較的初等的な方法を述べる。

§1 に於ては，單位元を有するベクトル束 L を考へる。L の主イデヤルの全體 P は配分束をなし，L の要素に對應する特性族は主イデヤルの列 $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ であるから，P を Wallman [1] の方法で集合族に表現するときは，$\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ は單調に增加する集合列に表現される。これから階函數を作れば，L は連續函數の族に線形-束-準同型に表現される。L がアルキメデス的であるときは，この表現は線形-束-同型である。[2] しかるに L がアルキメデス的であるときは L は完全ベクトル束に埋藏される。[3] しかして σ-完全束に於ては本節の表現の方法は中野 [2] の相對的スペクトルと本質的に一致する。

§2 に於ては，單位元の存在を假定しないアルキメデス的ベクトル束 L を考へる。このとき L の正規イデヤルの全體 N は完全ブール代數をなし，L の要素に對應する特性族は正規イデヤルの列になる。この N を §1 の如く表現することによりて L の表現を求める。

§3 に於ては σ-完全或は完全ベクトル束 L を考へる。このときに上の方法で唯のベクトル束としては表現出來るが，それが σ-完全或は完全ベクトル束として束-同型であるとは云へない。故にこゝでは L の要素を値に持つ測度の概念を導入して，測度零の集合を無視すれば成立することを示す。

§4 に於ては補遺として，ラドン-ニコディウムの定理に對應するベクトル束に於ける定理を特性族を用ひて證明する一方法を示す。

---

(1) 括弧 [ ] 内の數字は末尾の引用文獻中の番號を示す。

(2) 中山 [1] によれば，L がアルキメデス的でないときでも，"函數による表現" の代りに "線形順序ベクトル束の要素を成分とするベクトルによる表現" を考へれば，Clifford [1] の方法によつて，線形-束-同型の表現が得られる。

(3) Clifford [1], 469, 中野 [2], 507-511.

1. L をベクトル束とする。即ち L は實數を係數とする線形空間にして，半順序 $x \geqq y$ を $x-y \geqq 0$ で定義するとき L は束をなしてゐる。このとき L は配分束にして，尙

$$(x \cup y)+z=(x+z) \cup (y+z), \qquad (x \cap y)+z=(x+z) \cap (y+z)$$

が成立する。

$$x_+=x \cup 0, \qquad x_-=-(x \cap 0), \qquad |x|=x_+ + x_-$$

と定義する。このとき $x=x_+-x_-$ である。

定義 1·1. $x, y \in L$ とする。もし $|x| \cap |u|=0$ なるすべての u に對して $|y| \cap |u|=0$ であるときは $y \prec x$ と書く。$y \prec x$, $x \prec y$ が同時に成立するときは $x \sim y$ にて示す。すべての $x \in L$ に對して $x \prec e$ なるが如き $e>0$ が存在するときは，e を L の**單位元**と云ふ。

補題 1·1. (i) $x \sim |x|$, $\quad x \sim \lambda x \quad (\lambda \neq 0)$.

(ii) $x, y \geqq 0$ なるときは $x \cup y \sim x+y$.

[證] (i) $x \sim |x|$ は定義 1·1 より明らかである。今 $|x| \cap |u|=0$ なる u をとり，$|\lambda x| \cap |u|=y$ とおく。$|\lambda x| \geqq y$, $|\lambda u| \geqq |\lambda| y$ であるから $|\lambda|(|x| \cap |u|) \geqq y \cap |\lambda| y \geqq 0$. 故に $y=0$. 即ち $\lambda x \prec x$. λ の代りに $\dfrac{1}{\lambda}$ をおけば $x \prec \lambda x$. 故に $x \sim \lambda x$.

(ii) は $x \cup y \leqq x+y=x \cup y+x \cap y \leqq 2(x \cup y)$ から明らかである。

定義 1·2. ベクトル束 L の部分束 $\mathfrak{a}$ に於て，$x \in \mathfrak{a}$, $y \prec x$ ならば $y \in \mathfrak{a}$ であるときは，$\mathfrak{a}$ を L の**イデヤル**と云ふ。

定理 1·1. L のイデヤル $\mathfrak{a}$ は線形空間である。

[證] 定義 1·2 より $x \in \mathfrak{a}$ にして，$y \sim x$ 或は $|y| \leqq |x|$ なるときは $y \in \mathfrak{a}$ である。今 $x_1, x_2 \in \mathfrak{a}$ とするときは補題 1·1 より $x_1 \sim \lambda x_1$, 故に $\lambda x_1 \in \mathfrak{a}$. 又 $|x_1|$, $|x_2| \in \mathfrak{a}$, $|x_1|+|x_2| \sim |x_1| \cup |x_2|$ なれば $|x_1+x_2| \leqq |x_1|+|x_2| \in \mathfrak{a}$. 故に $x_1+x_2 \in \mathfrak{a}$.

定義 1·3. H を L の部分集合とするとき，H' を H のすべての要素 y に對して $|x| \cap |y|=0$ なるが如き x の集合とする。

補題 1·2. H' はイデヤルである。

[證] $x_1, x_2 \in H'$ とするときは，任意の $y \in H$ に對して

$$0 \leqq |x_1 \cup x_2| \cap |y| \leqq (|x_1| \cap |y|) \cup (|x_2| \cap |y|)=0,$$

$$0 \leqq |x_1 \cap x_2| \cap |y| \leqq (|x_1| \cap |y|)=0.$$

故に $x_1 \cup x_2$, $x_1 \cap x_2 \in H'$. 即ち H' は L の部分束である。又 $x \in H'$, $y \prec x$ な

るときは明らかに $y \in H'$. 從つて H' はイデヤルである。

定理 1·2. $x \in L$ が與へられたるとき $y < x$ を滿足する y の集合 $\mathfrak{a}(x)$ はイデヤルである。

[證] 補題 1·2 に於て, H を唯一つの要素 x からなる集合とすれば, $\mathfrak{a}(x) = H''$ なれば $\mathfrak{a}(x)$ はイデヤルである。

定義 1·4. $\mathfrak{a}(x)$ を**主イデヤル**と云ふ。

補題 1·1 より $x \sim |x|$ なれば $\mathfrak{a}(x) = \mathfrak{a}(|x|)$ である。故に今後は $\mathfrak{a}(x)$ とかけば $x \geqq 0$ なるものと約束する。

補題 1·3. $\mathfrak{a}(x) \cup \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}(x \cup y) = \mathfrak{a}(x+y)$, $\mathfrak{a}(x) \frown \mathfrak{a}(y) = \mathfrak{a}(x \frown y)$.

[證] $\mathfrak{a}(x) \leqq \mathfrak{a}(x \cup y)$, $\mathfrak{a}(y) \leqq \mathfrak{a}(x \cup y)$ は明らかである。$\mathfrak{a}(x)$, $\mathfrak{a}(y)$ を含むイデヤル $\mathfrak{a}$ を考へるときは, $x, y \in \mathfrak{a}$ なれば $x \cup y \in \mathfrak{a}$. 故に $\mathfrak{a}(x \cup y) \leqq \mathfrak{a}$. 從つて $\mathfrak{a}(x) \cup \mathfrak{a}(y)$ は存在し $\mathfrak{a}(x \cup y)$ に等しい。又補題 1·1 より $\mathfrak{a}(x \cup y) = \mathfrak{a}(x+y)$.

次に $\mathfrak{a}(x) \geqq \mathfrak{a}(x \frown y)$, $\mathfrak{a}(y) \geqq \mathfrak{a}(x \frown y)$ は明らかである。今 z を $\mathfrak{a}(x)$, $\mathfrak{a}(y)$ の共通元とすれば $x > z$, $y > z$ である。$x \frown y \frown |u| = 0$ とするときは $x > z$ なれば $|z| \frown y \frown |u| = 0$. しかるに $y > z$ なれば $|z| \frown |z| \frown |u| = 0$. 即ち $|z| \frown |u| = 0$. 故に $x \frown y > z$. 從つて $z \in \mathfrak{a}(x \frown y)$. 故に $\mathfrak{a}(x \frown y) = \mathfrak{a}(x) \frown \mathfrak{a}(y)$.

定理 1·3. L の主イデヤルの全體 P は配分束である。(1)

[證] 補題 1·3 より P は束を作り, 尙 L が配分束であるから P も配分束であることがわかる。

定義 1·5. L が單位元 e を有するとする。任意の $x \in L$ に對して $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}\big((x - \lambda e)_-\big)$ とおくとき $(\mathfrak{a}_\lambda ; -\infty < \lambda < \infty)$ を **e に關する x の特性族**と云ふ。(2)

補題 1·4. e に關する x の特性族を $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ とし, 尙 $\mathfrak{b}_\lambda^{(x)} = \mathfrak{a}\big((x - \lambda e)_+\big)$ とおくときは次のことが成立する。

(i) $\lambda < \mu$ なるときは $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \leqq \mathfrak{a}_\mu^{(x)}$.

(ii) $\lambda < \mu$ なるときは $\mathfrak{b}_\lambda^{(x)} \cup \mathfrak{a}_\mu^{(x)} = L$.

