JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 17, NO. 3 MAR., 1954

Über die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *mit einem unbekannten Ideale* $\mathfrak{x}$

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen 31 Oktober, 1953)

Sei $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Ring, in dem die Existenz eines Einheitselementes nicht vorausgesetzt wird, und seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale aus $\mathfrak{R}$. Dann hat die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ mit einem unbekannten Ideale $\mathfrak{x}$ eine und nur eine grösste Lösung. In der vorliegenden Note möchte ich in die Auflösung dieser Gleichung tiefer eindringen und die Eigenschaften ihrer Lösung klar machen.

Zunächst zeigt es sich, dass die grösste Lösung von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$ übereinstimmt. Es gelingt dann, einen grundlegenden Satz für die Auflösung dieser Gleichung zu gewinnen, und aus diesem Resultat ergeben sich wichtige Folgerungen für die Zerlegung des Durchschnittes $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$.

Als ein spezieller Fall dieser Ergebnisse haben wir den folgenden interessanten Satz von Zariski:[1]

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale aus einem Noetherschen Ring mit Einheitselement, und sind $\mathfrak{q}_{k+1}, \mathfrak{q}_{k+2}, \cdots, \mathfrak{q}_m$ alle Primärkomponenten von $\mathfrak{b}$, für die $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{a})=(1)$, $(i=k+1, \cdots, m)$ gelten, so ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{q}_k].$$

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{R}$ einen Noetherschen Ring, in dem ein Einheitselement nicht notwendig existiert.

1. Vorbereitungen

Um leicht zu unserem Ziele zu gelangen, schicken wir den folgenden Satz voraus:

SATZ 1. *Gilt* $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b})=\mathfrak{c}$ *für irgend drei Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$, *so gibt es in* $\mathfrak{a}$ *ein Element* a *derart, dass für jedes Element* c *von* $\mathfrak{c}$ $ac\equiv c\ (\mathfrak{b})$ *ist.*[2]

Der Fall $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$ ist selbstverständlich. Es sei damit $\mathfrak{c}\supset\mathfrak{b}$. Ferner seien

(1) $$\mathfrak{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_m, \mathfrak{b}), \qquad \mathfrak{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Da nach der im Satz ausgesprochenen Voraussetzung

1) O. Zariski, Generalized semi-local rings, Summa Brasiliensis Mathematicae 1, 169-195 (1946).

2) Dieser Satz ist nur eine Umformung meines älteren Satzes. Siehe: S. Mori, Über Produktzerlegung der Ideale, Journ. Sci. Hiroshima Univ. 2, 1-19 (1932).

$$\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b})=(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c}, \mathfrak{b})=\cdots\cdots$$

ist, so erhalten wir

(2) $\qquad \mathfrak{c}=((a_1^t, a_2^t, \cdots, a_n^t)\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$ für jede positive ganze Zahl t,

und im Falle $t=1$ gilt

(3) $$c_i\equiv \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j \ (\mathfrak{b}) \ (i=1, 2, \cdots, m), \qquad a_{ij}\in \mathfrak{a}.$$

Bilden wir nun aus den Elementen a_{ij} eine Determinante $D=|x-a_{ij}x|=x^m-ax^m$, wo x ein beliebiges Element bedeutet, so ist a ein Element aus $\mathfrak{a}$ und aus (3) folgt

$$c_iD\equiv 0 \ (\mathfrak{b}) \ (i=1, 2, \cdots, m).$$

Setzen wir hier $x=a_j^s$, so haben wir

$$c_ia_j^{sm}\equiv c_iaa_j^{sm} \ (\mathfrak{b}) \ (i=1, 2, \cdots, m, \ j=1, 2, \cdots, n).$$

Im Hinblick auf (2) besteht damit $ca\equiv c$ $(\mathfrak{b})$ für alle Elemente c aus $\mathfrak{c}$.

Gibt es für zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{R}$ ein Ideal $\mathfrak{x}_1$ derart, dass $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}_1$ ist, und gilt auch $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_2, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}_2$ für ein anderes Ideal $\mathfrak{x}_2$, so erhalten wir

$$(\mathfrak{a}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2), \mathfrak{b})=(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2).$$

Wegen des Teilerkettensatzes haben wir damit ein nud nur ein grösstes Ideal $\mathfrak{x}_0$, für welches $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}_0$ gilt. Wir nennen das Ideal $\mathfrak{x}_0$ die *grösste Lösung von* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$.

