J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A
Vol. 23, No. 3, March, 1960

Sur l'Application Exponentielle dans les Groupes de Lie

Takayuki Nôno

(Reçu le 30 Septembre 1959)

1. Introduction. — Soient G un groupe de Lie connexe (complexe ou réel) et $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie. L'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G est ici définie et c'est désignée par: $X \to x = \exp X$ $(X \in \mathscr{G}, x \in G)$ [1][(1)]. On désignera par ad X: $W \to [X, W]$, $(W \in \mathscr{G})$ la représentation adjointe de $\mathscr{G}$, et par Ad x la reprèsentation adjointe de G dans $\mathscr{G}$. Alors on a

$$\mathrm{Ad}\exp X = \exp \mathrm{ad}\, X.$$

Si l'application $X \to \exp X$ de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas localement homéomorphe en $A \in \mathscr{G}$, A est dit point singulier de $\mathscr{G}$ [3]. Pour que $A \in \mathscr{G}$ soit un point singulier, il faut et il suffit que ad A ait une valeur propre $2l\pi\sqrt{-1}$, l étant un entier rationnel non nul[4]. Dans ce travail, au paragraphe 4 nous nous efforçons de mettre le plus possible en évidence la correspondance locale au point singulier de l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G (théorèmes 1 et 2). Dans le csa où G est rèsoluble, ce problème a été traité par M. J. Dixmier [2]. Au paragraphe 5 nous déterminons des composantes connexes de l'image réciproque $\exp^{-1}(a)$ (théorème 3). Pour ce but, au paragraphe 2, nous décrivons une décomposition d'algèbre de Lie relative à Ad a ou ad A, spécialement en tenant compte du cas où G est réel. Et au paragraphe 3 nous donnons une expression canonique des éléments du voisinage de l'élément fixe.

Pour terminer, à M.le professeur K. Morinaga, j'exprime la plus grande gratitude, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses excellents conseils.

2. Décomposition d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ relative à Ad a ou ad A. — Soient G un groupe de Lie connexe (complexe ou réel) et $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie. Soient a un élément fixe de G et A un élément fixe de $\mathscr{G}$, dans ce paragraphe nous considérons la décomposition de $\mathscr{G}$ relative à Ad a ou ad A.

Dans le cas où G est un groupe complexe, $\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie sur le corps C des nombres complexes. On a la décomposition de $\mathscr{G}$ relative à Ad a:

$$\mathscr{G} = \sum \mathscr{G}_\lambda, \qquad \text{(somme directe)}, \tag{1}$$

où

$$\mathscr{G}_\lambda = \{W;\ W \in \mathscr{G},\ (\mathrm{Ad}\, a - \lambda I)^k W = 0 \ \text{ pour un entier quelconque } k\},$$

---

(1) Les numéros entre crochet renvoient à la bibliographie située à la fin de cet article.

I étant l'identité. Il est bien connu que

$$(2) \qquad (\mathrm{Ad}\ a)\ \mathscr{G}_\lambda \subset \mathscr{G}_\lambda,\ [\mathscr{G}_\lambda, \mathscr{G}_\mu] \subset \mathscr{G}_{\lambda\mu},$$

et que $\mathscr{G}_1$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{G}$. Sur $\mathscr{G}_\lambda$, en la base choisie proprement, Ad a est représenté par la matrice de la forme suivante:

$$(3) \qquad \sum \begin{pmatrix} \lambda 1 & & & & 0 \\ & \lambda 1 & & & \\ & & \lambda \ddots & & \\ & & & \ddots 1 & \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{(somme directe).}$$

De plus on a la décomposition de $\mathscr{G}$ relative à ad A:

$$(4) \qquad \mathscr{G} = \sum \mathscr{G}^\alpha, \quad \text{(somme directe),}$$

où

$\mathscr{G}^\alpha = \{W;\ W \in \mathscr{G},\ (\mathrm{ad}\ A - \alpha I)^k W = 0$ pour un entier quelconque $k\}$, I étant l'identité. Il est bien connu que

$$(5) \qquad (\mathrm{ad}\ A)\ \mathscr{G}^\alpha \subset \mathscr{G}^\alpha,\ [\mathscr{G}^\alpha, \mathscr{G}^\beta] \subset \mathscr{G}^{\alpha+\beta},$$

et que $\mathscr{G}^0$ et aussi $\mathscr{G}^{(1)} = \sum_\alpha \mathscr{G}^\alpha$ (où $\alpha = 2l\pi\sqrt{-1}$, l étant entiers rationnels) sont des sous-algèbres de Lie de $\mathscr{G}$, contenant A.

Dans le cas où G est un groupe réel, $\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie sur le corps R des nombres rèels. On désignera par ${}^c\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathscr{G}$. Alors, comme $\mathscr{G}$ s'identifie à une sous-algèbre de ${}^c\mathscr{G}$, il existe un groupe de Lie complexe connexe ${}^cG$ d'algèbre de Lie ${}^c\mathscr{G}$, contenant G comme un sous-groupe de Lie. Comme $a \in G \subset {}^cG$, on a la décomposition de ${}^c\mathscr{G}$ relative à Ad a:

$$(6) \qquad {}^c\mathscr{G} = \sum ({}^c\mathscr{G})_\lambda, \text{ (somme directe),}$$

où

$$[({}^c\mathscr{G})_\kappa, ({}^c\mathscr{G})_\lambda] \subset ({}^c\mathscr{G})_{\kappa\lambda}.$$

Dans le cas où λ est réel, posons

$$(7) \qquad \mathscr{G}_\lambda = ({}^c\mathscr{G})_\lambda \cap \mathscr{G},$$

on voit aisément que

$$(8) \qquad ({}^c\mathscr{G})_\lambda = {}^c(\mathscr{G}_\lambda), \text{ et dim. complexe } ({}^c\mathscr{G})_\lambda = \text{dim. réel } \mathscr{G}_\lambda,$$

où ${}^c\mathscr{M}$ désigne l'espace vectorielle complexifiée d'une espace vectorielle $\mathscr{M}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}\ a(\mathscr{G}_\lambda &= (\mathrm{Ad}\ a)\ (({}^c\mathscr{G})_\lambda \cap \mathscr{G}) \\ &\subset (\mathrm{Ad}\ a)\ ({}^c\mathscr{G})_\lambda \cap (\mathrm{Ad}\ a)\ \mathscr{G} \\ &\subset ({}^c\mathscr{G})_\lambda \cap \mathscr{G} = \mathscr{G}_\lambda, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad (\mathrm{Ad}\, a)\, \mathscr{G}_\lambda \subset \mathscr{G}_\lambda .$$