---

(1) 前田 [1] に於ては類 A_x (即ち $z \sim x$ なるが如き z の集合) の全體を考へたが, $z \sim x$ と $\mathfrak{a}(z) = \mathfrak{a}(x)$ とは同義であるから類 A_x の全體を考へることは, 主イデヤル $\mathfrak{a}(x)$ の全體 P を考へることと同一である。

(2) 定義 4·1 に於てこの定義を擴張する。

(iii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \frown \mathfrak{b}_\lambda^{(x)} = \mathfrak{o}$.[1]

(iv) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \smile \mathfrak{a}_\mu^{(y)} \geqq \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)}$.

(v) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \frown \mathfrak{a}_\lambda^{(y)} = \mathfrak{a}_\lambda^{(x \smile y)}$.

[證] (i) 定義より明らかである。

(ii) $\lambda < \mu$ なるときは

$$(x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_- = (x-\lambda e) \smile 0 + (-x+\mu e) \smile 0$$
$$= (\mu-\lambda)e \smile (x-\lambda e) \smile (-x+\mu e) \smile 0 \geqq (\mu-\lambda)e.$$

故に $$\mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_-\big) \geqq \mathfrak{a}\big((\mu-\lambda)e\big) = L.$$

從つて補題 1·3 より $\mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_+\big) \smile \mathfrak{a}\big((x-\mu e)_-\big) = L$.

(iii) $(x-\lambda e)_- \frown (x-\lambda e)_+ = 0$ なることから明らかである。

(iv) $$(x-\lambda e)_- + (y-\mu e)_- = (\lambda e - x) \smile 0 + (\mu e - y) \smile 0$$
$$= \big((\lambda+\mu)e - (x+y)\big) \smile (\lambda e - x) \smile (\mu e - y) \smile 0$$
$$\geqq \big((\lambda+\mu)e - (x+y)\big) \smile 0 = \big(x+y-(\lambda+\mu)e\big)_-$$

から成立する。

(v) $$(x \smile y - \lambda e)_- = \big((x-\lambda e) \smile (y-\lambda e)\big)_- = (x-\lambda e)_- \frown (y-\lambda e)_-$$

から成立する。(證明終)

P は配分束であるからこれを Wallman [1] の方法によつて表現する。先づ P は Wallman の所謂 disjunction property を滿足する。即ち $\mathfrak{a}(x)$, $\mathfrak{a}(y)$ を P の相異なる二要素とするときは, $\mathfrak{a}(x) \frown \mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}(y) \frown \mathfrak{a}(z)$ の何れか一方が $\mathfrak{o}$ にして他方が $\mathfrak{o}$ ならざるが如き $\mathfrak{a}(z)$ が存在する。それは例へば $\mathfrak{a}(x) \nleqq \mathfrak{a}(y)$ なるときは, $x \nless y$ であるから $y \frown z = 0$, $x \frown z \neq 0$ なる $z > 0$ が存在する。そのとき $\mathfrak{a}(z)$ が求むるものである。

P の極大双對イデヤル $\mathfrak{p}$ の全體を Ω とする。$\mathfrak{a} \in \mathrm{P}$ に對して $\mathfrak{a}$ を含む極大双對イデヤルの全體を $\mathfrak{a}^*$ にてあらはすときは, P は $\mathfrak{a}^*$ の如き集合の族 P^* によつて束-同型に表現される。今 P^* を底とするが如く Ω を位相化するときは Ω は完全不連結であつて, $\mathfrak{a}^*$ は開集合にして同時に閉集合である。[2]

このとき特性族 $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ は Ω に於ける集合族 $\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ に寫される。$\{\mathfrak{a}_\lambda^*\}$ から次の如くして階函數 $f(\mathfrak{p})$ を作る。

---

(1) $\mathfrak{o}$ は 0 のみからなるイデヤルを示す。
(2) Wallman [1], 116, 脚註。

$$f(\mathfrak{p})=g.\,l.\,b.\,(\lambda\,;\,\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}_\lambda^*)=l.\,u.\,b.\,(\lambda\,;\,\mathfrak{p}\notin\mathfrak{a}_\lambda^*)\,.$$

こゝで $\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ 及び $\mathfrak{p}\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ は，前の表現の方法により，夫々 $\mathfrak{a}_\lambda\in\mathfrak{p}$ 及び $\mathfrak{a}_\lambda\notin\mathfrak{p}$ と同義である。λ の如何に關らず $\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}_\lambda^*$ なるときは $f(\mathfrak{p})=-\infty$ であり，また λ の如何に關らず $\mathfrak{p}\notin\mathfrak{a}_\lambda^*$ なるときは $f(\mathfrak{p})=+\infty$ である。

補題 1·5. e に關する x の特性族を $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ とし，これに對應する點函數を $f_x(\mathfrak{p})$ にてあらはすときは次のことが成立する。

(i) $f_x(\mathfrak{p})$ は連續函數である。

(ii) x が 0 なるときは $f_x(\mathfrak{p})$ は恒等的に 0 である。

(iii) $f_{-x}(\mathfrak{p})=-f_x(\mathfrak{p})$.

(iv) $f_{\mu x}(\mathfrak{p})=\mu f_x(\mathfrak{p})$.

(v) $f_{x+y}(\mathfrak{p})=f_x(\mathfrak{p})+f_y(\mathfrak{p})$.

(vi) $f_{x\cup y}(\mathfrak{p})=\max\,[f_x(\mathfrak{p}),\,f_y(\mathfrak{p})]$.

(vii) $f_{x\cap y}(\mathfrak{p})=\min\,[f_x(\mathfrak{p}),\,f_y(\mathfrak{p})]$.

[證] (i) 今 $f_x(\mathfrak{p}_0)=\lambda_0$（有限）なるときは $\mathfrak{a}_{\lambda_0+\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ は $\mathfrak{p}_0$ を含む開集合であつて，$\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}_{\lambda_0+\varepsilon}^*-\mathfrak{a}_{\lambda_0-\varepsilon}^*$ なるとき $|f_x(\mathfrak{p})-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ である。故に $f_x(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}_0$ で連續である。又 $f_x(\mathfrak{p}_0)=+\infty$ なるときは，$\Omega-\mathfrak{a}_\lambda^*$ は $\mathfrak{p}_0$ を含む開集合にして，$\mathfrak{p}\in\Omega-\mathfrak{a}_\lambda^*$ なるときは $f_x(\mathfrak{p})\geqq\lambda$. $f_x(\mathfrak{p}_0)=-\infty$ のときも同様に云へる。

(ii) $x=0$ のときは

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}=\mathfrak{a}\Big((-\lambda e)_-\Big)=\begin{cases}L & \lambda>0 \text{ なるとき}\\ \mathfrak{o} & \lambda\leqq 0 \text{ なるとき}\end{cases}$$

なることから明らかである。

(iii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(-x)}=\mathfrak{a}\Big((-x-\lambda e)_-\Big)=\mathfrak{a}\Big((x+\lambda e)_+\Big)=\mathfrak{b}_{-\lambda}^{(x)}$ である。今 $f_{-x}(\mathfrak{p})=g.\,l.\,b.\,(\lambda\,;\,\mathfrak{a}_\lambda^{(-x)}\in\mathfrak{p})=\lambda_0$（有限）とする。任意の $\mu<\lambda_0$ に對して $\mu<\lambda<\lambda_0$ なる λ をとれば $\mathfrak{b}_{-\lambda}^{(x)}=\mathfrak{a}_\lambda^{(-x)}\notin\mathfrak{p}$. 然るに補題 1·4 (ii) より $\mathfrak{b}_{-\lambda}^{(x)}\cup\mathfrak{a}_{-\mu}^{(x)}=L$ なれば，$\mathfrak{a}_{-\mu}^{(x)}\in\mathfrak{p}$.[1] 從つて $f_x(\mathfrak{p})=g.\,l.\,b.\,(\lambda\,;\,\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\in\mathfrak{p})\leqq-\mu$. $\mu\to\lambda_0$ ならしめれば

$$f_x(\mathfrak{p})\leqq-\lambda_0\,. \tag{1}$$

次に任意の $\mu>\lambda_0$ に對して $\mathfrak{b}_{-\mu}^{(x)}=\mathfrak{a}_\mu^{(-x)}\in\mathfrak{p}$. 故に補題 1·4 (iii) より $\mathfrak{a}_{-\mu}^{(x)}\notin\mathfrak{p}$. 從つて $f_x(\mathfrak{p})\geqq-\mu$. $\mu\to\lambda_0$ ならしめれば

$$f_x(\mathfrak{p})\geqq-\lambda_0\,. \tag{2}$$

故に $f_x(\mathfrak{p})=-\lambda_0=-f_{-x}(\mathfrak{p})$. 次に $f_{-x}(\mathfrak{p})=+\infty$ のときは (1) の證明の如くし

(1) 極大双對イデヤルは素双對イデヤルである。(Wallman, [1], 116, 脚註)

て $f_x(\mathfrak{p})=-\infty$. 又 $f_{-x}(\mathfrak{p})=-\infty$ のときは (2) の證明の如くして $f_x(\mathfrak{p})=+\infty$.

