KŌDAI MATH. SEM. REP.
24 (1972), 91—105

ÜBER DIE VERTRÄGLICHKEIT DER KREISVERFAHREN DER LIMITIERUNGSTHEORIE BEI KOMPLEXEN ORDNUNGEN

VON KAZUO ISHIGURO*

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung derjenigen von Strasser [9] und Meyer-König, Strasser und dem Verfasser [5]. Gegeben seien irgend zwei Verfahren A und B zur Summierung unendlicher Reihen. A und B heißen verträglich, wenn aus A-$\sum a_n = s$ und B-$\sum a_n = t$ stets $s=t$ folgt. In seiner Arbeit untersuchte Strasser [9] die Verträglichkeit der Limitierungsverfahren E_p (p reell, $p \neq 0$), B_q (q reell, $q \neq 0$) und S_α (α reell, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$). Er studierte weiter in dieser Arbeit etwas über die Verträglichkeit der Limitierungsverfahren E_p, B_q und S_α mit komplexen Ordnungen. Seine Arbeit ist eine Fortsetzung derjenigen von Agnew [1] und Meyer-König und Zeller [8] über die Verträglichkeit der Verfahren E_p und B_q mit komplexen Ordnungen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die entsprechenden Fragen für die Verfahren E_p, B_q und S_α behandelt werden. Es handelt sich nun immer um die regulären Verfahren (vgl. § 1) wie bei Strasser [9] und bei Meyer-König, Strasser und dem Verfasser [5].

In § 1 werden grundlegende Eigenschaften von Verfahren E_p, B_q, S_α und T_β bereitgestellt. Die Sätze E, B und S sind besonders wichtig für die vorliegende Arbeit.

Von § 2 bis § 4 untersuchen wir die Verträglichkeit der Verfahren E_p, B_q und S_α mit komplexen Ordnungen.

Herrn Professor Dr. W. Meyer-König danke ich am herzlichsten für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und die wertvollen Ratschläge während der Durchführung der Arbeit.

§ 1. Die Verfahren E_p, B_q, S_α und T_β.

I. *Das E_p-Verfahren.* Das Euler-Knopp-Verfahren E_p definieren wir als das

Received January 31, 1971.

* Der Verfasser führte seine Untersuchungen größtenteils während eines Gastaufenthaltes (1966-1968) am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart durch. Er ist der Alexander von Humboldt-Stiftung für großzügige Unterstützung während dieser Zeit zu bestem Dank verpflichtet.

zu der Matrix E_p gehörige Folge-Folge-Verfahren. Dabei sei E_p die Dreiecksmatrix mit den Elementen

$$(E_p)_{n,\nu}=\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu} \qquad (n=0, 1, \cdots; \nu=0, 1, \cdots n).$$

Die Ordnug p sei eine beliebige komplexe Zahl mit $p\neq 0$, unter 0^0 sei 1 verstanden. E_1 ist die Einheitsmatrix. Ist $\{s_n\}$ $(n=0, 1, \cdots)$ mit

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

eine Folge komplexer Zahlen und p fest, so bezeichnen wir die Folge $\{t_n\}$ mit

$$t_n=E_p(n; s_\nu)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}p^\nu(1-p)^{n-\nu}s_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

als die E_p-Transformation von $\{s_n\}$ in der Folge-Folge-Form (FF-Form). Die entsprechende Reihe-Reihe-Transformation (RR-Form) ist

$$t_n=\sum_{\nu=0}^{n}v_\nu=a_0+\sum_{\nu=0}^{n-1}p\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}p^\mu(1-p)^{\nu-\mu}a_{\mu+1}.$$

Wenn $\{t_n\}$ gegen s für $n\to\infty$ konvergiert, so nennen wir $\{s_n\}$ zum Wert s E_p-limitierbar oder $\sum_{n=0}^\infty a_n$ zum Wert s E_p-summierbar und schreiben

$$E_p\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n=s \qquad \text{oder} \qquad E_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s.$$