Nach dieser Definition haben wir den folgenden Satz:

SATZ 2. *Die grösste Lösung* $\mathfrak{x}_0$ *von* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *stimmt mit dem Durchschnitt* $\mathfrak{d}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$ *überein.*

Im Noetherschen Ringe $\mathfrak{R}$ haben wir die Zerlegung

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{d}, \mathfrak{b})=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n].$$

Dabei ist $\mathfrak{q}_i$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal. Wenn $\mathfrak{a}\nsubseteq\mathfrak{p}_i$ ist, so folgt daraus $\mathfrak{d}\subseteq\mathfrak{q}_i$, und wenn $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_j$ ist, so gilt $\mathfrak{a}^{m_j}\subseteq\mathfrak{q}_j$ für eine passend grosse ganze Zahl m_j. Da aber $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{q}_j$ ist, so folgt daraus $(\mathfrak{a}^{m_j}, \mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{q}_j$ und folglich $\mathfrak{d}\subseteq\mathfrak{q}_j$. Fassen wir die beiden Fälle zusammen, ergibt sich $(\mathfrak{a}\mathfrak{d}, \mathfrak{b})=\mathfrak{d}$. Damit erhalten wir $\mathfrak{d}\subseteq\mathfrak{x}_0$.

Ist x_0 ein Element aus $\mathfrak{x}_0$, so besteht nach Satz 1

$$ax_0\equiv x_0 \ (\mathfrak{b}), \qquad a\in\mathfrak{a}.$$

Daraus folgt $x_0\equiv a^nx_0$ $(\mathfrak{b})$ und ferner $x_0\in(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$. Da das zuletzt gewonnene Ergebnis für jedes n besteht, so haben wir $x_0\in\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{x}_0\subseteq\mathfrak{d}$. Im Hinblick auf das obig gewonnenen Resultat ergibt sich danach $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{d}$.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch einen Satz als ein Kriterium für $\mathfrak{b}=\mathfrak{x}_0$ beweisen.

---

3) Dieser Satz ist in Satz 5 enthalten.

Satz 3. ***Es seien*** $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m$ ***die zum Ideale*** $\mathfrak{b}$ ***gehörigen Primideale, welche von*** $\mathfrak{R}$ ***verschieden sind, und sei*** $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{R}$. ***Die grösste Lösung*** $\mathfrak{x}_0$ ***von*** $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ ***ist dann und nur dann von*** $\mathfrak{b}$ ***verschieden, wenn für mindestens eins, etwa*** $\mathfrak{p}_1$, ***aus*** $\mathfrak{p}_i (i=1, 2, \cdots, m)$ ***gilt*** $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$.[3]

Es sei $\mathfrak{x}_0 \supset \mathfrak{b}$. Nach Satz 1 können wir in $\mathfrak{a}$ ein Element a finden, so dass für jedes Element x_0 aus $\mathfrak{x}_0$

$$ax_0 \equiv x_0 \quad (\mathfrak{b}) \tag{1}$$

ist. Daraus folgt

$$(a^2-a)x_0 \equiv 0 \quad (\mathfrak{b}) . \tag{2}$$

Nach unserer Annahme können wir hierbei $x_0 \notin \mathfrak{b}$ setzen.

Es sei nud $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ eine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{b}$ durch Primärideale. Wenn $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{b}$ gehört, so folgt aus (1) $x_0 \equiv 0\ (\mathfrak{q}_n)$ für das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}_n$. Für die nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Primärideale sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $a \in \mathfrak{p}_i$ oder nicht. Im ersten Fall ist nach (1) $x_0 \in \mathfrak{q}_i$. Im zweiten Fall sei $(a, \mathfrak{p}_i) \neq \mathfrak{R}$. Dann ist $r-ra \notin \mathfrak{p}_i$ für ein Element r ausserhalb von $(a, \mathfrak{p}_i)$. Hiermit folgt aus (1) auch $x_0 \in \mathfrak{q}_i$. Durch die Ergebnisse können wir beweisen, dass für mindestens eins, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_i (i=1, 2, \cdots, m)$, welche von $\mathfrak{R}$ verschieden sind, $(a, \mathfrak{p}_1) =\mathfrak{R}$ und $x_0 \notin \mathfrak{q}_1$ sein soll. Sonst würde $x_0 \in \mathfrak{q}_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$, also $x_0 \in \mathfrak{b}$ im Widerspruch dazu stehen, dass $x_0 \notin \mathfrak{b}$ ist.