(iv) (ii), (iii) から $\mu>0$ のときを證明すればよい。このときは

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(\mu x)}=\mathfrak{a}\Big((\mu x-\lambda e)_-\Big)=\mathfrak{a}\Big(\big(x-\frac{\lambda}{\mu}e\big)_-\Big)=\mathfrak{a}_{\frac{\lambda}{\mu}}^{(x)}$$

から成立する。

(v) 先づ $f_x(\mathfrak{p})=\lambda_0$, $f_y(\mathfrak{p})=\mu_0$ が共に有限とする。$\lambda<\lambda_0$, $\mu<\mu_0$ なる任意の實數 λ,μ をとるときは, $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\notin\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_\mu^{(y)}\notin\mathfrak{p}$. 故に $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\cup\mathfrak{a}_\mu^{(y)}\notin\mathfrak{p}$. 從つて補題 1·4 (iv) より $\mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)}\notin\mathfrak{p}$. 即ち $f_{x+y}(\mathfrak{p})\geqq\lambda+\mu$. 從つて

$$f_{x+y}(\mathfrak{p})\geqq f_x(\mathfrak{p})+f_y(\mathfrak{p}).\tag{4}$$

(4) は x,y の代りに $-x$, $-y$ を入れたるときも成立するから

$$f_{-x-y}(\mathfrak{p})\geqq f_{-x}(\mathfrak{p})+f_{-y}(\mathfrak{p}).$$

故に (iii) から
$$f_{x+y}(\mathfrak{p})=f_x(\mathfrak{p})+f_y(\mathfrak{p}).\tag{5}$$

次に $f_x(\mathfrak{p})=+\infty$, $f_y(\mathfrak{p})=\mu_0$ (有限) なりとする。$\lambda<+\infty$, $\mu<\mu_0$ なる任意の實數 λ,μ をとるときは, 上の如くして $f_{x+y}(\mathfrak{p})\geqq\lambda+\mu$. 故に $f_{x+y}(\mathfrak{p})=+\infty$. よつて (5) が成立する。同様にして $f_x(\mathfrak{p})$, $f_y(\mathfrak{p})$ の一方が $+\infty$, 他方が $-\infty$ の場合以外は (5) が成立する。

(vi) 補題 1·4 (v) より $\mathfrak{a}_\lambda^{(x\cup y)}=\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\cap\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}$. 故に

$$\begin{aligned}f_{x\cup y}(\mathfrak{p})&=\text{g.l.b.}(\lambda;\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\cap\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\in\mathfrak{p})\\&=\max[\text{g.l.b.}(\lambda;\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\in\mathfrak{p}),\ \text{g.l.b.}(\lambda;\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}\in\mathfrak{p})]=\max[f_x(\mathfrak{p}),f_y(\mathfrak{p})].\end{aligned}$$

(vii) は (iii) 及び (vi) から成立する。

定理 1·4. 單位元を有するベクトル束 L は完全不連結なる空間 Ω に於て定義せられた連續函數の族 L^* によつて線形-束-準同型に表現される。

[證] $(f_x(\mathfrak{p});x\in L)$ を L^* にてあらはすときは, 補題 1·5 よりこの定理は成立する。但し $x\cup y$ に對應する函數は $\max[f_x(\mathfrak{p}),f_y(\mathfrak{p})]$, 即ち一點 $\mathfrak{p}$ に於て $f_x(\mathfrak{p}),f_y(\mathfrak{p})$ の大なる方を値にとる函數である。

補題 1·6. x の表現 $f_x(\mathfrak{p})$ が恒等的に 0 であるための必要且つ充分なる條件は, すべての $\lambda>0$ に對して $|x|\leqq\lambda e$ が成立することである。

[證] $f_x(\mathfrak{p})$ が恒等的に 0 なるためには

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}=\mathfrak{a}\Big((x-\lambda e)_-\Big)=\begin{cases}L & \lambda>0 \text{ なるとき}\\ \mathfrak{o} & \lambda<0 \text{ なるとき}\end{cases}$$

なることが必要且つ充分である。しかるに $\mathfrak{a}\Big((x-\lambda e)_-\Big)\cap\mathfrak{a}\Big((x-\lambda e)_+\Big)=\mathfrak{o}$ で

あるから，$\lambda>0$ のとき $\mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_-\big)=L$ なることは $\mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_+\big)=\mathfrak{v}$，即ち $(x-\lambda e)_+=0$，即ち $x\leqq\lambda e$ なることと同義である。又 $\lambda<0$ なるとき $\mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_-\big)=0$ なることは $\lambda e\leqq x$ なることと同義である。よつて證明せられた。

[注意] すべての $\lambda>0$ に對して $|x|\leqq\lambda e$ なるが如き x の集合を N とするときは，N は明らかに正規部分空間である。故に $L\to L/N$ は線形–束–準同型なる對應である。(1) よつて補題 1·6 から L/N と L^* との對應が考へられるが，これに於ても一對一の對應が得られるとは云へない。L/N の中の二つの異なる元 x, y の L^* に於ける表現 $f_x(\mathfrak{p})$, $f_y(\mathfrak{p})$ が何れも恒等的に $+\infty$ であるときは，$x\neq y$ なるに關らず，$f_x(\mathfrak{p})=f_y(\mathfrak{p})$ なることがあり得る。(局部的に無限大の値をとる場合でもかゝる場合が起り得る。) これは $\infty-\infty$ が不定であることから出て來る。次に述べるが如く L がアルキメデス的であるときは，これが除かれるのみならず $L\to L^*$ が同型となる。それを考へる前に若干の補題を與へる。

補題 1·7. E を L の部分集合とするとき，もし $\bigvee_{x\in E} x$, $\bigwedge_{x\in E} x$ が存在するときは

(i) $\bigvee_{x\in E} x+y=\bigvee_{x\in E}(x+y)$, $\quad\bigwedge_{x\in E} x+y=\bigwedge_{x\in E}(x+y)$.

(ii) $\bigvee_{x\in E} x\cap y=\bigvee_{x\in E}(x\cap y)$, $\quad\bigwedge_{x\in E} x\cup y=\bigwedge_{x\in E}(x\cup y)$.

[證] (i) すべての $x\in E$ に對して $\bigvee_{x\in E} x+y\geqq x+y$ である。今すべての $x\in E$ に對して $z\geqq x+y$ とする。$z-y\geqq x$ であるから $z-y\geqq\bigvee_{x\in E} x$，即ち $z\geqq\bigvee_{x\in E} x+y$. 故に $\bigvee_{x\in E}(x+y)$ は存在し $\bigvee_{x\in E} x+y$ に等しい。故に (i) の第一式が成立する。第二式は第一式に於て x の代りに $-x$ とおけばよい。

(ii)(2) すべての $x\in E$ につきて $\bigvee_{x\in E} x\cap y\geqq x\cap y$. 次にすべての $x\in E$ につきて $z\geqq x\cap y$ とすれば $z\geqq x+y-x\cup y$. 故に $\bigvee_{x\in E}(z+x\cup y)\geqq\bigvee_{x\in E}(x+y)$. (i) から $z+\bigvee_{x\in E}(x\cup y)\geqq\bigvee_{x\in E} x+y$. 即ち $z\geqq\bigvee_{x\in E} x+y-\bigvee_{x\in E} x\cup y$. 故に $z\geqq\bigvee_{x\in E} x\cap y$. 從つて $\bigvee_{x\in E}(x\cap y)$ は存在し $\bigvee_{x\in E} x\cap y$ に等し。(ii) の第二式は第一式に於て x の代りに $-x$ とおけばよい。

---

(1) Birkhoff [1], 109.

(2) 中野の方法による。(河田–森田 [1], 176.)

定義 1·6. $\{x_\delta\}$ をベクトル束 L の要素の有向集合[1]とする。もし x 及び二つの有向集合 $\{u_\delta\}$, $\{w_\delta\}$ が存在し,

(i) すべての δ に對して　$u_\delta \leqq x_\delta \leqq w_\delta$,

(ii) $\delta < \delta'$ なるときは　$u_\delta \leqq u_{\delta'}$, $w_\delta \geqq w_{\delta'}$ にして,

$$\bigvee_\delta u_\delta \text{ 及び } \bigwedge_\delta w_\delta \text{ が存在し } \bigvee_\delta u_\delta = x = \bigwedge_\delta w_\delta,$$

が成立するとき $x_\delta \to x$ にてあらはす。

補題 1·8. $x_\delta \to x$ なるときは

(i) $x_\delta \cup y \to x \cup y$,　　$x_\delta \cap y \to x \cap y$,

(ii) $\lambda x_\delta \to \lambda x$,　　$x_\delta + y \to x + y$.