Dans le cas où $\lambda=\mu+\sqrt{-1}\nu$ est complexe, $(\nu \neq 0)$, comme $(\mathrm{Ad}\, a)\, \mathscr{G} \subset \mathscr{G}$, il existe $({}^c\mathscr{G})_{\bar\lambda}$ correspondant à $({}^c\mathscr{G})_\lambda$, $\bar\lambda$ étant $\mu-\sqrt{-1}\nu$. Posons

$$(10) \qquad \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}=(({}^c\mathscr{G})_\lambda+({}^c\mathscr{G})_{\bar\lambda})\bigcap \mathscr{G},$$

on peut vérifier immédiatement que

$$(11) \qquad ({}^c\mathscr{G})_\lambda+({}^c\mathscr{G})_{\bar\lambda}={}^c(\mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}),$$

$$\text{dim. complexe } (({}^c\mathscr{G})_\lambda+({}^c\mathscr{G})_{\bar\lambda})= \text{dim. réel } \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}.$$

Comme, si λ est réel, on peut identifier $\mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}$ avec $\mathscr{G}_\lambda$, d'après (8) et (11) on en conclut que

$$(12) \qquad \mathscr{G}=\sum \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}=\sum_{\lambda:\text{ réel}} \mathscr{G}_\lambda+\sum_{\lambda:\text{ complexe}} \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}.$$

De ce que $[({}^c\mathscr{G})_\kappa, ({}^c\mathscr{G})_\lambda] \subset ({}^c\mathscr{G})_{\kappa\lambda}$, on a

$$(13) \qquad [\mathscr{G}_{(\kappa,\bar\kappa)}, \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}] \subset \mathscr{G}_{(\kappa\lambda,\bar\kappa\bar\lambda)}+\mathscr{G}_{(\kappa\bar\lambda,\bar\kappa\lambda)}.$$

Aussi, de ce que $(\mathrm{Ad}\, a)\, ({}^c\mathscr{G}) \subset ({}^c\mathscr{G})_\lambda$ et que $(\mathrm{Ad}\, a)\, \mathscr{G} \subset \mathscr{G}$, on voit que

$$(14) \qquad (\mathrm{Ad}\, a)\, \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)} \subset \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}.$$

De (13), en particulier, on sait donc que $\mathscr{G}_1$ est une sous-algèbre de $\mathscr{G}$. Sur $\mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)}$, en la base choisie proprement, Ad a est représenté par la matrice de la forme suivante:

$$(15)\begin{cases} \sum \begin{pmatrix} \lambda 1 & & & 0 \\ & \lambda 1 & & \\ & & \lambda \ddots & \\ 0 & & & \ddots 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} & \text{(somme directe),} \\ & \text{pour } \mathscr{G}_\lambda \ (\lambda\text{: réel}); \\ \sum \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 & & & \ddots \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \text{(somme directe),} \\ & \text{pour } \mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)} (\lambda=\mu+\sqrt{-1}\nu,\ \nu \neq 0). \end{cases}$$

De plus on a la décomposition de $\mathscr{G}$ relative à ad A:

$$(16) \qquad \mathscr{G}=\sum_{\alpha:\text{réel}} \mathscr{G}^\alpha+\sum_{\beta:\text{complexe}} \mathscr{G}^{(\beta,\bar\beta)},$$

où

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathscr{G}^{\alpha}=({}^{c}\mathscr{G})^{\alpha}\cap\mathscr{G} \ (\alpha\text{: réel}), \\ \mathscr{G}^{(\beta,\bar\beta)}=(({}^{c}\mathscr{G})^{\beta}+({}^{c}\mathscr{G})^{\bar\beta})\cap\mathscr{G} \ (\beta\text{: complexe}), \end{cases}$$

${}^{c}\mathscr{G}=\sum({}^{c}\mathscr{G})^{\alpha}$ étant la décomposition de ${}^{c}\mathscr{G}$ relative à ad A. Si α est réel, on peut identifier $\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}$ avec $\mathscr{G}^{\alpha}$, donc, à la place de (16) on a simplement

$$(18)\qquad \mathscr{G}=\sum\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}.$$

Alors on a

$$(19)\qquad (\mathrm{ad}\ A)\ \mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}\subset\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)},$$

$$(20)\qquad [\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)},\mathscr{G}^{(\beta,\bar\beta)}]\subset\mathscr{G}^{(\alpha+\beta,\bar\alpha+\bar\beta)}+\mathscr{G}^{(\alpha+\beta,\bar\alpha+\bar\beta)}+\mathscr{G}^{(\alpha+\bar\beta,\bar\alpha+\beta)}.$$

Il est clair, d'après (19), que $\mathscr{G}^{0}$ et aussi $\mathscr{G}^{(1)}=\sum\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}$ (où $\alpha=2l\pi\sqrt{-1}$, l étant entiers rationnels) sont des sous-algèbres de Lie de $\mathscr{G}$, contenant A.

3. Expressions canoniques des éléments du voisinage de l'élément fixe. — Soient a un élément fixe de G et

$$(1)\qquad \mathscr{G}=\mathscr{G}_{1}+\widetilde{\mathscr{G}}\qquad \text{(somme directe)},$$

la décomposition de $\mathscr{G}$ relative à Ad (a^{-1}), où

$$(2)\qquad \widetilde{\mathscr{G}}=\sum_{\lambda\neq1}\mathscr{G}_{\lambda},\ \text{ou}\ \sum_{\lambda\neq1}\mathscr{G}_{(\lambda,\bar\lambda)},$$

respectivement suivant que G est complexe ou réel.