Das Verfahren E_p ist, wie wohl bekannt ist, genau dann permanent, wenn $0<p\leqq 1$, d.h. aus $\lim s_n=s$ folgt E_p-$\lim s_n=s$. Für dieses Verfahren bewies Meyer-König [7] den folgenden

SATZ E. *Es sei $p\neq 0$ und es besitze das Funktionselement*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}s_nz^n \tag{1.1}$$

einen positiven Konvergenzradius. Dann stimmt die Folge der Teilsummen der in der Umgebung von $z=\infty$ gewiß vorhandenen Entwicklung der Funktion $f(1/z)$ nach Potenzen von $\{z-(p-1)/p\}^{-1}$ für $z=1$ überein mit der Folge $E_p(n; s_\nu)$, so daß also dann und nur dann E_p-$\sum_{n=0}^\infty a_n=s$ ist, wenn die genannte Entwicklung für $z=1$ zum Wert s konvergiert.

BEMERKUNGEN ZU SATZ E. Die Voraussetzung für das Funktionselement (1. 1) schränkt die Anwendbarkeit des Satzes auf E_p-summierbare Reihen nicht ein. Der Beweis von Meyer-König läßt sich leicht auf beliebige komplexe Ordnung p mit $p\neq 0$ übertragen.

Über die Verträglichkeit aller E_p-Verfahren bewies schon Agnew [1] den folgenden

SATZ I. *Irgend zwei Verfahren E_p und E_q ($p \neq 0$, $q \neq 0$) sind verträglich.*

Meyer-König und Zeller [3] brachten einen neuen Beweis davon.

II. *Das B_q-Verfahren.* Das verallgemeinerte Borel-Verfahren von Knopp definieren wir nach der Bezeichnung von Meyer-König und Zeller [8] als das zu der Matrix B_q gehörige Folge-Folge-Verfahren. Dabei habe B_q die Elementen

$$(B_q)_{x,\nu} = \frac{1}{\nu!} e^{-qx}(qx)^\nu \qquad (x>0\,;\ \nu=0, 1, \cdots).$$

Die Ordnung q sei eine beliebige komplexe Zahl, jedoch sei $q \neq 0$. B_1 ist die gewöhnliche Borel-Matrix B. Eine Rechnung, die zuerst Knopp ausgeführt hat, liefert bekanntlich die Matrixbeziehung

$$B_q E_p = B_{qp} \qquad (p \neq 0,\ q \neq 0).$$

Genau dann ist B_q permanent, wenn q reell und positiv ist. Ist $q/p>0$, so sind die Verfahren B_q und B_p offenbar äquivalent.[1]

Das B_q-Verfahren ($q \neq 0$) ist auf die Folge $\{s_n\}$ genau dann *anwendbar*, d. h.

$$\sigma(x) = B_q(x\,;\,s_\nu) = e^{-qx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x^\nu}{\nu!} s_\nu$$

ist genau dann für alle $x>0$ vorhanden, wenn $\sum (a_n/n!) z^n$ für alle z konvergiert, d. h. wenn

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n$$

eine ganze Funktion von z ist. Dies sei jetzt der Fall. Dann ist auch $\sigma(z)$ eine ganze Funktion von z; weiter ist für alle z

$$\sigma'(z) = q e^{-qz} \varphi(qz).$$

Somit ist

$$\sigma(z) = a_0 + q \int_0^z e^{-q\zeta} \varphi(q\zeta)\, d\zeta = a_0 + \int_0^{qz} e^{-\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei das letzte Integral längs eines beliebigen von 0 nach qz führenden Weges zu erstrecken ist. B_q-$\lim s_n = s$ heißt nun also, daß

$$\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{konvergent zur Summe} \quad s - a_0$$

mit $q = |q| e^{i\theta}$ ($0 \leqq \theta < 2\pi$) ist. Dabei bedeute $\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty}$ das in der ζ-Ebene längs desjenigen Halbstrahls zu erstreckende Integral, der von $\zeta=0$ ausgeht und durch $\zeta = e^{i\theta}$ läuft.

---

1) Aus B_q-$\lim s_n = s$ folgt B_p-$\lim s_n = s$ und umgekehrt. Wir schreiben $B_q \cong B_p$.