[證] 定義 1·6 の $\{u_\delta\}$, $\{w_\delta\}$ を用ひれば, $u_\delta \cup y \leqq x_\delta \cup y \leqq w_\delta \cup y$. 又補題 1·7 より $\bigvee_\delta (u_\delta \cup y) = x \cup y = \bigwedge_\delta (w_\delta \cup y)$ なれば $x_\delta \cup y \to x \cup y$. 他も同様。

定義 1·7. ベクトル束 L に於て, すべての $x \in L$ に對して $\lambda \to 0$ ならば $\lambda x \to 0$ であるときは, L は**アルキメデス的**であるといふ。

補題 1·9. L がアルキメデス的なるとき, e に關する x の特性族を $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ とすれば $\bigwedge \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{o}$ である。[2]

[證] $\lambda < 0$ の如何に關らず $z \in \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}\big((x-\lambda e)_-\big)$ なる $z \geqq 0$ が存在するとすれば $z < (x-\lambda e)_-$. 故に $z \cap (x-\lambda e)_+ = 0$. 即ちすべての $\lambda < 0$ に對して $z \cap \left(\dfrac{x}{\lambda} - e\right)_- = 0$. $\lambda \to -\infty$ ならしめれば補題 1·8 より $z \cap e = 0$. 故に $z = 0$. 從つて $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{o}$.

定理 1·5. L が單位元 e を有するアルキメデス的ベクトル束なるときは, 任意の $x \in L$ に對して $f_x(\mathfrak{p})$ が無限大なる點 $\mathfrak{p}$ の集合は非稠密であり; L は L^* によつて線形-束-同型に表現される。

[證] $\mathfrak{a}^*(y)$ を P^* に屬する任意の開集合とするときは, 補題 1·9 より相當に小なる $\lambda_0 < 0$ をとれば $\mathfrak{a}(y) \not\leqq \mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{a}\big((x-\lambda_0 e)_-\big)$. 即ち $y \not< (x-\lambda_0 e)_-$. 故に $(x-\lambda_0 e)_- \cap z = 0$, $y \cap z \neq 0$ なる $z > 0$ が存在する。即ち $\mathfrak{a}(y \cap z) \neq 0$ にして $\mathfrak{a}(y \cap z) \cap \mathfrak{a}_{\lambda_0} = \mathfrak{o}$. $f_x(\mathfrak{p}) = -\infty$ なる任意の點 $\mathfrak{p} \in \Omega$ をとるときは

---

(1) directed set.

(2) 尙 $\bigvee_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = L$ が成立する。これは定理 2·2 に於て單位元 e が存在する場合を考へればよい。

$\mathfrak{a}_{\lambda_0}\in\mathfrak{p}$. 故に $\mathfrak{a}(y\frown z)\notin\mathfrak{p}$. 即ち $\mathfrak{p}\notin\mathfrak{a}^*(y\frown z)$. 然に $\mathfrak{a}^*(y\frown z)\leqq\mathfrak{a}^*(y)$ であるから $f_x(\mathfrak{p})=-\infty$ なるが如き點 $\mathfrak{p}$ の集合は非稠密である。x の代りに $-x$ を考へれば, $f_x(\mathfrak{p})=+\infty$ なる點 $\mathfrak{p}$ の集合につきても同様に云ひ得る。然るに $f_x(\mathfrak{p})$ は連續函數であるから, $f_x(\mathfrak{p})$ の値は函數値が有限なる點によつて定まる。補題 1·6 から x の表現 $f_x(\mathfrak{p})$ が恒等的に 0 なるための必要且つ充分なる條件は $x=0$ であるから, 定理 1·4 より L は L^* に線形–束–同型に表現される。

2. 次に單位元の存在を假定しないベクトル束の表現を考へる。この節では始から L はアルキメデス的であると假定する。(但し * のついた命題にはアルキメデス的なる假定を用ひて居ない。)

***定義 2·1.** ベクトル束 L のイデヤル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}''$ を滿足するとき, $\mathfrak{a}$ を**正規イデヤル**と云ふ。

H を唯一つの要素 x を有する集合とするときは $\mathfrak{a}(x)=H''$ であるから, 主イデヤルは正規イデヤルである。

***補題 2·1.** 正規イデヤル $\mathfrak{a}$ は閉ぢて居る。即ち $x_\alpha\in\mathfrak{a}$ にして $\bigvee_\alpha x_\alpha$ 或は $\bigwedge_\alpha x_\alpha$ が存在するときはこれらは $\mathfrak{a}$ に含まれる。

[證] $x_\alpha>0$ にして $\bigvee_\alpha x_\alpha$ が存在する場合を考へれば充分である。 $u\in\mathfrak{a}'$ とするときは, すべての α に對して $x_\alpha\frown|u|=0$. 故に補題 1·7 より $\bigvee_\alpha x_\alpha\frown|u|=0$. 即ち $\bigvee_\alpha x_\alpha\in\mathfrak{a}''=\mathfrak{a}$.

***補題 2·2.** 正規イデヤルの全體 N は補完全束である。

[證] $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ を正規イデヤルの任意の集合とする。H を $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ の集合和とするときは $H''=\bigvee_\alpha\mathfrak{a}_\alpha$ である。なんとなれば $H\geqq\mathfrak{a}_\alpha$ なれば $H''\geqq\mathfrak{a}_\alpha''=\mathfrak{a}_\alpha$. 又すべての α に對して $\mathfrak{a}\geqq\mathfrak{a}_\alpha$ なるが如き正規イデヤル $\mathfrak{a}$ を考へるときは $\mathfrak{a}\geqq H$. 故に $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}''\geqq H''$.. しかるに H'' は正規イデヤルなれば $H''=\bigvee_\alpha\mathfrak{a}_\alpha$. 同様にして, D をすべての $\mathfrak{a}_\alpha$ に共通なる要素の集合とすれば $D''=\bigwedge_\alpha\mathfrak{a}_\alpha$ なることが云へる。$\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}'=\mathfrak{o}$ は明らかである。$(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{a}')'=\mathfrak{a}'\frown\mathfrak{a}''=\mathfrak{a}'\frown\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. 故に $\mathfrak{a}\smile\mathfrak{a}'=L$. 即ち $\mathfrak{a}'$ は $\mathfrak{a}$ の補元である。

補題 2·3. $\mathfrak{a}$ をイデヤルとし, $y>0$ とする。もし y が集合 $(y\frown x;\ x\in\mathfrak{a})$

の結び(1)でないときは，$(y\frown x;\ x\in\mathfrak{a})$ の任意の上界 $y_1<y$ をとれば $y-y_1\in\mathfrak{a}'$ である。

[證] もし $y-y_1\notin\mathfrak{a}'$ とすれば $(y-y_1)\frown x\neq 0,\ x\in\mathfrak{a}$ なる $x>0$ が存在する。$u=(y-y_1)\frown x$ とおけば，$u\in\mathfrak{a}$ なれば y_1 の定義より $y_1\geqq y\frown u=u$. 他方 $y-y_1\geqq u$ なれば，$y\geqq y_1+u\geqq 2u$. 又 $2u\in\mathfrak{a}$ なれば，y_1 の定義より $y_1\geqq y\frown 2u=2u$. 故に $y\geqq u+2u=3u$. これを繰り返へせば，すべての n に對して $y\geqq nu$. しかるに L はアルキメデス的なれば $u=0$. これ $u>0$ に矛盾する。故に $y-y_1\in\mathfrak{a}'$.

補題 2・4. 正規イデヤル $\mathfrak{a}$ に對して，$y\notin\mathfrak{a},\ y>0$ なるときは，$y>z>0$, $z\in\mathfrak{a}'$ なる z が存在する。

[證] もし y が $(y\frown x;\ x\in\mathfrak{a})$ の結びであるときは，補題 2・1 より $y\in\mathfrak{a}$ となりて假定に反する。故に補題 2・3 より $z=y-y_1\in\mathfrak{a}'$ である。

補題 2・5. 正規イデヤル $\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}$ に對して $0<y\in\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b},\ y\in\mathfrak{b}'$ なるときは $y\in\mathfrak{a}$ である。

[證] $y\notin\mathfrak{a}$ なるときは，補題 2・4 より $y>z>0,\ z\in\mathfrak{a}'$ なる z あり：$z\in\mathfrak{a}'\frown\mathfrak{b}'=(\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b})'$. これ $z\in\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}$ に矛盾する。

定理 2・1. 正規イデヤルの全體 N は完全ブール代數である。

[證] 補題 2・2 より N は補完全束である。これが配分束なることを云ふためには，N に於ては相對補元が單一であることを云へばよい(2) 今

$$\mathfrak{a}\smile\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\smile\mathfrak{c},\qquad \mathfrak{a}\frown\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\frown\mathfrak{c}$$

とする。もし $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{c}$ とすれば，例へば $x\in\mathfrak{b},\ x\notin\mathfrak{c}$ なる $x>0$ が存在する。補題 2・4 より $x>x_1>0,\ x_1\in\mathfrak{c}'$ なる x_1 がある。$x_1\in\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}\smile\mathfrak{c}$ であるから補題 2・5 から $x_1\in\mathfrak{a}$. 故に $x_1\in\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\frown\mathfrak{c}\leqq\mathfrak{c}$. これ $x_1\in\mathfrak{c}'$ に矛盾する。故に $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ である。

補題 2・6. 正元の集り $\{e^{(\alpha)}\}$ があつて

(i) $\alpha\neq\beta$ なるとき $e^{(\alpha)}\frown e^{(\beta)}=0$,

(ii) $L=\bigvee_{\alpha}\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$

ならしめ得る。

---

(1) join, l. u. b.
(2) Birkhoff [1], 75.