PROPOSITION 1. — *Soient a un élément fixe de G et $\mathscr{W}(a)$ un voisinage de a dans G. Il existe un voisinage $\mathscr{V}(a)$ de a dans G, qui est contenu dans $\mathscr{W}(a)$ et qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{V}_{1}\times\widetilde{\mathscr{V}}$ par la correspondance:*

$$(Y, X)\leftrightarrow x=\exp X(a \exp Y)(\exp X)^{-1},$$
$$(x\in\mathscr{V}(a),\ Y\in\mathscr{V}_{1}\ \text{et}\ X\in\widetilde{\mathscr{V}}),$$

où $\mathscr{V}_{1}$ et $\widetilde{\mathscr{V}}$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}_{1}$ et $\widetilde{\mathscr{G}}$.

Pour démontrer ce fait, comme on peut représenter un élément x assez voisin de a par: $x=a\exp Z$ où Z est dans un voisinage de 0 dans $\mathscr{G}$, il suffit de montrer que le jacobien en $(Y, X)=(0, 0)$ de la transformation: $(Y, X)\rightarrow Z$ définie par

$$(3)\qquad \exp X(a\exp Y)(\exp X)^{-1}=a\exp Z,$$

où Y est dans un voisinage de 0 dans $\mathscr{G}_{1}$ et X est dans un voisinage de 0 dans $\widetilde{\mathscr{G}}$, est distinct de zéro. On déduit de (3)

$$a^{-1}(\exp X)a \exp Y = \exp Z \exp X,$$

c'est-à-dire

$$\exp(\mathrm{Ad}(a^{-1})X) \exp Y = \exp Z \exp X.$$

Comme il s'agit du jacobien en $(Y, X) = (0, 0)$, négligeant des termes de degré >1 de X, Y et Z, il suffit de considérer le suivant:

$$(\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)X + Y = Z. \tag{4}$$

Posons mainetenant

$$Z = Z_1 + Z_2, \text{ où } Z_1 \in \mathscr{G}_1 \text{ et } Z_2 \in \tilde{\mathscr{G}}.$$

Comme $Y \in \mathscr{G}_1$ et $X \in \tilde{\mathscr{G}}$, par suite $(\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)\, X \in \tilde{\mathscr{G}}$, donc l'équation (4) equivaut à

$$\begin{cases} Y = Z_1, \\ (\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)\, X = Z_2, \end{cases} \tag{5}$$

D'après le définition de $\tilde{\mathscr{G}}$, $\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I$ a l'inverse sur $\tilde{\mathscr{G}}$, on voit donc que

$$X = (\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)^{-1} Z_2.$$

Ainsi, l'équation (5), conséquemment (4) est résolue, d'une manière unique, par X et Y. La proposition est démontrée.

REMARQUE 1. — Il est clair que $(\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)\mathscr{G}_1$ et aussi $\mathscr{G}_* = \{W;\, W \in \mathscr{G},\, (\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)\, W = 0\}$ sont des sous-espaces de $\mathscr{G}_1$. Soit $G_* = \{x;\, x \in G,\, xa = ax\}$, alors G_* est un sous-groupe fermé de G, donc G_* est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}_*$, et $a \in G_*$. Comme $\mathscr{G}_* \subset \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}$, il existe un groupe de Lie G_1 tel que $G_* \subset G_1 \subset G$ et $\mathscr{G}_1$ est l'algèbre de Lie de G_1. Soient $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ des sous-espaces de $\mathscr{G}_1$ tels que

$$\begin{cases} \mathscr{G}_1 = (\mathrm{Ad}(a^{-1}) - I)\mathscr{G}_1 + \mathscr{H} & \text{(somme directe)}, \\ \mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_* + \mathscr{K} & \text{(somme directe)}. \end{cases} \tag{6}$$

On peut démontrer l'assertion suivante par le même raisonnement que dans la proposition 1.

Soient a un élément fixe de G et $\mathscr{W}(a)$ un voisinage de a dans G. Il existe un voisinage $\mathscr{V}(a)$ de a dans G, qui est contenu dans $\mathscr{W}(a)$, et qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{V}(\mathscr{H}) \times \mathscr{V}(\tilde{\mathscr{G}} + \mathscr{K})$ par la correspondance:

$$(H, V) \leftrightarrow x = \exp V(a \exp H)(\exp V)^{-1},$$
$$(x \in \mathscr{V}(a),\ H \in \mathscr{V}(\mathscr{H}) \text{ et } V \in \mathscr{V}(\tilde{\mathscr{G}} + \mathscr{K})),$$

où $\mathscr{V}(\mathscr{H})$ et $\mathscr{V}(\tilde{\tilde{\mathscr{G}}}+\mathscr{K})$ sont des voisinages de 0 *respectivement dans $\mathscr{H}$ et $\tilde{\tilde{\mathscr{G}}}+\mathscr{K}$.*

Soient A un élément fixe de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}=\sum\mathscr{G}^{\alpha}$ (somme directe) ou $\mathscr{G}=\sum\mathscr{G}^{(\alpha,\bar{\alpha})}$ (somme directe) les décompositions de $\mathscr{G}$ relatives à $-\mathrm{ad}\ A$ respectivement, suivant que G est complexe ou réel. Posons

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathscr{G}^{(1)}=\sum\mathscr{G}^{\alpha}, & \mathscr{G}^{(2)}=\sum\mathscr{G}^{\beta} \quad ;\ \text{ou} \\ \mathscr{G}^{(1)}=\sum\mathscr{G}^{(\alpha,\bar{\alpha})}, & \mathscr{G}^{(2)}=\sum\mathscr{G}^{(\beta,\bar{\beta})} \quad , \end{array}\right. \tag{7}$$

suivant que G est complexe ou réel, où $\alpha=2l\pi\sqrt{-1}$, l étant entiers rationnels, ot où $\beta\neq 2l\pi\sqrt{-1}$, l étant entiers rationnels. Il est clair que $A\in\mathscr{G}^{0}\subset\mathscr{G}^{(1)}$ et que $\mathscr{G}^{(1)}$ est un sous-algèbre de Lie de $\mathscr{G}$. Alors on a

PROPOSITION 2. — *Soient A un élément fixe de $\mathscr{G}$, et $\mathscr{W}(A)$ un voisinage de A dans $\mathscr{G}$. Il existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$, qui est contenu dans $\mathscr{W}(A)$, et qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(1)})\times\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(2)})$ par la correspondance*:

$$(Y,\ X)\leftrightarrow U=(\exp\ \mathrm{ad}\ X)\ (A+Y),$$
$$(U\in\mathscr{U}(A),\ Y\in\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(1)})\ \textit{et}\ X\in\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(2)})),$$

où $\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(1)})$ et $\mathscr{U}(\mathscr{G}^{(2)})$ sont des voisinages de 0 *respectivement dans $\mathscr{G}^{(1)}$ et $\mathscr{G}^{(2)}$.*