Ist $B_q\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$, so sprechen wir von *regulärer*, bzw. *singulärer B_q-Summierbarkeit*, wenn das Funktionselement

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

vom Konvergenzradius r $(0\leqq r\leqq\infty)$ bei $z=0$ regulär, bzw. singulär ist. Der folgende fundamentale Satz ist schon bekannt (vgl. Doetsch [2] S. 384, Meyer-König und Zeller [8]).

SATZ B. *Es sei $q=|q|e^{i\theta}$ mit $0\leqq\theta<2\pi$. Ist B_q auf $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ anwendbar, so ist diese Reihe dann und nur dann regulär B_q-summierbar zum Wert s, wenn das Funktionselement $f(z)$ bei $z=0$ regulär ist und wenn die in einer durch*

$$z=z_0+\frac{\rho}{q}e^{i\gamma}\qquad \left(z_0=|z_0|e^{-i\theta}\ fest,\ z_0\neq 0;\ \rho>0,\ -\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$$

charakterisierten, weder den Ursprung noch den Punkt $z=1$ enthaltenden offenen Halbebene H_0 geltende Gleichung mit gesicherter Kovergenz des Integrals

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=a_0+\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty}e^{-z\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

für $z=1$ zum Wert s konvergiert, wobei

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}\zeta^n$$

(*vgl. Fig.* 1).

Meyer-König und Zeller [8] bewiesen die folgenden Sätze II, III, IV über die

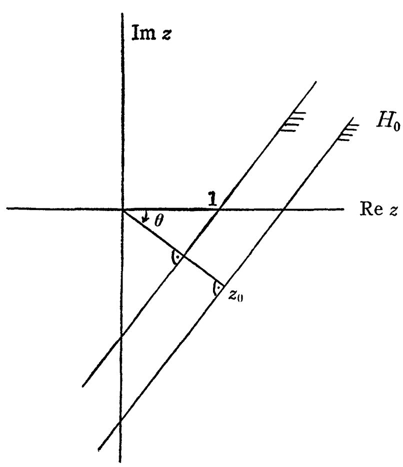

Fig. 1

Verfahren E_p und B_q mit komplexer Ordnung.

SATZ II. *Aus* E_p-$\lim s_n = s$ *folgt* B_p-$\lim s_n = s$ (p *fest*, $p \neq 0$).[2]

SATZ III. *Gegeben seien die Ordnungen* p *und* q ($|p|=|q|=1$). *Ist* $q \neq p$, *so sind* B_p *und* B_q *nicht verträglich. Ist* $q \neq -p$, *so sind* B_p *und* B_q *verträglich, wenn es sich um reguläre Summierbarkeit handelt. Ist* $q=-p$, *so sind* B_p *und* B_q *auch dann nicht verträglich, wenn man sich auf reguläre Summierbarkeit beschränkt.*

SATZ IV. *Gegeben seien die Ordnungen* p *und* q ($p \neq 0$, $|q|=1$). *Dann sind die Verfahren* E_p *und* B_q *verträglich.*

Wir arbeiten im folgenden stets mit der regulären Summierbarkeit des B_q-Verfahrens.

III. *Das* S_α-*Verfahren.* Wir definieren das S_α-Verfahren von Meyer-König [6] und Vermes [10] als das zu der Matrix

$$(S_\alpha)_{n,\nu} = (1-\alpha)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu \qquad (n, \nu = 0, 1, \cdots)$$

gehörige Limitierungsverfahren in der Folge-Folg-Form. Dabei sei die Ordnung α eine beliebige komplexe Zahl, jedoch seien $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$. Das Verfahren S_α ist dann und nur dann auf eine Folge $\{s_n\}$ anwendbar, wenn sie der Bedingung

$$s_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^n |\alpha|^\nu}\right) \text{ für jedes feste } n=0, 1, \cdots \text{ bei } \nu \to \infty$$

genügt. In diesem Fall heißt die Folge $\{t_n\}$ mit

$$t_n = S_\alpha(n; s_\nu) = (1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^\nu s_\nu \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