［證］ 超限歸納法により次の (1), (2) を滿足する $\{e^{(\alpha)}\}$ が存在する。

(1) $\alpha \neq \beta$ なるとき $e^{(\alpha)} \frown e^{(\beta)} = 0$.

(2) すべての α に對して $x \frown e^{(\alpha)} = 0$ なる $x > 0$ は存在せず。

$L > \bigvee_\alpha \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ とするときは $x \notin \bigvee_\alpha \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ なる $x > 0$ が存在する。補題 2·4 より $x > x_1 > 0$, $x_1 \in \left(\bigvee_\alpha \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right)'$ なる x_1 がある。しかるときはすべての α に對して $x_1 \frown e^{(\alpha)} = 0$. 故に (2) から $x_1 = 0$. これ不合理である。故に (ii) が成立する。

定義 2·2. $x \in L$ に對して $\mathfrak{a}_\lambda = \bigvee_\alpha \left\{\mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}$ とおくとき，正規イデヤルの列 $(\mathfrak{a}_\lambda; -\infty < \lambda < \infty)$ を $\{e^{(\alpha)}\}$ **に關する** x **の特性族と云ふ。**

定理 2·2. $\{e^{(\alpha)}\}$ に關する x の特性族 $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty < \lambda < \infty)$ は次の性質を有する。

(i) $\lambda < \mu$ なるとき $\mathfrak{a}_\lambda \leqq \mathfrak{a}_\mu$.

(ii) $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{o}$.

(iii) $\bigvee_\lambda \mathfrak{a}_\lambda = L$.

［證］ (i) は定義から明らかである。

(ii) もしすべての $\lambda < 0$ に對して $z \in \mathfrak{a}_\lambda$ なる $z \geqq 0$ ありとすれば，$\mathfrak{a}(z) \leqq \mathfrak{a}_\lambda = \bigvee_\alpha \left\{\mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}$. N は完全ブール代數なれば $\mathfrak{a}(z) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)}) \leqq \mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 即ち $z \frown e^{(\alpha)} < (x - \lambda e^{(\alpha)})_-$. 故に $z \frown e^{(\alpha)} < \left(\frac{x}{\lambda} - e^{(\alpha)}\right)_+$. 即ちすべての $\lambda < 0$ に對して $z \frown e^{(\alpha)} \frown \left(\frac{x}{\lambda} - e^{(\alpha)}\right)_- = 0$. $\lambda \to -\infty$ ならしめれば補題 1·8 から $z \frown e^{(\alpha)} = 0$. これはすべての α に對して成立するから $z = 0$. 故に (ii) が成立する。

(iii) を證明するには $\bigvee_\lambda \left\{\mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\} = \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ なることを證明すればよい。もしこれが成立しないときは補題 2·4 から $z \in \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ にして，$\lambda > 0$ の如何に關らず $z \in \left\{\mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}'$ なるが如き $z > 0$ が存在する。しかるときは $z \frown \left(\frac{x}{\lambda} - e^{(\alpha)}\right)_- \frown e^{(\alpha)} = 0$. $\lambda \to \infty$ のときは補題 1·8 より $z \frown e^{(\alpha)} = 0$. これ $z \in \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ に矛盾する。

補題 2·7. $\{e^{(\alpha)}\}$ に關する x の特性族を $\{\mathfrak{a}_\lambda^{(x)}\}$ とし，尙 $\mathfrak{b}_\lambda^{(x)} = \bigvee_\alpha \left\{\mathfrak{a}\left((x - \lambda e^{(\alpha)})_+\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}$ とおくときは次の事が成立する。

(i) $\lambda < \mu$ なるときは $\mathfrak{b}_\lambda^{(x)} \smile \mathfrak{a}_\mu^{(x)} = L$.

(ii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \frown \mathfrak{b}_\lambda^{(x)} = \mathfrak{o}$.

(iii) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \smile \mathfrak{a}_\mu^{(y)} \geqq \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^{(x+y)}$.

(iv) $\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \frown \mathfrak{a}_\lambda^{(y)} = \mathfrak{a}_\lambda^{(x\smile y)}$.

［證］ (i) 補題 1·4 (ii) の證明の如くして $\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_+\right) \smile \mathfrak{a}\left((x-\mu e^{(\alpha)})_-\right) \geqq \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 故に $\left\{\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_+\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\} \smile \left\{\mathfrak{a}\left((x-\mu e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\} = \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. これの α につきての結びをとる。

(ii) $\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_+\right) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}(e^{(\alpha)}) \frown \mathfrak{a}(e^{(\beta)}) = \mathfrak{o}$ $(\alpha \neq \beta)$ なれば

$$\mathfrak{a}_\lambda^{(x)} \frown \mathfrak{b}_\lambda^{(x)} = \bigvee_\alpha \left\{\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\} \frown \bigvee_\beta \left\{\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\beta)})_+\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\beta)})\right\} = \mathfrak{o}.$$

(iii) 補題 1·4 (iv) の證明の如くして

$$\left\{\mathfrak{a}\left((x-\lambda e)_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\} \smile \left\{\mathfrak{a}\left((y-\mu e)_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}$$
$$\geqq \mathfrak{a}\left((x+y)-(\lambda+\mu)e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}(e^{(\alpha)}).$$

これの α につきての結びをとる。

(iv) $\mathfrak{a}\left((x\smile y-\lambda e^{(\alpha)})_-\right) = \mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right) \frown \mathfrak{a}\left((y-\lambda e^{(\alpha)})_-\right)$ なれば (ii) と同様にして證明し得る。（證明終）

L の表現を得るためには，ブール代數 N に Wallman の表現方法を適用する。即ち §1 に於けるが如く N に於ける極大双對イデヤル $\mathfrak{p}$ の全體を Ω とし，$\mathfrak{a} \in$ N に對して $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}$ の全體を $\mathfrak{a}^*$ にてあらはすときは N は $\mathfrak{a}^*$ の如き集合の族 N* によつて束-同型に表現せられる。今 N* を底とするが如く Ω を位相化するときは Ω は完全不連結ビコムパクト空間であつて，$\mathfrak{a}^*$ はビコムパクトな開集合である。(1)

定理 2·3. L を單位元の存在を假定しないアルキメデス的ベクトル束とする。$(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ を $\{e^{(\alpha)}\}$ に關する x の特性族とするとき x に對して

$$f_x(\mathfrak{p}) = \mathrm{g.l.b.}(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda \in \mathfrak{p}) = \mathrm{l.u.b.}(\lambda;\ \mathfrak{a}_\lambda \notin \mathfrak{p})$$

を對應せしめるときは，$f_x(\mathfrak{p})$ が無限大なる點 $\mathfrak{p}$ の集合は非稠密であつて，L は Ω に於ける連續函數 $f_x(\mathfrak{p})$ $(x \in L)$ の族 L^* によつて線形-束-同型に表現される。

---

(1) N はブール代數であるから極大双對イデヤルと素双對イデヤルは同一のものであり，$\mathfrak{p}$ の補集合は N の素イデヤルである。故に Ω は N の素イデヤルの集合と考へてよく，Wallman の表現と Stone [1] の表現とは一致する。

[證] (i) 補題 2·7 と補題 1·4 とは同一であるから，今の場合も補題 1·5 が成立し，L は L^* に線形-束-準同型である。

(ii) 次に $f_x(\mathfrak{p})=-\infty$ なる點 $\mathfrak{p}$ の集合が非稠密なることを證明する。$\mathfrak{a}^*$ を N^* に屬する任意の開集合とする。$\bigvee_\alpha \mathfrak{a}(e^{(\alpha)})=L$ であるから $\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\neq\mathfrak{o}$ なる α が少くとも一つ存在する。$y\in\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$ なる $y>0$ をとるときは $\mathfrak{a}(y)\leqq\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 定理 2·2 より $\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{o}$ なれば相當に小なる $\lambda_0<0$ をとれば $\mathfrak{a}(y)\not\leqq\mathfrak{a}\left((x-\lambda_0 e^{(\alpha)})_-\right)\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 即ち $y\not< (x-\lambda_0 e^{(\alpha)})_-\frown e^{(\alpha)}$. 故に $(x-\lambda_0 e^{(\alpha)})_-\frown e^{(\alpha)}\frown z=0$, $y\frown z\neq 0$ なる $z>0$ が存在する。即ち $\mathfrak{a}(y\frown z)\neq\mathfrak{o}$ にして $\mathfrak{a}(y\frown z)\frown\mathfrak{a}\left((x-\lambda_0 e^{(\alpha)})_-\right)\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})=\mathfrak{o}$. 故に $\mathfrak{a}(y\frown z)\frown\mathfrak{a}_{\lambda_0}=\mathfrak{o}$. $f_x(\mathfrak{p})=-\infty$ なる任意の點 $\mathfrak{p}$ をとるときは $\mathfrak{a}_{\lambda_0}\in\mathfrak{p}$. 故に $\mathfrak{a}(y\frown z)\notin\mathfrak{p}$. 即ち $\mathfrak{p}\notin\mathfrak{a}^*(y\frown z)$. 然るに $\mathfrak{a}^*(y\frown z)\leqq\mathfrak{a}^*(y)\leqq\mathfrak{a}^*$ であるから $f_x(\mathfrak{p})=-\infty$ なるが如き點 $\mathfrak{p}$ の集合は非稠密である。$f_x(\mathfrak{p})=\infty$ なるが如き點につきても同様。

