JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A. VOL. 18, No. 2, DECEMBER, 1954

Über das Produkt von Primäridealen im Unendlichen Algebraischen Zahlkörper

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30, Juni 1954)

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$[1] gehörigen Primärideale auf idealtheoretischem Grund in folgende vier Arten einteilen:[2]

(i) Primärideal *erster Art* heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ sind,

(ii) Primärideal *zweiter Art* heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ sind,

(iii) Primärideal *dritter Art* heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ sind,

(iv) Primärideal *vierter Art* heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ sind.

Der erste Fall entsteht dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, und die anderen Fälle können geschehen, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist.

Vor kurzem habe ich gezeigt, dass die Beziehungen zwischen zwei zu demselben idempotenten Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale durch die folgenden Multiplikationsregeln dargestellt werden:

(1) *2 te Art* $\times$ *2 te Art* = *2 te Art*, (4) *4 te Art* $\times$ *2 te Art* = *4 te Art*,

(2) *3 te Art* $\times$ *2 te Art* = *3 te Art*, (5) *4 te Art* $\times$ *3 te Art* = *4 te Art*,

(3) *3 te Art* $\times$ *3 te Art* = *3 te Art*, (6) *4 te Art* $\times$ *4 te Art* = *3 te oder 4 te Art.*

Damals habe ich (1), (2) und (3) bewiesen, aber nicht (4), (5) und (6) beweisen können. In dieser Note möchte ich (4), (5) und (6) beweisen, und noch einfache neue Beweise zu (1), (2) und (3) hinzufügen.

§ 1. Vorbereitende Untersuchungen

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen unendlichen algebraischen Zahlkörper, welcher

1) Im folgenden verstehen wir unter Primideal $\mathfrak{p}$ stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

2) N. Nakano; „Über die Einteilung von Primäridealen im unendlichen algebraishen Zahlkörper," Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 3, 1954, zitiert mit „Nakano".

als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_3 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \cdots\cdots$ definiert wird, wobei jedes $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper $\mathfrak{K}_0$ ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K} = \{\cdots\cdots, \mathfrak{K}_\nu, \mathfrak{K}_{\nu+1}, \cdots\cdots, \mathfrak{K}_\lambda, \cdots\cdots\}$. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$ und ist $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ resp. ein Primideal in $\mathfrak{O}$, ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so bezeichnen wir $\mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$ und $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Dann können wir leicht die folgenden Hilfssätze 1, 2, 3, und 4 beweisen.

Hilfssatz 1.[3] *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und setzen wir*

$$\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}} \mathfrak{a}_{\nu+1}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{a}_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}, \quad \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \mathfrak{a}_\lambda, \quad (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{a}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda, \quad \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so ist $(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

Hilfssatz 2.[4] *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist der Idealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ dann und nur dann ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$, wenn für hinreichend grosses N immer*

$$(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1, \quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist. Mit anderen Worten ist $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ dann und nur dann gleich $\mathfrak{q}$, wenn wir für hinreichend grosses N mindestens ein λ so wählen können, dass $(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e_\lambda - 1$ $(\lambda > \nu \geqq N)$ ist.

Hilfssatz 3.[5] *Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist $\mathfrak{q}$ dann und nur dann ein echter Teiler von $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$, wenn für hinreichend grosses N immer*

$$e_\lambda = e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda, \quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist. Mit anderen Worten ist $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ dann und nur dann gleich $\mathfrak{q}$, wenn wir für hinreichend grosses N mindestens ein λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ so wählen können, dass $e_\lambda < e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda$ ist.

Hilfssatz 4.[6] *Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, $\nu \geqq N$, so ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu + e''_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1} + e''_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda + e''_\lambda}, \cdots\cdots\}$ gleich $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.*

3) „Nakano", Hilfssatz 1, s. 323.
4) „Nakano", Satz 1, s. 323 und Satz 2, s. 324.
5) „Nakano", Satz 3, s. 324. und Satz 4, s. 325.
6) „Nakano", Hilfssatz 5, s. 331.

Jetzt wollen wir für späteren Gebrauch noch zwei Hilfssätze hinzufügen.