Pour démontrer ce fait, comme on peut représenter U par l'expression $U=A+Z$ où Z est dans un voisinage de 0 dans $\mathscr{G}$, il suffit de montrer que le jacobien en $(Y,\ X)=(0,\ 0)$ de la transformation: $(Y,\ X)\to Z$ définie par

$$(\exp\ \mathrm{ad}\ X)\ (A+Y)=A+Z, \tag{8}$$

où Y et X sont dans des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}^{(1)}$ et $\mathscr{G}^{(2)}$, est distinct de zéro. Comme il s'agit du jacobien en $(Y,\ X)=(0,\ 0)$, négligeant des termes de degré >1 de X, Y et Z, il suffit de considérer le suivant:

$$(-\mathrm{ad}\ A)\ X+Y=Z. \tag{9}$$

Posons maintenant

$$Z=Z_1+Z_2,\ \text{où}\ Z_1\in\mathscr{G}^{(1)}\ \text{et}\ Z_2\in\mathscr{G}^{(2)}.$$

Comme $Y\in\mathscr{G}^{(1)}$, $X\in\mathscr{G}^{(2)}$ et $(-\mathrm{ad}\ A)\ X\in\mathscr{G}^{(2)}$, l'équation (9) équivaut donc à

$$\left\{\begin{array}{l} Y=Z_1, \\ (-\mathrm{ad}\ A)\ X=Z_2. \end{array}\right. \tag{10}$$

D'après le définition de $\mathscr{G}^{(2)}$, $-\mathrm{ad}\ A$ a l'inverse sur $\mathscr{G}^{(2)}$, on a

$$X=-(\mathrm{ad}\ A)^{-1}Z_2.$$

Ainsi, l'équation (10), conséquemment (9) est résolue, d'une manière unique, par Y et X. La proposition est démontrée.

De la même manière que ci-dessus, on peut démontrer:

PROPOSITION 3. — *Soit $\mathscr{W}(A)$ un voisinage de A dans $\mathscr{G}$, li existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$, qui est contenu dans $\mathscr{W}(A)$, et qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{U}(\mathscr{G}^0)\times\mathscr{U}(\mathscr{G}')$ par la correspondance*:

$$(Y, X)\leftrightarrow U=(\exp \operatorname{ad} X)\,(A+Y),$$
$$(U\in\mathscr{U}(A),\ Y\in\mathscr{U}(\mathscr{G}^0) \text{ et } X\in\mathscr{U}(\mathscr{G}')),$$

où $\mathscr{U}(\mathscr{G}^0)$ et $\mathscr{U}(\mathscr{G}')$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}^0$ et $\mathscr{G}'$, et où $\mathscr{G}'=\sum\limits_{\alpha\neq 0}\mathscr{G}^{\alpha}$ ou $\sum\limits_{\alpha\neq 0}\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}$ suivant que G est complexe ou réel.

REMARQUE 2. — Il est clair que $(-\operatorname{ad} A)\,\mathscr{G}^0$ et $\mathscr{G}^*=\{W;\ W\in\mathscr{G},\ (\operatorname{ad} A)\,W=0\}$ sont des sous-espaces de $\mathscr{G}^0$. Soient $\mathscr{N}$ et $\mathscr{M}$ des sous-espaces de $\mathscr{G}^0$ tel que

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathscr{G}^0=(-\operatorname{ad} A)\,\mathscr{G}^0+\mathscr{N} & \text{(somme directe)},\\ \mathscr{G}^0=\mathscr{G}^*+\mathscr{M} & \text{(somme directe)}.\end{cases}$$

On peut démontrer l'assertion suivante par le même raisonnement que dans la proposition 2.

Soient A un élément de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{W}(A)$ un voisinage de A dans $\mathscr{G}$. Il existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$, qui est contenu dans $\mathscr{W}(A)$, et qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{U}(\mathscr{N})\times\mathscr{U}(\mathscr{G}'+\mathscr{M})$ par la correspondance:

$$(N, L)\leftrightarrow U=(\exp \operatorname{ad} L)\,(A+N),$$
$$(U\in\mathscr{U}(A),\ N\in\mathscr{U}(\mathscr{N}) \text{ et } L\in\mathscr{U}(\mathscr{G}'+\mathscr{M})),$$

où $\mathscr{U}(\mathscr{N})$ et $\mathscr{U}(\mathscr{G}'+\mathscr{M})$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{N}$ et $\mathscr{G}'+\mathscr{M}$, et où $\mathscr{G}'=\sum\limits_{\alpha\neq 0}\mathscr{G}^{\alpha}$ ou $\sum\limits_{\alpha\neq 0}\mathscr{G}^{(\alpha,\bar\alpha)}$ selon que G est complexe ou réel.

4. Correspondance locale par l'application exponentielle. — Pour énoncer commodément les résultats, nous disons qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est localement injective en un point u_0 de E, s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de u_0 dans E tel que la restriction de f à $\mathscr{U}$ soit injective, et que f est localement surjective en un point u_0 de E, si pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de u_0 dans E, $f(\mathscr{V})$ est un voisinage de $f(u_0)$ dans F. On rappelle qu'une application g d'un ensemble S dans un ensemble T est dite injective, si elle est biunivoque; et qu'elle est dite surjective, si $g(S)=T$.

THÉORÈME 1. — *Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ et A un point singulier dans $\mathscr{G}$. L'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas ni localement injective, ni localement surjective en A.*

On a démontré en [4] que l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas localement injective en A (voir théorème 2 ci-dessous).