(iii) $x\geqq 0$ の表現 $f_x(\mathfrak{p})$ が恒等的に 0 であるとする。然るときは

$$\mathfrak{a}_\lambda=\bigvee_\alpha\left\{\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right)\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})\right\}=\begin{cases}\mathfrak{o} & \lambda\leqq 0 \text{ なるとき}\\ L & \lambda>0 \text{ なるとき。}\end{cases}$$

故に $\lambda>0$ なるときは $\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right)\frown\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})=\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 即ち $\mathfrak{a}\left((x-\lambda e^{(\alpha)})_-\right)\geqq\mathfrak{a}(e^{(\alpha)})$. 故に $(x-\lambda e^{(\alpha)})_->e^{(\alpha)}$. 即ち $\lambda>0$ の如何に關らず $(x-\lambda e^{(\alpha)})_+\frown e^{(\alpha)}=0$. $\lambda\to 0$ ならしめるときは $x\frown e^{(\alpha)}=0$. これは α の如何に關らず成立するから $x=0$. 故に一般に $x=x_+-x_-$ の表現 $f_x(\mathfrak{p})$ が恒等的に 0 になるのは $x=0$ のときに限る。然るに $f_x(\mathfrak{p})$ は連續函數であるから (ii) より $f_x(\mathfrak{p})$ の値は函數値が有限なる點によつて定まる。從つて L は L^* に線形-束-同型に表現される。

3. 次に L は σ-完全（或は完全）であつて單位元 e を有するものと假定し,[1] その表現を考へる。（但し * をつけた命題は單位元 e の存在を假定しない。）

*補題 3·1. $y\geqq 0$ 及び主イデヤル $\mathfrak{a}(x)$ が與へられたるとき $z=\bigvee_n (y\frown nx)$ とおくときは，$z\in\mathfrak{a}(x)$, $y-z\in\mathfrak{a}'(x)$ である。

---

(1) σ-完全ベクトル束はアルキメデス的である。(Birkhoff [1], 106.)

［證］ 補題 2·1 より $z\in\mathfrak{a}(x)$.

$$0\leqq(y-z)\frown x=(y-z)\frown y\frown x\leqq(y-z)\frown z=y\frown 2z-z$$
$$=y\frown 2\bigvee_n(y\frown nx)-z=\bigvee_n(y\frown nx)-z=0\,.$$

故に $y-z\in\mathfrak{a}'(x)$.

*定理 3·1. $y\in L$ 及び $\mathfrak{a}(x)$ が與へられたるとき, y の唯一通りの分解

$$y=y_1+y_2\,,\qquad y_1\in\mathfrak{a}(x)\,,\qquad y_2\in\mathfrak{a}'(x)$$

が存在する。

［證］ 補題 3·1 より

$$z_1=\bigvee_n(y_+\frown nx)\in\mathfrak{a}(x)\,,\qquad y_+-z_1\in\mathfrak{a}'(x)\,,$$
$$z_2=\bigvee_n(y_-\frown nx)\in\mathfrak{a}(x)\,,\qquad y_--z_2\in\mathfrak{a}'(x)\,.$$

故に　　$y_1=z_1-z_2\in\mathfrak{a}(x)\,,\qquad y_2=(y_+-z_1)-(y_--z_2)\in\mathfrak{a}'(x)\,.$

尚他に $y=y_1'+y_2'$, $y_1'\in\mathfrak{a}(x)$, $y_2'\in\mathfrak{a}'(x)$ なる分解あるときは, $y_1-y_1'=y_2'-y_2$, $y_1-y_1'\in\mathfrak{a}(x)$, $y_2'-y_2\in\mathfrak{a}'(x)$ なれば $y_1-y_1'=y_2'-y_2=0$ である。

*定義 3·1. 定理 3·1 より得た y_1 を y の $\mathfrak{a}(x)$ への射影と云ひ, $y_1=P_{\mathfrak{a}(x)}y$ にてあらはす。

*補題 3·2. $\mathfrak{a}(x)\leqq\mathfrak{a}(y)$ なるときは $P_{\mathfrak{a}(x)}y\sim x$ である。

［證］ $z=P_{\mathfrak{a}(x)}y$ とおけば, $y\geqq 0$ なるにより $z\geqq 0$. 補題 3·1 より $z\in\mathfrak{a}(x)$. 即ち $z<x$. $z\frown|u|=0$ とするときは, $\bigvee_n(y\frown nx)\frown|u|=0$ なれば $x\frown y\frown|u|=0$. しかるに $x<y$ であるから $x\frown x\frown|u|=0$. 即ち $x\frown|u|=0$. 故に $x<z$. 從つて $z\sim x$.

定理 3·2. 單位元 e を有する σ-完全（或は完全）ベクトル束 L の主イデヤルの全體 P は σ-完全（或は完全）ブール代數である。[1]

［證］ (i) P が完全ブール代數 N の部分束である[2]といふ立場から證明する。$\{\mathfrak{a}(x_\beta)\}$ を可附番個(或は任意)の主イデヤルの集合とするとき, $y_\beta=P_{\mathfrak{a}(x_\beta)}e$ とおけば補題 3·2 から $y_\beta\sim x_\beta$ である。$y=\bigvee_\beta y_\beta$ とおけば, $y_\beta<y$ であるから N に於て $\bigvee_\beta\mathfrak{a}(y_\beta)\leqq\mathfrak{a}(y)$ である。今 $x\in[\bigvee_\beta\mathfrak{a}(y_\beta)]'=\bigwedge_\beta\mathfrak{a}'(y_\beta)$ なる $x>0$ をとるときは, β の如何に關らず $x\in\mathfrak{a}'(y_\beta)$, 即ち $x\frown y_\beta=0$. 故に $x\frown y=$

---

(1) e が存在しないときは, P は制限的 σ-完全（或は制限的完全）ブール代數である。
(2) このことは補題 1·3 の證明から明らかである。

$x\cap\bigvee_\beta y_\beta=0$. 從つて $x\in\mathfrak{a}'(y)$. 即ち $[\bigvee_\beta\mathfrak{a}(y_\beta)]'\leqq\mathfrak{a}'(y)$. 故に $\bigvee_\beta\mathfrak{a}(y_\beta)\geqq\mathfrak{a}(y)$. 從つて $\bigvee_\beta\mathfrak{a}(y_\beta)=\mathfrak{a}(y)$. 即ち主イデヤルの結びは主イデヤルであるのみならす，尙上式に於て $y=\bigvee_\beta y_\beta$ なる關係がある。

(ii) 次に任意の $\mathfrak{a}(x)$ をとり，$x_1=P_{\mathfrak{a}(x)}e$, $x_2=e-x_1$ とおけば定理 3·1 より $x_1, x_2\geqq0$ にして $e=x_1+x_2$, $x_1\cap x_2=0$. 故に補題 1·3 から $L=\mathfrak{a}(e)=\mathfrak{a}(x_1)\cup\mathfrak{a}(x_2)$, $\mathfrak{a}(x_1)\cap\mathfrak{a}(x_2)=\mathfrak{o}$. 從つて $\mathfrak{a}(x_2)$ は $\mathfrak{a}(x_1)=\mathfrak{a}(x)$ の補元である。しかるに N はブール代數であるから補元は唯一つである。故に $\mathfrak{a}(x_2)=\mathfrak{a}'(x)$.

(iii) 次に $\{\mathfrak{a}(x_\beta)\}$ の交りを考へる。N に於て $[\bigwedge_\beta\mathfrak{a}(x_\beta)]'=\bigvee_\beta\mathfrak{a}'(x_\beta)$. しかるに $\mathfrak{a}'(x_\beta)$ は (ii) から主イデヤルであるから，(i) から $\bigvee_\beta\mathfrak{a}'(x_\beta)$ は主イデヤルである。從つて (ii) から $\bigwedge_\beta\mathfrak{a}(x_\beta)$ は主イデヤルである。

補題 3·3. $\mathfrak{a}\in\mathrm{P}$ なるとき，$y(\mathfrak{a})=P_{\mathfrak{a}}y$ とかくときは，$y(\mathfrak{a})$ は P に於て定義せられた完全加法的函數である。即ち $\mathfrak{a}=\bigvee_i\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{a}_j=\mathfrak{o}$ $(i\neq j)$ なるとき

$$y(\mathfrak{a})=y(\mathfrak{a}_1)+\cdots+y(\mathfrak{a}_i)+\cdots$$

である。

[證] $y\geqq0$ の場合を證明すれば充分である。定理 3·2 の證明 (i) に於けるが如く $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(z)$, $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}(y_i)$, $z=\bigvee_i y_i$ ならしめ得る。

$$\begin{aligned}y(\mathfrak{a})=P_{\mathfrak{a}(z)}y&=\bigvee_n(y\cap nz)=\bigvee_n(y\cap n\bigvee_i y_i)=\bigvee_n\bigvee_i(y\cap ny_i)\\&=\bigvee_i P_{\mathfrak{a}(y_i)}y=\bigvee_i y(\mathfrak{a}_i).\end{aligned}$$

又 $i\neq j$ なるときは $y(\mathfrak{a}_i)\cap y(\mathfrak{a}_j)\in\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{a}_j=\mathfrak{o}$ なれば $y(\mathfrak{a}_i)\cap y(\mathfrak{a}_j)=0$. 故に $y(\mathfrak{a}_1)+\cdots+y(\mathfrak{a}_n)=\bigvee_{i=1}^n y(\mathfrak{a}_i)\to y(\mathfrak{a})$.