Hilfssatz 5. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und bezeichen wir* $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, *so ist* $e'_\lambda + e''_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$ *für hinreichend grosses* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

Aus Hilfssatz 4 ergibt sich $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \{\cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu + e''_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1} + e''_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda + e''_\lambda}, \cdots\}$. Es sei nun α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} (= \mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu)$ teilbares Element, so ist $\alpha \in \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Daher ist

$$\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda + e''_\lambda} \text{ für hinreichend grosses } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{1}$$

Da wir aber folgendes festlegen können:

$$\alpha = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{c}_\nu, \ (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu, \text{ folglich } \alpha = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \mathfrak{c}_\lambda, \ (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda,$$

so ist α genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}$ teilbar. Danach ist infolge von (1)

$$\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda + e''_\lambda} \supseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}, \text{ d. h. } \ e'_\lambda + e''_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda.$$

Hilfssatz 6. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und setzen wir* $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, *so ist*

$$e_\nu = e'_\nu + e''_\nu \ \textit{oder} \ e_\nu = e'_\nu + e''_\nu - 1 \ \textit{für alle} \ \nu \ (\nu \geqq N).$$

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich

$$(e'_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda - 1,$$

$$(e''_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e''_\lambda - 1,$$

also ist
$$(e'_\nu + e''_\nu - 2) h_{\nu+1} \ h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda + e''_\lambda - 2 < e'_\lambda + e''_\lambda. \tag{2}$$

Da aber nach Hilfssatz 5

$$e'_\lambda + e''_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \text{ für hinreichend grosses } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N) \tag{3}$$

ist, folgt aus (2) und (3)

$$(e'_\nu + e''_\nu - 2) \ h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda, \text{ d.h. } e'_\nu + e''_\nu - 2 < e_\nu.$$

Ferner ist klar, dass $e_\nu \leqq e'_\nu + e''_\nu$ ist. Hiermit erhalten wir

$$e'_\nu + e''_\nu - 2 < e_\nu \leqq e'_\nu + e''_\nu, \text{ d. h. } e_\nu = e'_\nu + e_\nu \text{ oder } e_\nu = e'_\nu + e''_\nu - 1.$$

Mit Hilfe dieser Hilfssätze gewinnen wir nun zwei einfache aber wichtige Sätze 1 und 2.

Satz 1. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}'$ *von zweiter Art, aber ist* $\mathfrak{q}''$ *von zweiter, dritter, oder vierter Art und setzen wir* $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, *so gilt* $e_\nu = e'_\nu + e''_\nu$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.

Aus Hilfssatz 5 ergibt sich

$$e'_\lambda + e''_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \text{ für hinreichend grosses } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{4}$$

Da $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art ist, erhalten wir $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, folglich nach Hilfssatz 3

$$e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e'_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{5}$$

Ausserdem ist nach Hilfssatz 1

$$(e''_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e''_\lambda - 1 \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{6}$$

Infolge von (5) und (6) wird

$$(e'_\nu + e''_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda + e''_\lambda - 1 < e'_\lambda + e''_\lambda \tag{7}$$

Aus (4) und (7) folgt $e'_\nu + e''_\nu - 1 < e_\nu$. Daraus folgt $e_\nu = e_\nu + e''_\nu$ für alle $\nu \ (\nu \geqq N)$, wegen $e_\nu \leqq e'_\nu + e''_\nu$.

Satz 2. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}'$ *von dritter Art, aber ist* $\mathfrak{q}''$ *von dritter oder vierter Art und setzen wir*

$$\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu{}^{e'_\nu}, \ \mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu{}^{e''_\nu} \ \textit{und} \ \mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu},$$

so gilt $e_\nu = e'_\nu + e''_\nu - 1$ *für alle* $\nu \ (\nu \geqq N)$.

Nehmen wir jetzt an, dass e_μ gleich $e'_\mu + e''_\mu$ für mindestens einen Index $\mu \ (\mu \geqq \nu \geqq N)$ ist. Dann gilt

$$(e'_\mu + e''_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda = (e_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \mu).$$

Da aber nach Hilfssatz 1 $(e_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e_\lambda - 1$ ist, erhalten wir

$$(e'_\mu + e''_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e_\lambda - 1.$$

Dann folgt aus $e_\lambda \leqq e'_\lambda + e''_\lambda$

$$(e'_\mu + e''_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda + e''_\lambda - 1. \tag{8}$$

Andererseits ist $\mathfrak{q}'$ von dritter Art, folglich $\mathfrak{q}' : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$. Dies ergibt nach Hilfssatz 2

$$(e'_\mu - 1) h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e'_\lambda - 1. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt $e''_\mu h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots h_\lambda \leqq e''_\lambda$. Da aber klar ist, dass $e''_\mu h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots h_\lambda \geqq e''_\lambda$ ist, erhalten wir $e''_\mu h_{\mu+1} h_{\mu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e''_\lambda$ für alle $\lambda \ (\lambda > \mu)$, also ist nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{q}''\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}''$. Weil $\mathfrak{q}''$ von dritter oder vierter Art ist, muss $\mathfrak{q}''\mathfrak{p} = \mathfrak{q}''$ sein. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis unseres Satzes abgeschlossen.