On va démontrer que l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas localement surjective en A. Comme $a=\exp A$, en conséquence $\mathrm{Ad}\, a=\exp \mathrm{ad}\, A$, il est clair que, dans les propositions 1 et 2, $\mathscr{G}_1=\mathscr{G}^{(1)}$ et $\widetilde{\mathscr{G}}=\mathscr{G}^{(2)}$. D'après la proposition 1, il existe un assez petit voisinage $\mathscr{V}(a)$ de $a(=\exp A)$ dans G, qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{V}_1\times\widetilde{\mathscr{V}}$ par la correspondance:

$$(1)\qquad (Y, X)\leftrightarrow x=\exp X(a \exp Y)\,(\exp X)^{-1},\quad (x\in\mathscr{V}(a),\ Y\in\mathscr{V}_1 \text{ et } X\in\widetilde{\mathscr{V}}),$$

où $\mathscr{V}_1$ et $\widetilde{\mathscr{V}}$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}_1$ et $\widetilde{\mathscr{G}}$. D'après la proposition 2 et la continuité de l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G, on voit qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$, qui est homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{U}_1\times\widetilde{\mathscr{U}}$ par la correspondance:

$$(2)\qquad (W, V)\leftrightarrow A+U=(\exp \mathrm{ad}\, V)\,(A+W),\quad (A+U\in\mathscr{U}(A),\ W\in\mathscr{U}_1 \text{ et } V\in\widetilde{\mathscr{U}}),$$

où $\mathscr{U}_1$ et $\widetilde{\mathscr{U}}$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}_1$ et $\widetilde{\mathscr{G}}$ tels que $\exp(A+\mathscr{U}_1)\subset a\exp\mathscr{V}_1$ et $\widetilde{\mathscr{U}}\subset\widetilde{\mathscr{V}}$. En vertu de (2), on a

$$(3)\qquad \exp\mathscr{U}(A)=\{\exp V\,(\exp(A+W))\,(\exp V)^{-1};\ W\in\mathscr{U}_1 \text{ et } V\in\widetilde{\mathscr{U}}\}.$$

De ce que $\exp(A+\mathscr{U}_1)\subset a\exp\mathscr{V}_1$ et $\widetilde{\mathscr{U}}\subset\widetilde{\mathscr{V}}$, il en est déduit que $\exp\mathscr{U}(A)\subset\mathscr{V}(a)$. De suite, d'après la proposition 3 appliquée au cas $\mathscr{G}=\mathscr{G}_1$, on peut prendre le assez petit voisinage $\mathscr{U}_1$ de sorte que $A+\mathscr{U}_1$ soit homéomorphe à l'espace produit topologique $\mathscr{U}^0\times\hat{\mathscr{U}}$ par la correspondance:

$$(4)\qquad (Q, P)\leftrightarrow A+W=(\exp \mathrm{ad}\, P)\,(A+Q),\ (W\in\mathscr{U}_1,\ Q\in\mathscr{U}^0 \text{ et } P\in\hat{\mathscr{U}}),$$

où $\mathscr{U}^0$ et $\hat{\mathscr{U}}$ sont des voisinages de 0 respectivement dans $\mathscr{G}^0$ et $\hat{\mathscr{G}}$, étant

$$(5)\qquad \hat{\mathscr{G}}=\sum_{\alpha=2l\pi\sqrt{-1}}\mathscr{G}^{\alpha} \text{ ou } \sum_{\alpha=2l\pi\sqrt{-1}}\mathscr{G}^{(\alpha,\bar{\alpha})},\qquad (l\text{: entiers non nuls}),$$

suivant que G est complexe ou réel. Il est clair qu $\hat{\mathscr{G}}\neq\{0\}$, car A est un point singulier de $\mathscr{G}$. De (4) il résulte que

$$(6)\qquad \exp(A+W)=\exp P\exp(A+Q)\,(\exp P)^{-1}.$$

Comme on peut prendre le assez petit voisinage $\mathscr{U}^0$ de sorte que $\mathscr{U}^0$ soit homéomorphe à $\mathscr{W}$ par la relation:

(7) $$\exp(A+Q)=\exp A \exp S. \ (Q\in \mathscr{U}^0 \text{ et } S\in \mathscr{W}),$$

où $\mathscr{W}$ est un voisinage de 0 dans $\mathscr{G}^0$; car A n'est pas singulier dans $\mathscr{G}^0$. Comme $\exp(A+\mathscr{U}_1)\subset \exp A \exp \mathscr{V}_1$, il existe un élément Y de $\mathscr{V}_1$ tel que

(8) $$\exp(A+W)=\exp A \exp Y.$$

De (6), (7) et (8) il résulte que

(9) $$\exp A \exp Y=\text{exe } P \exp A \exp S\,(\exp P)^{-1},$$

par suite on a

(10) $$\begin{aligned}\exp Y&=(\exp A)^{-1}\exp P \exp A \exp S\,(\exp P)^{-1},\\ &=\exp((\exp -\operatorname{ad} A)P)\exp S\,(\exp P)^{-1}.\end{aligned}$$

Soient $\hat{\mathscr{H}}$ et $\hat{\mathscr{K}}$ des sous-espaces de $\hat{\mathscr{G}}$ tels que

(11) $$\begin{aligned}\hat{\mathscr{G}}&=(\exp(-\operatorname{ad} A)-I)\,\hat{\mathscr{G}}+\hat{\mathscr{H}} &&\text{(somme directe)},\\ \mathscr{G}&=\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*+\hat{\mathscr{K}} &&\text{(somme directe)}.\end{aligned}$$

Il est clair que

(12) $$\dim(\exp(-\operatorname{ad} A)-I)\hat{\mathscr{G}}=\dim \hat{\mathscr{K}}.$$

Comme $\mathscr{G}_1=\mathscr{G}^0+\hat{\mathscr{G}}$ (somme directe), en posant

$$\begin{aligned}&P=P_1+P_2,\ P_1\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*,\ P_1\in\hat{\mathscr{K}},\\ &Y=Y_1+Y_2,\ Y_1\in\mathscr{G}^0+(\exp(-\operatorname{ad} A)-I)\hat{\mathscr{G}},\ Y_2\in\hat{\mathscr{H}},\end{aligned}$$

on considérera la transformation φ_{P_1}:

(13) $$(P_2, S)\to Y_1=\varphi_{P_1}(P_2, S)$$

définie par la formule (10). Comme $P_1\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*$, en vertu de (10) on voit que $P_2=0$ et $S=0$ entraînent $Y=0$, par suite $Y_1=0$. Le jacobien J_{P_1}, en $(P_2, S)=(0, 0)$, de la transformation φ_{P_1} est une fonction continue de P_1. Il résulte de (10), comme on sait, que

$$(\exp(-\operatorname{ad} A)-I)P+S+\cdots=Y,$$

ou, négligeant des termes de degré >1 de P et S,

(14) $$(\exp(-\operatorname{ad} A)-I)P_2+S=Y_1.$$

En tenant compte de (12), on voit de (14) que $J_{P_1}\neq 0$ en $P_1=0$. On peut choisir un voisinage $\hat{\mathscr{U}}$ bien petit pour que $J_{P_1}\neq 0$ pour tout $P\in\hat{\mathscr{U}}$. D'où il résulte que $Y\in\hat{\mathscr{H}}$, par suite $Y_1=0$, entraîne $P_2=0$ et $S=0$. Alors, de (10) il vient $Y=0$.