補題 3·4. P を §1 の如く P の極大双對イデヤルの空間 Ω に於ける集合族 P^* によつて表現するとき，非稠密集合を無視すれば P は P^* に σ-完全(或は完全)ブール代數として束-同型である。

[證] $\{\mathfrak{a}_\alpha\}$ を P の可附番個（或は任意）の集合とし $\mathfrak{a}=\bigvee_\alpha\mathfrak{a}_\alpha$ とする。$\mathfrak{a}_\alpha^*\leqq\mathfrak{a}^*$ であるから $\sum_\alpha\mathfrak{a}_\alpha^*\leqq\mathfrak{a}^*$ である。今任意の $\mathfrak{b}^*\in\mathrm{P}^*$ をとる. もし $\mathfrak{b}^*$ が $\mathfrak{a}^*-\sum_\alpha\mathfrak{a}_\alpha^*$ の一點 $\mathfrak{p}$ を含むときは，$\mathfrak{p}\in\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{p}\in\mathfrak{b}^*$ なれば $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$. 故に $\mathfrak{a}_\alpha\cap\mathfrak{b}\neq\mathfrak{o}$ なる $\mathfrak{a}_\alpha$ が少くとも一つ存在する。$(\mathfrak{a}_\alpha\cap\mathfrak{b})^*\leqq\mathfrak{a}_\alpha^*$ なれば $(\mathfrak{a}_\alpha\cap\mathfrak{b})^*$ は $\mathfrak{a}^*-\sum_\alpha\mathfrak{a}_\alpha^*$ の點を含まず。しかるに $(\mathfrak{a}_\alpha\cap\mathfrak{b})^*\leqq\mathfrak{b}^*$ であるから $\mathfrak{a}^*-\sum_\alpha\mathfrak{a}_\alpha^*$

は非稠密である。$\bigwedge_{a} \mathfrak{a}_{a}$ の場合も同様に云へる。

定義 3·2. Ω の第一種集合の全體を I^* にてあらはし，Ω の二集合 $\mathfrak{c}^*, \mathfrak{d}^*$ に對して $\mathfrak{c}^*-\mathfrak{d}^* \epsilon I^*$, $\mathfrak{d}^*-\mathfrak{c}^* \epsilon I^*$ なるとき $\mathfrak{c}^* \equiv \mathfrak{d}^* \pmod{I^*}$ とあらはす。あらゆる $\mathfrak{a}^* \epsilon \mathrm{P}^*$ をとりたるとき $\mathfrak{c}^* \equiv \mathfrak{a}^* \pmod{I^*}$ の如くあらはされる $\mathfrak{c}^*$ の全體を $\bar{\mathrm{P}}^*$ にてあらはす。

補題 3·5. $\bar{\mathrm{P}}^*$ は σ-集合體である。

[證] $\Omega \epsilon \bar{\mathrm{P}}^*$ にして，又 $\mathfrak{c}^* \epsilon \bar{\mathrm{P}}^*$ なるときは $\Omega-\mathfrak{c}^* \epsilon \bar{\mathrm{P}}^*$ である。今 $\mathfrak{c}_n^* \epsilon \bar{\mathrm{P}}^*$ $(n=1, 2, \ldots)$ とし，$\mathfrak{c}_n^* \equiv \mathfrak{a}_n^* \pmod{I^*}$ とする。補題 3·4 より $(\bigvee_n \mathfrak{a}_n)^* \equiv \sum_n \mathfrak{a}_n^*$ $\pmod{I^*}$. しかるに $\sum_n \mathfrak{c}_n^* \equiv \sum_n \mathfrak{a}_n^* \pmod{I^*}$ なれば $\sum_n \mathfrak{c}_n^* \equiv (\bigvee_n \mathfrak{a}_n)^* \pmod{I^*}$. 即ち $\sum_n \mathfrak{c}_n^* \epsilon \bar{\mathrm{P}}^*$ である。從つて $\bar{\mathrm{P}}^*$ は σ-集合體である。

定義 3·3. $\mathfrak{c}^* \equiv \mathfrak{a}^* \pmod{I^*}$, $\mathfrak{a} \epsilon \mathrm{P}$ なるとき $e(\mathfrak{c}^*)=e(\mathfrak{a})$ とおき，これを $\mathfrak{c}^*$ の e-測度と云ふ。

補題 3·6. $e(\mathfrak{c}^*)$ は $\bar{\mathrm{P}}^*$ に於て完全加法的である。

[證] $\mathfrak{c}^*=\sum_n \mathfrak{c}_n^*$, $\mathfrak{c}_m^* \mathfrak{c}_n^*=0$ $(m \neq n)$ とする。$\mathfrak{c}_n^* \equiv \mathfrak{a}_n^* \pmod{I^*}$, $\mathfrak{a}_n \epsilon \mathrm{P}$ とするときは，$\mathfrak{a}_m \frown \mathfrak{a}_n=\mathfrak{o}$ $(m \neq n)$ にして $\mathfrak{c}^* \equiv (\bigvee_n \mathfrak{a}_n)^* \pmod{I^*}$. 故に補題 3·3 より

$$e(\mathfrak{c}^*)=e(\bigvee_n \mathfrak{a}_n)=\sum_n e(\mathfrak{a}_n)=\sum_n e(\mathfrak{c}_n^*).$$

定理 3·3. e-測度零の集合を無視すれば，單位元を有する σ-完全（或は完全）ベクトル束 L とその表現 L^* とは σ-完全（或は完全）ベクトル束として線型-束-同型である。又 $f_y(\mathfrak{p})$ を y の表現とすれば $y=\int_\Omega f_y(\mathfrak{p}) de(\mathfrak{c}^*)$ である。

[證] 定理 1·5 より L と L^* とはベクトル束として線形-束-同型である。$\{y_\nu\}$ を L の有界なる可附番（或は任意の）部分集合とし，$y=\bigwedge_\nu y_\nu$ とする。しかるときは $(\bigwedge_\nu y_\nu-\lambda e)_-=\left(\bigwedge_\nu (y_\nu-\lambda e)\right)_-=\bigvee_\nu (y_\nu-\lambda e)_-$ であるから $\mathfrak{a}_\lambda^{(y)}=\bigvee_\nu \mathfrak{a}_\lambda^{(y_\nu)}$.(1) 故に第一種集合に屬する點を無視すれば

$$f_y(\mathfrak{p})=\mathrm{g.l.b.}(\lambda;\ \mathfrak{p} \epsilon \mathfrak{a}_\lambda^{(y)*})=\mathrm{g.l.b.}(\lambda;\ \mathfrak{p} \epsilon \sum_\nu \mathfrak{a}_\lambda^{(y_\nu)*})$$
$$=\min_\nu [\mathrm{g.l.b.}(\lambda;\ \mathfrak{p} \epsilon \mathfrak{a}_\lambda^{(y_\nu)*})]=\min_\nu [f_{y_\nu}(\mathfrak{p})].$$

y_ν の代りに $-y_\nu$ とおけば，$\bigvee_\nu y_\nu$ につきても同様に云へる。$f_y(\mathfrak{p})=\mathrm{g.l.b.}$ $(\lambda;\ \mathfrak{p} \epsilon \mathfrak{a}_\lambda^{(y)*})$ であるからルベック積分の如くして

(1) 定理 3·2 [證] (i) の如くして。

$$y=\int_{\mathfrak{Q}} f_y(\mathfrak{p})de(\mathfrak{c}^*)$$

なることを證明し得る。

4. 最後に補遺として，ラドン－ニコディムの定理に對應するベクトル束に於ける定理を特性族を用ひて證明する一方法を述べる。

定義 4·1. ベクトル束 L に於て $x>0$ とする。任意の $y\in L$ に對して $\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{a}\big((y-\lambda x)_-\big)$ とおくとき $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ を x **に關する** y **の特性族**と云ふ。[1]

補題 4·1. σ-完全ベクトル束 L に於て，$x>0$ に關する y の特性族を $(\mathfrak{a}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ とすれば

(i) $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{a}_\lambda,\ \mathfrak{a}\in\mathbf{P}$ なるとき $y(\mathfrak{a})\leqq\lambda x(\mathfrak{a})$,

(ii) $\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{o},\ \mathfrak{a}\in\mathbf{P}$ なるとき $y(\mathfrak{a})\geqq\lambda x(\mathfrak{a})$.