Jetzt müssen wir $(a\mathfrak{R}, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$ nach $(a, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$ und $x_0 \notin \mathfrak{q}_1$ beweisen. Wegen $x_0 \notin \mathfrak{q}_1$ folgt aus (2) $a^2-a \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$, $(a, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$, und daher $ar \equiv r\ (\mathfrak{p}_1)$ für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$. Also haben wir $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$.

Umgekehrt sei $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$ für ein zu $\mathfrak{b}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}_1$, das von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Dann gibt in $\mathfrak{a}$ nach Satz 1 ein Element a derart, dass

$$a \notin \mathfrak{p}_1, \qquad a^2-a \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1), \qquad (a, \mathfrak{p}_1)=\mathfrak{R}$$

ist. Andererseits ist aber $\mathfrak{r}=\mathfrak{b}:\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{b}$, da $\mathfrak{p}_1$ zu $\mathfrak{b}$ gehört. Daher darf ein Element r angenommen werden, sodass $r \in \mathfrak{r}$, $r \notin \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{b}:(r)$ ist. Aus $a^2-a \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ folgt damit

$$(a^2-a)r \equiv 0 \quad (\mathfrak{b}) .$$

Dabei ist aber $ar \notin \mathfrak{b}$ nach $a \notin \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{b}:(r)$. Mit Rücksicht auf diese Ergebnisse kommen wir also zu

$$ar \equiv a \cdot ar\ (\mathfrak{b}), \qquad ar \notin \mathfrak{b}, \qquad \text{oder} \qquad (\mathfrak{a}(ar), \mathfrak{b})=(ar, \mathfrak{b}) .$$

Hieraus ergibt sich, dass die grösste Lösung $\mathfrak{x}_0$ von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ das Element $ar \notin \mathfrak{b}$ enthält.

2. Auflösung der Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$

Es soll nun die Methode zur Lösung der Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ näher erörtert werden. Dazu sind noch einige weitere Hilfssätze erforderlich.

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal und ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist die grösste Lösung von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q})=\mathfrak{x}$ gleich $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{q}$, je nachdem $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p})=\mathfrak{R}$ ist, oder nicht. Wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{R}$ ist, so ist die grösste Lösung gleich $\mathfrak{q}$.*

Ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p})=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{R}$, so erhalten wir nach Satz 1

$$a \in \mathfrak{a}\,, \qquad a^3-a\equiv 0\;(\mathfrak{p})\,, \qquad (a, \mathfrak{p})=\mathfrak{R}\,.$$

Da $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}$ gehört, so muss $\mathfrak{p}^k\subseteqq\mathfrak{q}$ und folglich

$$(a^3-a)^k \in \mathfrak{q}\,, \qquad a^k\equiv a^{k+1}a_1\equiv a^{2k}a_2\;(\mathfrak{q})$$

sein. Setzen wir $a^k a_2=a_0$, so besteht danach

$$a_0\equiv a_0^2\;(\mathfrak{q})\,, \qquad a_0 \in \mathfrak{a}\,, \qquad a_0 \notin \mathfrak{p}\,.$$

Für jedes Element r gilt also $a_0 r\equiv r\;(\mathfrak{q})$ und daraus folgt

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q})=\mathfrak{R}\,.$$

Ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{R}$, so soll $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{R}$ und $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{R}$ sein. Daher soll die grösste Lösung $\mathfrak{x}_0$ ungleich $\mathfrak{R}$ sein. Da für $\mathfrak{x}_0$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0, \mathfrak{q})=\mathfrak{x}_0$ gilt, so soll $ax_0\equiv x_0\;(\mathfrak{q})$ für jedes Element x_0 aus $\mathfrak{x}_0$ sein. Dabei bedeutet a ein Element aus $\mathfrak{a}$. Wenn $a \in \mathfrak{p}$ ist, so folgt aus $ax_0\equiv x_0\;(\mathfrak{q})$ leicht $x_0 \in \mathfrak{q}$. Wäre $a \notin \mathfrak{p}$, $a^2-a \in \mathfrak{p}$, so ergäbe sich ein Widerspruch $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p})=\mathfrak{R}$. Wenn $a \notin \mathfrak{p}$ ist, so soll danach $a^2-a \notin \mathfrak{p}$ und folglich $x_0 \in \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{q}$ sein.