Aus Sätze 1 und 2 ergibt sich sofort der folgende

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal von zweiter Art, und setzen wir* $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu{}^{e_\nu}$, *so ist* $\mathfrak{q}^n \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu{}^{ne_\nu}$ *für alle n. Dagegen, ist* $\mathfrak{q}$ *von dritter Art, so ist* $\mathfrak{q}^n \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu{}^{ne_\nu - (n-1)}$ *für alle n.*

Zum Schlusse erhebt sich die Frage: Wenn $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von vierter Art sind, auf welche Weise e', e'' und e miteinander verbunden sind. Betreffs dieser Frage können wir einen Satz beweisen.

Satz 4. *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale von vierter Art und ist das Produkt* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *von dritter Art,*[7] *so ist* $e'_\nu + e''_\nu = e_\nu$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$, *wobei* $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *sind.*

Nach Voraussetzung erhalten wir $\mathfrak{q}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}'' : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}''$, also sind für hinreichend grosses λ $(\lambda > \nu \geqq N)$

$$(e'_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e'_\lambda - 1,$$

$$(e''_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e''_\lambda - 1.$$

Daraus ergibt sich

$$(e'_\nu + e''_\nu - 2) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e'_\lambda + e''_\lambda - 2. \tag{10}$$

Ferner erhalten wir $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, weil $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art ist. Folglich ist

$$(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1. \tag{11}$$

Aber nach Hilfssatz 6 ist $e'_\lambda + e''_\lambda - 2 \leqq e_\lambda - 1$, dann gilt

$$(e'_\nu + e''_\nu - 2) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e'_\lambda + e''_\lambda - 2 \leqq e_\lambda - 1 = (e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$$

$$\text{d.h.} \qquad e'_\nu + e''_\nu - 2 < e_\nu - 1.$$

Danach muss nach Hilfssatz 6 $e'_\nu + e''_\nu = e_\nu$ für alle ν $(\nu \geqq N)$ sein.

§ 2. Nachweise der Hauptsätze

Gegründet auf dem Gedankengang in § 1 wollen wir nacheinander die Mutiplikationsregeln über das Produkt von zwei zu demselben idempotenten Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealen beweisen.

Satz 5.[8] *Sind* $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale von zweiter Art, so ist* $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *von zweiter Art.*

Setzen wir $\mathfrak{q}' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ und $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, dann folgt aus $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}''$ und Hilfssatz 3

$$e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e'_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N), \tag{12}$$

$$e''_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda = e''_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{13}$$

Also wird $(e'_\nu + e''_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda + e''_\lambda$. Da aber nach Satz 1 $e'_\nu + e''_\nu = e_\nu$ und $e'_\lambda + e''_\lambda = e_\lambda$ sind, ist $e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

---

7) Uber die Tatsache, dass dieser Fall in der Tat eintreten kann, siehe Satz 10 dieser Note, oder Fussnote von „Nakano" s. 322.

8) Vgl. „Nakano", Satz 11, s. 332.

Daher muss nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ sein. Andererseits folgt aus $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}''$ sofort

$$(e''_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e''_\lambda - 1 \text{ für mindestens ein } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{14}$$

Aus (12) und (14) egibt sich

$$(e'_\nu + e''_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e'_\lambda + e''_\lambda - 1,$$

und daraus können wir ebenso wie oben schliessen:

$$(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda - 1,$$

folglich $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Also muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von zweiter Art sein.

Satz 6.[9] *Ist $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ resp. ein zu demselbem $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal zweiter Art und dritter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art.*

Gleicher weise wie beim Beweise von Satz 5 nach den Hilfssätzen 2, 3 und

aus $\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ folgt $e''_\lambda < e''_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda > \nu \geqq N)$, (15)

aus $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ folgt $e'_\lambda = e'_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$, (16)

und aus $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}''$ folgt $e_\lambda - 1 = (e''_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$. (17)

(15) und (16) haben zur Folge, dass $e'_\lambda + e''_\lambda < (e'_\nu + e''_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ ist. Also ist nach Satz 1

$$e_\lambda < e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda \text{ für mindestens ein } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N), \text{ d. h. } \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}.$$

Andererseits wird nach (16) und (17)

$$e'_\lambda + e''_\lambda - 1 = (e'_\nu + e''_\nu - 1)\, h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$$

d.h. $$e_\lambda - 1 = (e_\nu - 1)\, h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda \text{ für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Darauf erhalten wir $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Also muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art sein.