Ainsi on obtient qu'il existe un voisinage $A+\mathscr{U}_1$ de A dans $\mathscr{G}_1$ tel que $\exp(A+\mathscr{U}_1)$ ne contient pas des éléments des formes: $\exp A \exp Y$, où $Y\in\hat{\mathscr{H}}$. En tenant compte de l'unicité d'expression (1), il est déduit enfin que, en un point singulier A dans $\mathscr{G}$, l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas localement surjective. Le théorème est démontré.

REMARQUE 3. — D'après théorème 1 on a su qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$ tel que l'image $\exp\mathscr{U}(A)$ n'est pas un voisinage de a dans G. Comme G est localement compact, il existe un voisinage compact $\mathscr{V}(a)$ de a dans G. L'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G est continue en A, il existe donc un voisinage compact $\mathscr{W}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{W}(A)\subset\mathscr{U}(A)$ et $\exp\mathscr{W}(A)\subset\mathscr{V}(a)$. Alors, comme on voit aisément, l'image $\exp\mathscr{W}(A)$ est compacte, et par suite elle est fermée dans $\mathscr{V}(a)$, autrement dit

$$\overline{\exp\mathscr{W}(A)}\cap\mathscr{V}(a)=\exp\mathscr{W}(A),$$

où $\overline{\exp\mathscr{W}(A)}$ désigne la fermeture de $\exp\mathscr{W}(A)$ dans G. Il est clair que $\exp\mathscr{W}(A)$, étant $\mathscr{W}(A)\subset\mathscr{U}(A)$, n'est pas un voisinage de a dans G, car $\exp\mathscr{U}(A)$ n'est pas un voisinage de a dans G. Ainsi on peut dire que, *pour un voisinage compact* $\mathscr{V}(a)$ *de* a *dans* G, *il existe un voisinage* $\mathscr{W}(A)$ *de* A *dans* $\mathscr{G}$ *tel que* $\overline{\exp\mathscr{W}(A)}\cap\mathscr{V}(a)$ *n'est pas un voisinage de* a *dans* G.

De plus, soit $\mathscr{V}(a)$ un voisinage arbitrairement donné de a dans G, et soit $\mathscr{U}(A)$ un voisinage de A dans $\mathscr{G}$. Soit $\mathscr{W}(A)$ un voisinage de A dans $\mathscr{G}$ tel que $\exp\mathscr{W}(A)\subset\mathscr{V}(a)$. Alors, comme $\mathscr{U}(A)\cap\mathscr{W}(A)$ est un voisinage de A dans $\mathscr{G}$, il existe un point non-singulier B qui est un point intérieur du voisinage $\mathscr{U}(A)\cap\mathscr{W}(A)$, par exemple, $B=(1+\varepsilon)A$ pour ε ayant assez petit $|\varepsilon|$; car l'ensemble des points singuliers de $\mathscr{G}$ est la variété de $\mathscr{G}$ définie par l'équation

$$\text{dét}\,(\text{ad}\,X-2l\pi\sqrt{-1}I)=0,$$

l étant un entier rationnel distinct de 0. D'où il existe un voisinage $\mathscr{U}(B)$ de B dans $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{U}(B)\subset\mathscr{U}(A)\cap\mathscr{W}(A)$, et tel que $\exp\mathscr{U}(B)$ est un voisinage de $\exp B$ dans G. Ainsi on obtient que, *soit* $\mathscr{V}(a)$ *un voisinage de* a *dans* G *et* $\mathscr{U}(A)$ *un voisinage de* A *dans* $\mathscr{G}$, *l'intersection* $(\exp\mathscr{U}(A))\cap\mathscr{V}(a)$ *contient toujours un ensemble ouvert dans* G.

Soient a un élément de G et $\exp^{-1}(a)$ l'image réciproque de a relativement à l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G. Soit A un élément de $\exp^{-1}(a)$. On étudie l'apparence, dans le voisinage de A, de $\exp^{-1}(a)$.

D'abord on a $\exp^{-1}(a)\subset\mathscr{G}_*\subset\mathscr{G}_1$. En effet, soit $B\in\exp^{-1}(a)$, on a $\exp B=\exp A=a$, par suite, il vient

$$\begin{aligned}(\text{Ad}\,(a^{-1})-I)\,B&=(\text{Ad}\,(\exp-B)-I)B\\&=((\exp-\text{ad}\,B)-I)B=0.\end{aligned}$$

Donc on voit que $B\in\mathscr{G}_*$.

En prenant un petit voisinage $\mathscr{U}_1$ convenablement, comme on sait, $A+\mathscr{U}_1$ est homéomorphe à l'espace produit topologique $\hat{\mathscr{U}}\times\mathscr{W}$ par les relations (4) et (7), où $\hat{\mathscr{U}}$ et $\mathscr{W}$ sont des voisinages de 0, respectivement, dans $\hat{\mathscr{G}}$ et $\mathscr{G}^0$. De les formules (6) et (7) on a

$$\exp(A+W)=\exp P\exp A\exp S\,(\exp P)^{-1},\ (P\in\hat{\mathscr{G}},\ S\in\mathscr{G}^0).$$