die S_α-Transformation (FF-Form) von $\{s_n\}$. Die Anwendbarkeit von S_α auf $\{a_n\}$ ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von S_α auf $\{\sum_{\nu=0}^n a_\nu\}$ (vgl. Meyer-König [6]). Liegt die Anwendbarkeit vor, so nenen wir S_α auf $\sum_{n=0}^\infty a_n$ anwendbar, und unter der S_α-Transformation von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ in der RR-Form verstehen wir die Reihe $\sum_{n=0}^\infty v_n$ mit den Teilsummen

$$t_n^* = \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu = a_0 + \alpha\sum_{\nu=0}^{n}(1-\alpha)^\nu\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{\mu}\alpha^\mu a_{\mu+1}.$$

Konvergiert $\{t_n^*\}$ gegen s, so nennen wir $\sum_{n=0}^\infty a_n$ zu diesem Wert S_α-summierbar und schreiben

$$S_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = s.$$

Für $0<\alpha<1$ sind diese beide S_α-Verfahren in der FF-Form und in der RR-Form permanent.

---

2) Wir schreiben $E_p \subseteqq B_p$.

Ist S_α auf $\sum_{n=0}^\infty a_n$ anwendbar, so ist die Funktion $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ (mindestens) in $|z|<|\alpha|$ regulär. Wir nennen nun eine S_α-summierbare Reihe *regulär S_α-summierbar*, wenn die ihr zugeordnete Funktion $f(z)$ auch noch beim Punkt $z=\alpha$ regulär ist. Meyer-König [7] bewies den folgenden fundamentalen

SATZ S. *Ist S_α auf $\sum_{n=0}^\infty a_n$ anwendbar* (α *fest*, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$), *so ist diese Reihe dann und nur dann regulär S_α-summierbar zum Wert s, wenn die Funktion $f(1/z)$ bei $z=1/\alpha$ regulär ist und wenn ihre Entwicklung nach Potenzen von $z-1/\alpha$ für $z=1$ zum Wert s konvergiert.*

Der Beweis von Meyer-König für $0<\alpha<1$ läßt sich leicht auf beliebige komplexe Ordnung α mit $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$ übertragen.

Für $|\alpha|\geqq 1$ sind die FF-Form und die RR-Form des S_α-Verfahrens nicht mehr äquivalent. Wir arbeiten im folgenden stets mit der RR-Form sowie mit der regulären Summierbarkeit des S_α-Verfahrens.

IV. *Das T_α-Verfahren.* Im Anschluß an Hardy, Littlewood und Fekete definieren wir das T_α-Verfahren als das zu der Matrix

$$(T_\alpha)_{n,\nu}=(1-\alpha)^{n+1}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n} \qquad (n,\nu=0,1,\cdots)$$

gehörige Limitierungsverfahren in der Folge-Folge-Form, das wir mit Wais [11] als Taylorsches Verfahren der Ordnung α bezeichnen. Die Ordnung α sei eine beliebige komplexe Zahl, jedoch seien $\alpha\neq 0$ und $\alpha\neq 1$. Das Verfahren T_α ist dann und nur dann auf eine Folge $\{s_n\}$ anwendbar, wenn sie der Bedingung

$$s_\nu=O\left(\frac{1}{\nu^n|\alpha|^\nu}\right) \text{ für jedes feste } n=0,1,\cdots \text{ bei } \nu\to\infty$$

genügt. In diesem Fall heißt die Folge $\{t_n\}$ mit

$$\begin{aligned} t_n=T_\alpha(n;s_\nu)&=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=n}^\infty\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}s_\nu \\ &=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{\nu=0}^\infty\binom{n+\nu}{n}\alpha^\nu s_{n+\nu} \end{aligned}$$

die T_α-Transformation (FF-Form) von $\{s_n\}$. Die Anwendbarkeit von T_α auf $\{a_n\}$ ist gleichbedeutend mit der Anwendbarkeit von T_α auf $\{\sum_{\nu=0}^n a_\nu\}$ (vgl. Meyer-König [6]). Liegt die Anwendbarkeit vor, so nennen wir T_α auf $\sum_{n=0}^\infty a_n$ anwendbar, und unter der T_α-Transformation von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ in der RR-Form verstehen wir die Reihe $\sum_{n=0}^\infty v_n$ mit den Teilsummen

$$t_n{}^*=\sum_{\nu=0}^n v_\nu=\sum_{\nu=0}^n(1-\alpha)^\nu\sum_{\mu=0}^\infty\binom{\nu+\mu}{\mu}\alpha^\mu a_{\nu+\mu}.$$