［證］ (i) $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{a}_\lambda$ なるときは定理 3·1 の證明より

$$\big(P_{\mathfrak{a}}(y-\lambda x)\big)_+=P_{\mathfrak{a}}(y-\lambda x)_+\in\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}\big((y-\lambda x)_+\big)=\mathfrak{o}$$

なれば
$$y(\mathfrak{a})-\lambda x(\mathfrak{a})=P_{\mathfrak{a}}(y-\lambda x)\leqq 0\,.$$

(ii) $\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}_\lambda=0$ なるときは $\big(P_{\mathfrak{a}}(y-\lambda x)\big)_-\in\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}\big((y-\lambda x)_-\big)=\mathfrak{o}$ なれば $y(\mathfrak{a})-\lambda x(\mathfrak{a})=P_{\mathfrak{a}}(y-\lambda x)\geqq 0$.

定理 4·1.[2] σ-完全ベクトル束に於て $x>0$ とする。任意の $y\in L$ に對して，x に關する y の特性族 $\{\mathfrak{a}_\lambda\}$ 及び $x(\mathfrak{b})=0$ なるが如き $\mathfrak{b}\in P$ が存在し

$$y=y(\mathfrak{b})+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dx(\mathfrak{a}_\lambda)\,. \tag{1}$$

又任意の $\mathfrak{a}\in\mathbf{P}$ に對し

$$y(\mathfrak{a})=y(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b})+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dx(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{a}_\lambda)\,. \tag{2}$$

［證］ $\mathfrak{a}_\lambda\leqq\mathfrak{a}(|y|)\smile\mathfrak{a}(x)$ なれば $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}(|y|)\smile\mathfrak{a}(x)-\bigvee_\lambda\mathfrak{a}_\lambda$,[3] $\mathfrak{b}_2=\bigwedge_\lambda\mathfrak{a}_\lambda$ とおく。すべての λ に對して $\mathfrak{b}_1\frown\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{o}$ なれば補題 4·1 より $y(\mathfrak{b}_1)\geqq\lambda x(\mathfrak{b}_1)$. 故に $x(\mathfrak{b}_1)=0$. 又すべての λ に對して $\mathfrak{b}_2\leqq\mathfrak{a}_\lambda$ なれば補題 4·1 より $y(\mathfrak{b}_2)\leqq\lambda x(\mathfrak{b}_2)$.

---

(1) 定義 1·5 は定義 4·1 に於て $y<x$ なる場合である。こゝでは $y<x$ なる條件を除いた。この場合にも補題 1·4, 補題 1·9 等に對應するものが少しく變形すれば得られる。

(2) 前田 [1] 148, 中野 [1] 450 に於ては，x に關する $P_{\mathfrak{a}(x)}y$ の特性族を用ひて證明した。こゝでは直接に x に關する y の特性族を用ひて證明する。この方法は集合函數の場合にもそのまゝ適用出來る。尙この定理に關しては，吉田 [2], 河田-森田 [1] 參照。

(3) $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ に於ける $\mathfrak{b}$ の相對補元を示す。

故に $x(\mathfrak{b}_2)=0$. 従つて $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\cup\mathfrak{b}_2$ とおくときは $x(\mathfrak{b})=0$. 又 $\mathfrak{c}=\bigvee_\lambda \mathfrak{a}_\lambda-\bigwedge_\lambda \mathfrak{a}_\lambda$ とおけば $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}(|y|)\cup\mathfrak{a}(x)-\mathfrak{c}$ である。[1] $(-\infty,\infty)$ の分解

$$\mathfrak{d}:\cdots<\lambda_{-i}<\lambda_{-i+1}<\cdots<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_i<\lambda_{i+1}<\cdots$$

$\lambda_{i+1}-\lambda_i<\varepsilon$, $\lim_{i\to-\infty}\lambda_i=-\infty$, $\lim_{i\to\infty}\lambda_i=\infty$ を考へる。補題 4·1 より

$$\lambda_i x\big(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{a}_{\lambda_{i+1}}-\mathfrak{a}_{\lambda_i})\big)\leqq y\big(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{a}_{\lambda_{i+1}}-\mathfrak{a}_{\lambda_i})\big)\leqq\lambda_{i+1}x\big(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{a}_{\lambda_{i+1}}-\mathfrak{a}_{\lambda_i})\big).$$

故に　$\underline{s}_{\mathfrak{d}}=\bigvee_i\lambda_i x\big(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{a}_{\lambda_{i+1}}-\mathfrak{a}_{\lambda_i})\big)$,　$\bar{s}_{\mathfrak{d}}=\bigwedge_i\lambda_{i+1}x\big(\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{a}_{\lambda_{i+1}}-\mathfrak{a}_{\lambda_i})\big)$

とおくときは $\underline{s}_{\mathfrak{d}}\leqq y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})\leqq\bar{s}_{\mathfrak{d}}$, $\bar{s}_{\mathfrak{d}}-\underline{s}_{\mathfrak{d}}\leqq\varepsilon x(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})\leqq\varepsilon x$. 故に $\underline{s}_{\mathfrak{d}}\to y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$, $\bar{s}_{\mathfrak{d}}\to y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$. この關係を $y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dx(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}_\lambda)$ と書き得。$\mathfrak{a}(|y|)\cup\mathfrak{a}(x)=\mathfrak{b}\cup\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}=\mathfrak{o}$ にして $y\in\mathfrak{a}(|y|)\cup\mathfrak{a}(x)$ であるから $y(\mathfrak{a})=y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+y(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$. 故に (2) が成立する。(1) は (2) に於て $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(|y|)\cap\mathfrak{a}(x)$ とおけばよい。

[注意] $|y(\mathfrak{b})|\cap x\in\mathfrak{b}$, $x(\mathfrak{b})=0$ なれば $|y(\mathfrak{b})|\cap x=0$. 即ち $y(\mathfrak{b})\in\mathfrak{a}'(x)$. 又 $x(\mathfrak{a}_\lambda)\in\mathfrak{a}(x)$ であるから補題 2·1 より $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dx(\mathfrak{a}_\lambda)\in\mathfrak{a}(x)$. 故に $P_{\mathfrak{a}(x)}y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dx(\mathfrak{a}_\lambda)$ である。

もし L が單位元 e を有するときは, $x=e$ とおけば Freudenthal [1] の積分表示

$$y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de(\mathfrak{a}_\lambda)\tag{3}$$

を得る。定理 3·3 の積分 $y=\int_{\Omega}f_y(\mathfrak{p})de(\mathfrak{c}^*)$ は $y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de(\mathfrak{a}_\lambda^*)$ とも書き得る故に (3) の表現に他ならない。

（本研究は文部省科學研究費による）

引　用　文　獻

G. Birkhoff, [1] *Lattice Theory*, 1940.

A. H. Clifford, [1] *Partially ordered Abelian Groups*, Annals of Math., **41** (1940), 465–473.

H. Freudenthal, [1] *Teilweise geordnete Moduln*, Proc. Amsterdam, **39** (1936), 641–651.

角谷 靜夫, [1] *Weak topology, bicompact set and the principle of duality*, 學士院記事, **16** (昭 15), 63-67.

[2] *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Annals of Math., **42** (1941), 523-537.

河田敬義, 森田紀一, [1] *Radon-Nikodym* の定理をめぐつて (ベクトル束について), 日本數學物理學會誌, **15** (昭 17), 171-186.

---

(1) $y\in\mathfrak{a}(x)$ なるときは補題 1·9 及びその脚註より $\bigwedge_\lambda\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{o}$, $\bigvee_\lambda\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{a}(x)$ なれば $\mathfrak{b}=\mathfrak{o}$ である。

前田 文友, [1] *Partially ordered linear spaces*, 廣島文理科大學理科紀要, **10** (昭 15), 137–150.

中野秀五郎, [1] *Teilweise geordnete Algebra*, 日本数學輯報, **17** (昭 16), 425–511.

[2] *Eine Spektraltheorie*, 日本数學物理學會記事, **23** (昭 16), 485–511.

中山 正, [1] *Vector lattice* ノ表現ニツイテ, 全國紙上数學談話會, **233** (昭 17), 825–834.

M. H. Stone, [1] *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 37–111.

[2] *A general theory of spectra*, II. Prcc. Nat. Acad. Sci., **27** (1941), 83–87.

H. Wallman, [1] *Lattices and topological spaces*, Annals of Math., **39** (1938), 112–126.

F. Wecken, [1] *Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*, Math. Zeit., **45** (1939), 377–404.

吉田 耕作, [1] *On vector lattice with a unit*, 學士院記事, **17** (昭 16), 121–124.

[2] *Vector lattices and additive set functions*, 同上, 228–232.

吉田耕作, 深宮政範, [1] *On vector lattice with a unit*, II, 同上, 479–482.