Donc, pour que $\exp(A+W)=\exp A$, il faut et il suffit que

$$(15)\qquad (\exp A)^{-1}\exp P\exp A\exp S\,(\exp P)^{-1}=e.$$

(Ce qui s'obtient en plaçant $Y=0$ dans (10)). Pour que la relation (15) soit valable, autrement dit $Y=0$ dans (10), comme on sait, il faut et il suffit que $P_2=0$ et $S=0$, à savoir, que $P\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*$ et $S=0$. Il est clair, d'après (7), que $S=0$ équivaut à $Q=0$. Par suite, d'après (4), on voit que, alors,

$$A+W=(\exp\operatorname{ad}P)A,\ P\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*.$$

Ainsi on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 2. — *Soient A un élément de G et* $\exp^{-1}(a)$ *l'image réciproque de a relativement à l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G. Soit A un élément de* $\exp^{-1}(a)$. *Dans un voisinage arbitrairement donné de A dans $\mathscr{G}$, il existe toujours un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$ tel que*

$$\exp^{-1}(a)\cap\mathscr{U}(A)\subset\{(\exp\operatorname{ad}X)\,A;\,X\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*\}\subset\exp^{-1}(a)\subset\mathscr{G}_*,$$

autrement dit,

$$\exp^{-1}(a)\cap\mathscr{U}(A)=\{\exp\operatorname{ad}X)A;\ X\in\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*\}\cap\mathscr{U}(A)\subset\mathscr{G}_*.$$

REMARQUE 4. — Lorsque A est un point singulier dans $\mathscr{G}$, comme on sait, $\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*\neq\{0\}$; en suite, on peut dire que l'application exponentielle de $\mathscr{G}$ dans G n'est pas localement injective en son point singulier A dans $\mathscr{G}$. Mais, maintenant, dans le théorème 2, on a déterminé l'apparence dans un voisinage de A dans $\exp^{-1}(a)$. De plus d'après le théorème 2, on voit que $\exp^{-1}(a)$ *est localement connexe*, car $\exp^{-1}(a)\cap\mathscr{U}(A)$ ci-dessus est connexe. Encore plus, il est évident que $\exp((\exp\operatorname{ad}P)\,A)=\exp A$ pour $P\in\mathscr{G}_*$, c'est-a-dire que $(\exp\operatorname{ad}P)A\in\exp^{-1}(a)$ pour $P\in\mathscr{G}_*$. Comme $\hat{\mathscr{G}}\cap\mathscr{G}_*\subset\mathscr{G}_*$, on peut écrire clairement que

$$\exp^{-1}(a)\cap\mathscr{U}(A)=\{(\exp\operatorname{ad}X)A;\ X\in\mathscr{G}_*\}\cap\mathscr{U}(A).$$

5. Composantes connexes de $\exp^{-1}(a)$. — Soient a un élément de G et A un élément de $\exp^{-1}(a)$. L'ensemble des éléments x de G commutatives à a, à savoir, $\{x;\,x\in G,\,xa=ax\}$ forme un sous-groupe de Lie G_* de G, d'algèbre de Lie

$\mathscr{G}_*$. Soit $G_* = \bigcup G_*(g)$ la décomposition de G_* relative aux composantes connexes, où $G_*(g)$ désigne la composante connexe contenant un élément g de G_*. Il est clair que $G_*(g) = gG_*(e) = G_*(e)g$. On désigne par $\mathscr{A}_A$ l'ensemble $\{(\mathrm{Ad}\, x)A;\ x \in G_*(e)\}$. Il est facile de vérifier que, pour $x \in G_*(e)$, $\exp((\mathrm{Ad}\, x)\, A) = \exp A = a$, à savoir, $\mathscr{A}_A \subset \exp^{-1}(a)$. D'après la définition de $\mathscr{A}_A$, il est clair que $\mathscr{A}_A$ est connexe. On montrera que $\mathscr{A}_A$ est la composante connexe, contenant A, de $\exp^{-1}(a)$.

Pour ce but, on désigne par $\mathscr{L}_A$ la composante connexe, contenant A, de $\exp^{-1}(a)$. Alors il vient $\mathscr{A}_A \subset \mathscr{L}_A$.

Soit A_1 un élément de $\mathscr{A}_A$, d'après le théorème 2 et la remarque 4, il existe un voisinage $\mathscr{U}(A_1)$ de A_1 dans $\mathscr{G}$ tel que

$$\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(A_1) = \{(\exp \mathrm{ad}\, Y)A_1;\ Y \in \mathscr{G}_*\} \cap \mathscr{U}(A_1).$$

Soit A_2 un élément de $\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(A_1)$, on peut écrire

$$A_2 = (\exp \mathrm{ad}\, Y)A_1, \text{ où } Y \in \mathscr{G}_*. \tag{1}$$

Comme $A_1 \in \mathscr{A}_A$, d'après la définision de $\mathscr{A}_A$, on a

$$A_1 = (\mathrm{Ad}\, x)A, \text{ où } x \in G_*(e). \tag{2}$$

En vertu de (1) et (2), il résulte

$$A_2 = (\exp \mathrm{ad}\, Y)\,(\mathrm{Ad}\, x)A. \tag{3}$$

Comme $Y \in \mathscr{G}_*$, on voit que $\exp Y \in G_*(e)$, par suite $(\exp Y)x \in G_*(e)$. Donc, on sait que $A_2 \in \mathscr{A}_A$, ensuite, $\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(A_1) \subset \mathscr{A}_A$. Comme $\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(A_1)$ est un voisinage de A_1 dans $\exp^{-1}(a)$, d'où il résulte que l'ensemble $\mathscr{A}_A$ est ouvert dans $\exp^{-1}(a)$, par suite, dans $\mathscr{L}_A$.