Endlich sei $\mathfrak{p}=\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{R}$. Dann soll $\mathfrak{R}^k\subseteqq\mathfrak{q}\subset\mathfrak{R}$ sein. Hiernach ist wegen Satz 1 die grösste Lösung x_0 gleich $\mathfrak{q}$; denn für jedes Element x_0 aus $\mathfrak{x}_0$ ist $ax_0\equiv x_0\;(\mathfrak{q})$, $a \in \mathfrak{a}$, und folglich $x_0\equiv a^k x_0\equiv 0\;(\mathfrak{q})$.

Hilfssatz 2. *Sind $\mathfrak{b}_i (i=1, 2, \cdots, n)$ beliebige Ideale, und ist $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b}_1)=(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b}_2)=\cdots=(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b}_n)=\mathfrak{R}$, so gilt auch $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{b})=\mathfrak{R}$ für $\mathfrak{b}=[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_n]$.*

Nach Satz 1 können die Elemente $a_i\;(i=1, 2, \cdots, n)$ aus $\mathfrak{a}$ herausgezogen werden, derart, dass für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$

$$(1) \qquad a_1 r\equiv r\;(\mathfrak{b}_1),\; a_2 r\equiv r\;(\mathfrak{b}_2),\; \cdots\cdots,\; a_n r\equiv r\;(\mathfrak{b}_n)$$

gilt. Es besteht demnach die Gleichung:

$$(2) \qquad \mathfrak{R}=(a_1, \mathfrak{b}_1)=(a_2, \mathfrak{b}_2)=\cdots\cdots=(a_n, \mathfrak{b}_n)\,.$$

Daher folgt

$$\mathfrak{R}=(a_1, b_{11}, \cdots, b_{1m_1}, \mathfrak{b})=(a_2, b_{21}, \cdots, b_{2m_2}\mathfrak{b})=\cdots\cdots=(a_n, b_{n1}, \cdots, b_{nm_n}, \mathfrak{b})$$

mit $b_{ij} \in \mathfrak{b}_i\;(i=1, 2, \cdots, n)$. Für das Produkt

$$\mathfrak{R}^2=(a_1, b_{11}, \cdots, b_{1m_1}, \mathfrak{b})(a_2, b_{21}, \cdots, b_{2m_2}, \mathfrak{b})$$

findet sich

$$b_{1i}b_{2j} \in \mathfrak{d}_{12} = [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2].$$

Für die Gleichung $a_1b_{2j} - b_{2j} = b_1$, welche aus (1) ohne weiteres besteht, ist links ein Element aus $\mathfrak{b}_2$ und rechts ein Element aus $\mathfrak{b}_1$ und folglich

$$(3) \qquad a_1b_{2j} - b_{2j} \in \mathfrak{d}_{12}, \qquad b_{2j} \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12}), \qquad \mathfrak{b}_2 \subseteqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12}).$$

In gleicher Weise haben wir auch

$$a_2b_{1j} - b_{1j} \in \mathfrak{d}_{12}, \qquad b_{1j} \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12}), \qquad \mathfrak{b}_1 \subseteqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12}).$$

Ferner gilt

$$a_1a_2 = a_2 + b_1, \qquad b_1 \in \mathfrak{b}_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n_1}, \mathfrak{b}) = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n_1}, \mathfrak{d}_{12}).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{d}_{12}) &= (a_2 + b_1, b_{21}, \cdots, b_{2n_2}, b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n_1}, \mathfrak{d}_{12}) \\ &= (a_2, b_{21}, \cdots, b_{2n_2}, b_{11}, \cdots, b_{1n_1}, \mathfrak{d}_{12}) \\ &= (a_2, b_{11}, \cdots, b_{1n_1}, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{R},\end{aligned}$$

woraus sich nach (3) leicht ergibt

$$(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{d}_{12}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12}) = \mathfrak{R}.$$

Damit erhalten wir $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}_{12}) = \mathfrak{R}$. Jetzt können wir an $(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}_{12})$ und $(a_3, \mathfrak{b}_3)$ genau dieselbe Schlussweise anknüpfen und gelangen wieder zu

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}_{123}) = \mathfrak{R}, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{d}_{123} = [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3] \quad \text{ist.}$$

Da die Anzahl von $\mathfrak{b}_i$ endlich ist, so kommt dieser Prozess der Bildung von $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}_{12\cdots i}) = \mathfrak{R}$ zum Abschluss und zwar erhalten wir endlich $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{R}$.