Satz 7.[10] *Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von dritter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art.*

Zuerst erhalten wir nach Hilfssatz 2

aus $\mathfrak{q}':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$, $(e'_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e'_\lambda - 1$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$,

und aus $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}''$, $(e''_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e''_\lambda - 1$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

Daraus folgt $(e'_\nu + e''_\nu - 2)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e'_\lambda + e''_\lambda - 2$. Da aber nach Satz 2 $e'_\nu + e''_\nu -$

9) Vgl. „Nakano", Satz 17, s. 335.
10) Vgl. „Nakano", Satz 18, s. 336.

$1=e_\nu$ und $e'_\lambda+e''_\lambda-1=e_\lambda$ sind, erhalten wir $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-1$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, woraus $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ sofort folgt. Ferner ist klar dass $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}''\mathfrak{p})=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Damit muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art sein.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{q}', \mathfrak{q}''$ resp. ein zu demselbem $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von vierter Art, und zweiter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von vierter Art.*

Aus $\mathfrak{q}'=\mathfrak{q}':\mathfrak{p}$ folgt $e'_\lambda-1>(e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, und aus $\mathfrak{q}''\neq\mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ folgt $e''_\lambda=e''_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Also erhalten wir

$$e'_\lambda+e''_\lambda-1>(e'_\nu+e''_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda,$$

folglich ist nach Satz 1 $e_\lambda-1>(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, und daraus ergibt sich $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Weiter ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}''(\mathfrak{q}'\mathfrak{p})=\mathfrak{q}''\mathfrak{q}'$, somit muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von vierter Art sein.

Satz 9. *Ist $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ resp. ein zu demselbem $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von vierter Art, und dritter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von vierter Art.*

Aus $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'$ folgt $(e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e'_\lambda-1$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, und aus $\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}''$ folgt $(e''_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e''_\lambda-1$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Danach ist $(e'_\nu+e''_\nu-2)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e'_\lambda+e''_\lambda-2$. Folglich nach Satz 2 erhalten wir $(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-1$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, d. h. $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$. Andererseits ist klar, dass $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}''\mathfrak{p})=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Also muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von vierter Art sein.

Satz 10. *Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von vierter Art, so ist $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter oder vierter Art.*

Wegen $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}''\mathfrak{p})=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ kann es keinesweg geschehen, dass $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von zweiter Art ist. Also muss $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter oder vierter Art sein. Jetzt werden wir durch Beispiele zeigen, dass diese beide Fälle wirklich vorkommen können.

Zunächst sei $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von vierter Art, welcher Wert[11] eine rationale Zahl ist[12], so gibt es eine minimale natürliche Zahl n $(n\geqq 2)$ derart, dass $\mathfrak{q}^n:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^n$ ist.[13] Weiter ist klar, dass $\mathfrak{q}^n\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^n$ ist. Folglich ist $\mathfrak{q}^n$ von dritter Art. Setzen wir dabei $\mathfrak{q}^s=\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}^t=\mathfrak{q}''$, wo $1\leqq s, t\leqq n-1$ und $s+t=n$ sind, so ist das Produkt $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ von dritter Art, doch $\mathfrak{q}'$ bzw. $\mathfrak{q}''$ von vierter Art.

Zweitens sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ von vierter Art und ist der Wert von $\mathfrak{q}'$ bzw. $\mathfrak{q}''$ eine

---

11) Vgl. "Nakano", s. 325, Die Definition des Wertes von $\mathfrak{q}$ in Bezug auf das Primideal $\mathfrak{p}$.

12) Vgl. "Nakano", s. 340, Beispiel (i) von Primärideal von vierter Art.

13) "Nakano", Satz 26, s. 342.

14) Vgl. "Nakano", s. 341, Beispiel (ii) von Primärideal von vierter Art.

15) Vgl. "Nakano", s. 342, Hilfssatz 7. Der Wert des Produktes zweier zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ ist gleich der Summe der Werte der Faktoren.

16) "Nakano", Satz 23, s. 338.

rationale Zahl bzw. eine irrationale Zahl[14], so ist der Wert[15] von $q'q''$ eine irrationale Zahl. Daher ist $q'q''$ von vierter Art.[16]

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Ardeit meinen besten Dank aus.