Soit B_1 un élément de $\mathscr{L}_A - \mathscr{A}_A$, d'après le théorème 2 et la remarque 4, il existe un voisinage $\mathscr{U}(B_1)$ de B_1 dans $\mathscr{G}$ tel que

$$\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1) = \{\exp \mathrm{ad}\ Y)\, B_1;\ Y \in \mathscr{G}_*\} \cap \mathscr{U}(B_1).$$

Soit B_2 un élément de $\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1)$, on peut écrire

$$B_2 = (\exp \mathrm{ad}\, Y)B_1, \text{ où } Y \in \mathscr{G}_*. \tag{4}$$

Si $B_2 \in \mathscr{A}_A$, on a

$$B_2 = (\mathrm{Ad}\, x)A, \text{ où } x \in G_*(e). \tag{5}$$

En vertu de (4) et (5) on voit que

$$\begin{aligned} B_1 &= (\exp -\mathrm{ad}\ Y)\,(\mathrm{Ad}\, x)A, \\ &= (\mathrm{Ad}((\exp -Y)x))A. \end{aligned} \tag{6}$$

Comme on sait que $(\exp -Y)x \in G_*(e)$, d'où il résulte que $B_1 \in \mathscr{A}_A$, qui est en contradiction avec ce fait que $B_1 \in \mathscr{L}_A - \mathscr{A}_A$. Donc, on obtient que

$$(7) \qquad (\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1)) \cap \mathscr{A}_A = \phi.$$

En tenant compte de ce que $\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1)$ est un voisinage connexe de B_1 dans $\exp^{-1}(a)$ (voir le remarque 4) et ce que $\mathscr{L}_A$ est la composante connexe, contenant A, de $\exp^{-1}$(a), étant $B_1 \in \mathscr{L}_A$; On peut voir que

$$\exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1) \subset \mathscr{L}_A.$$

Donc, d'après ce fait et (7), on obtient

$$(8) \qquad \exp^{-1}(a) \cap \mathscr{U}(B_1) \subset \mathscr{L}_A - \mathscr{A}_A.$$

En conséquence, l'ensemble $\mathscr{L}_A - \mathscr{A}_A$ est ouvert dans $\exp^{-1}(a)$, par suite, dans $\mathscr{L}_A$.

Comme $\mathscr{L}_A$ est connexe et $\mathscr{A}_A \neq \phi$, parce que $A \in \mathscr{A}_A$, on conclut donc que $\mathscr{L}_A = \mathscr{A}_A$, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathscr{A}_A$ est la composante connexe, contenant A, de $\exp^{-1}(a)$.

Ainsi, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. — *Soient a un élément de G et A un élément de $\exp^{-1}(a)$. Soit $G_*(e)$ la composante connexe d'identité e du groupe G_* compoesé des éléments commutatives à a. La composante connexe, contenant A, de $\exp^{-1}(a)$ est l'ensemble $\mathscr{L}_A$ defini par l'expression*:

$$\mathscr{L}_A = \{(\mathrm{Ad}\ x)A;\ x \in G_*(e)\}.$$

REMARQUE 5. — Soit $\mathscr{L}_A(g) = \{(\mathrm{Ad}\ y)A;\ y \in G_*(g)\}$, où $g \in G_*$. Comme $G_*(g) = gG_*(e) = G_*(e)g$, on peut vérifier que

$$\mathscr{L}_A(g) = (\mathrm{Ad}\ g)\ \mathscr{L}_A = \mathscr{L}_{(\mathrm{Ad}\ g)A}.$$

Par suite, $\mathscr{L}_A(g)$ est la composante connexe, contenant $(\mathrm{Ad}\ g)\ A$, de $\exp^{-1}(a)$.

Soit $p(A) = \dim \hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*$. En tenant compte de la forme canonique de ad A (analogue à la forme (3) ou (15) au paragraphe 2, qui est la forme cononique de Ad a), on peut voir aiesément que le nombre $p(A)$ est égal au nombre des blocs appartenant aux valeurs propres $2l\pi\sqrt{-1}$ (l: entiers non nuls) dans la forme canonique de Jordan (sur le corps des nombres complexes) de ad A. Donc, pour $B \in \mathscr{L}_A$, à savoir, $B = (\mathrm{Ad}\ x)A$ où $x \in G_*(e)$, comme

$$\mathrm{ad}\ B = (\mathrm{Ad}\ x)\ \mathrm{ad}\ A (\mathrm{Ad}\ x)^{-1},$$

on a $p(B) = p(A)$, qui se désigne par $p(\mathscr{L}_A)$.

D'après le theoreme 2, il existe un voisinage $\mathscr{U}(A)$ de A dans $\mathscr{G}$ tel que

$$(9) \qquad \mathscr{L}_A \cap \mathscr{U}(A) = \{(\exp \mathrm{ad}\ X);\ X \in \hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*\} \cap \mathscr{U}(A).$$

Donc, on peut voir que la dimension de $\mathscr{L}_A$ dans un voisinage de A n'est pas plus grande que dim $(\hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*)$, c'est-à-dire que

$$\dim \mathscr{L}_A \text{ en } A \leqq p(\mathscr{L}_A). \tag{10}$$

La différentielle, en $X=0$, de l'application:

$$X \to V = (\exp \operatorname{ad} X)A, \text{ où } X \in \hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*$$

est représenté par l'expression:

$$dX \to dV = (-\operatorname{ad} A)\, dX, \text{ où } dX \in \hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*.$$

Comme $(\operatorname{ad} A)\ (\hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*) \subset \hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*$ et ad A a l'inverse sur $\hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*$, on peut dire que la dimension de l'espace tangent à $\mathscr{L}_A$ en A est égale à dim $(\hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*) = p(\mathscr{L}_A)$. De ce fait et (10) on a

$$\dim \mathscr{L}_A \text{ en } A = p(\mathscr{L}_A).$$

Comme $\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_A$ pour $B \in \mathscr{L}_A$, on voit que

$$\dim \mathscr{L}_A \text{ en } B = p(\mathscr{L}_A).$$

Ainsi on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE. — *Soient a un élément de G et $\mathscr{L}_A$ la composante connexe, contenant A, de* $\exp^{-1}(a)$. *Alors on a*

$$\dim \mathscr{L}_A = \dim (\hat{\mathscr{G}} \cap \mathscr{G}_*) = p(\mathscr{L}_A),$$

où $p(\mathscr{L}_A)$ désigne le nombre des blocs appartenant aux valeurs propres $2l\pi\sqrt{-1}$ (l: entiers non nuls) dans la forme canonique de Jordan de ad A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chevalley, Theory of Lie groups, I, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. math. France, **85** (1957), 113-121.

[3] T. Nôno, *On the singularity of general linear groups*, J. Sci. Hiroshima Univ., (A), **20** (1957), 115-123.

[4] ———, *Note on the paper "On the singularity of general linear groups"*, J. Sci. Hiroshima Univ., (A), **21** (1958), 163-166.

Institut de Mathématiques
Université de Hiroshima