Es gilt nun

SATZ 4. *Es sei* $\mathfrak{b} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ *die unverkürzbare Darstellung von* $\mathfrak{b}$ *durch Primärideale und sei* $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *die grösste Lösung von* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{x}$. *Dann ist die grösste Lösung* $\mathfrak{x}_0$ *von* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{x}$ *gleich dem Durchschnitt* $[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_n]$.

Zum Beweise sei

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_1) \neq \mathfrak{R}, \ (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_2) \neq \mathfrak{R}, \cdots, (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_k) \neq \mathfrak{R}, \ (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_{k+1}) = \mathfrak{R}, \cdots, (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_n) = \mathfrak{R}.$$

Dabei ist nach Hilfssatz 1 $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{q}_i$ zu $\mathfrak{R}$ gehört.

Setzen wir $\mathfrak{d}_{k+1} = [\mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n]$, so wird nach Hilfssatz 2 $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}_{k+1}) = \mathfrak{R}$. Für $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_j) \neq \mathfrak{R}$ gilt nach Hilfssatz 1, dass die grösste Lösung $\mathfrak{x}_j$ von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{q}_j) = \mathfrak{x}$ gleich $\mathfrak{q}_j$ ist.

Es sei x ein beliebiges Element aus

$$[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_n] = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_k, \mathfrak{R}, \cdots, \mathfrak{R}] = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_k] = \mathfrak{d}_k.$$

Dann besteht

$$ax \equiv x \, (\mathfrak{d}_{k+1}), \qquad x \equiv 0 \, (\mathfrak{d}_k),$$

wobei a ein Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet. Daraus folgt $ax-x\equiv 0\,(\mathfrak{d}_{k+1})$ und zugleich $ax-x\equiv 0\,(\mathfrak{d}_k)$. Also ist $ax\equiv x\,(\mathfrak{b})$. Damit wird $(\mathfrak{a}(x), \mathfrak{b})=((x), \mathfrak{b})$ und hiaraus erhalten wir $x \in \mathfrak{x}_0$ und $[\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_n] \leqq \mathfrak{x}_0$.

Umgekehrt können wir leicht einsehen, dass $\mathfrak{x}_0 \leqq [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_n]$ ist. Damit ist unserer Satz bewiesen.

Nach der Umformung von Satz 4 gilt nun der folgende Satz, der den Satz von Zariski als einen speziellen Fall enthält.

SATZ 5. *Es sei* $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ *eine unverkürzbare Darstellung von* $\mathfrak{b}$ *durch Primärideale und seien*

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_1) \neq \mathfrak{R}, \cdots, (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_k) \neq \mathfrak{R}, (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_{k+1})=\mathfrak{R}, \cdots, (\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_n)=\mathfrak{R}$$

für ein Ideal $\mathfrak{a}$. *Dann ist die grösste Lösung* $\mathfrak{x}_0$ *der Gleichung* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *gleich* $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_k]$.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch einen Satz für die Struktur der grössten Lösung beweisen:

SATZ 6. *In der Darstellung* $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ *sei* $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{R}\,(i=1, 2, \cdots, k)$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_j)=\mathfrak{R}(j=k+1, \cdots, n)$ *und* $\mathfrak{d}_{k+1}=[\mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n]$. *Dann ist* $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d}_{k+1})=\mathfrak{R}$ *und* $a^2\equiv a\,(\mathfrak{d}_{k+1})$ *für ein Element* a *aus* $\mathfrak{a}$. *Ferner ist die grösste Lösung* $\mathfrak{x}_0$ *von der Gleichung* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *gleich der Gesamtheit aller Elemente* x, *für welche* $ax\equiv x\,(\mathfrak{b})$ *gilt.*

Der erste Teil des Satzes folgt einfach aus Hilfssatz 2 und Satz 1.

Zum Beweis des zweiten Teils sei $ax\equiv x\,(\mathfrak{b})$. Dann ist $(\mathfrak{a}(x), \mathfrak{b})=((x), \mathfrak{b})$ und folglich $(x) \leqq x_0$. Da nach Satz 5 $\mathfrak{x}_0=[\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k]$ ist, so ergibt sich $(a^2-a)x_0\equiv 0\,(\mathfrak{b})$ für jedes Element x_0 aus $\mathfrak{x}_0$. Wegen $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_j)=\mathfrak{R}\,(j=k+1, \cdots, n)$ ist also $a \notin \mathfrak{p}_j (\neq \mathfrak{R})$ $(j=k+1, \cdots, n)$, wobei $\mathfrak{p}_j$ das zu $\mathfrak{q}_j$ gehörige Primideal bedeutet. Folglich ist $ax_0\equiv x_0$ $(\mathfrak{d}_{k+1})$. Andererseits ist aber $ax_0\equiv x_0\,([\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k])$. Daraus erhalten wir $ax_0\equiv x_0\,(\mathfrak{b})$, womit unser Satz bewiesen ist.

3. Beziehungen zwischen dem isolierten Komponentenideal von $\mathfrak{b}$ und der grössten Lösung von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$

Es sei $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ eine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{b}$ durch Primärideale und $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal. Ist dabei $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{p}_j \supset \mathfrak{p}_i$ und $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_i)=\mathfrak{R}$, so erhalten wir nach Hilfssatz 1 auch $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{p}_j)=\mathfrak{R}$. Gehört $\mathfrak{q}_1$ zu $\mathfrak{R}$, so wird $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_1) \neq \mathfrak{R}$. Andererseits gehört $\mathfrak{R}$ dann und nur dann zu $\mathfrak{b}$, wenn es ein Annihilator von $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathfrak{b}$ gibt.

Daraus ergibt sich wegen Satz 5 der folgende Satz:

SATZ 7. *Wenn es keinen Annihilator von* $\mathfrak{R}$ *in Bezug auf* $\mathfrak{b}$ *gibt, so ist die grösste Lösung* $\mathfrak{x}_0$ *von* $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *ein isoliertes Komponentenideal von* $\mathfrak{b}$. *Im anderen Fall ist* $\mathfrak{x}_0$ *gleich dem Durchschnitt von einem isolierten Komponentenideal von* $\mathfrak{b}$ *und* $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{b})$. *Dabei ist* n *derart eine ganze Zahl, dass* $\mathfrak{b}:\mathfrak{R}^n=\mathfrak{b}:\mathfrak{R}^{n+1}$ *ist.*

Wenn umgekehrt ein isoliertes Komponentenideal $\mathfrak{i}$ von $\mathfrak{b}$ gegeben ist, und wenn $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{b})$ durch die zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ teilbar ist, so stellt sich die Frage, ob ein Ideal $\mathfrak{a}$ existiert, sodass $(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{b}) \frown \mathfrak{i} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$ oder $\mathfrak{i} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$ ist, je nachdem $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{b}$ gehört, oder nicht. Diese Frage wird auf die Struktur des Ringes $\mathfrak{R}$ zurückgefürt, und die Existenz vom gewünschten Ideal $\mathfrak{a}$ ist nicht immer bejahten.

Zur Antwort des Problemes fügen wir nur einen trivialen Satz hinzu, und die weiter eindringende Beantwortung ist Aufgabe der Zukunft.

SATZ 8. *Es sei* $\mathfrak{b}=[\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n]$ *und* $\mathfrak{i}=[\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_k]$ *ein isoliertes Komponentenideal von* $\mathfrak{b}$. *Ferner sei*

$$\mathfrak{d}=[\mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_{n-1}] \qquad \textit{oder} \qquad \mathfrak{d}=[\mathfrak{q}_{k+1}, \cdots, \mathfrak{q}_{n-1}, \mathfrak{q}_n],$$

je nachdem $\mathfrak{R}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *gehört, oder nicht. Dann erfüllt das Ideal* $\mathfrak{a}$ *die Beziehung*

$$\mathfrak{i} \frown \mathfrak{q}_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^m, \mathfrak{b}) \qquad \textit{oder} \qquad \mathfrak{i} = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$$

dann und nur dann, wenn für $\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{d})=\mathfrak{R}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{R}, \mathfrak{q}_i) \neq \mathfrak{R}$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ *gilt.*