Konvergiert $\{t_n{}^*\}$ gegen s, so nennen wir die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ zu diesem Wert T_α-summierbar und schreiben

$$T_\alpha\text{-}\sum_{n=0}^\infty a_n=\sum_{n=0}^\infty v_n=s.$$

Für $0<\alpha<1$ sind diese beide T_α-Verfahren in der FF-Form und in der RR-Form permanent.

Ist T_α auf $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ anwendbar, so ist die Funktion $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (mindestens) in $|z|<|\alpha|$ regulär. Wir nennen nun eine T_α-summierbare Reihe *regulär T_α-summierbar*, wenn die ihr zugeordnete Funktion $f(z)$ auch noch beim Punkt $z=\alpha$ regulär ist. Meyer-König [6] bewies den folgenden fundamentalen

SATZ T. *Ist T_α auf $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ anwendbar (α fest, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$), so ist diese Reihe dann und nur dann regulär T_α-summierbar zum Wert s, wenn die Funktion $f(z)$ bei $z=\alpha$ regulär ist und wenn ihre Entwicklung nach Potenzen von $z-\alpha$ für $z=1$ zum Wert s konvergiert.*

Der Beweis von Meyer-König für $0<\alpha<1$ läßt sich leicht auf beliebige komplexe Ordnung α mit $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ übertragen.

Für $|\alpha| \geqq 1$ sind die FF-Form und die RR-Form des T_α-Verfahrens nicht mehr äquivalent. Wir arbeiten im folgenden stets mit der RR-Form sowie mit der regulären Summierbarkeit des T_α-Verfahrens.

§ 2. Vergleich der Verfahren S_α und S_β.

Nach dem Abelschen Grenzwertsatz (Stolzsche Verallgemeinerung) bewies Strasser [9] den folgenden

SATZ V. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und β. In folgenden Fällen liegt Verträglichkeit zwischen den zugehörigen Verfahren S_α und S_β vor:*

(a) $|\alpha|>1$, *β beliebig,*

(b) $|\alpha|=1$, $|\beta|=1$ ($\beta=-1$ *zugelassen*),

(c) $|\alpha| \leqq 1$, $\beta \neq \dfrac{\alpha}{\alpha+k(1-\alpha)}$ $(k<0)$.

Zunächst beweisen wir den folgenden

SATZ 1. *Das Verfahren S_α mit $|\alpha| \leqq 1$ und die gewöhnliche Konvergenz sind verträglich.*

Beweis. Ist α reell, so ist die Behauptung klar nach Satz 5 von Strasser [9] (vgl. [5], 6.5), denn die Konvergenz ist das E_1-Verfahren. Ist α nicht reell, so ist die Zahl $\alpha/\{\alpha+k(1-\alpha)\}$ $(k<0)$ auch nicht reell. Nach (c) des Satzes V, sind die Verfahren S_α und $S_{1/2}$ verträglich. Da das Verfahren $S_{1/2}$ permanent ist, folgt die Behauptung.

Wir untersuchen jetzt die Fälle, die er ausschloß.

SATZ 2. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und β.* (a) *Sind $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$ und $\beta=\alpha/\{\alpha+k(1-\alpha)\}$ $(k<0)$, so sind die Verfahren S_α und S_β nicht verträglich.* (b) *Sind $|\alpha|=1$ und $|\beta|<1$, so sind die Verfahren S_α und S_β verträglich.*

Beweis. (a) Für den Beweis in diesem Fall benutzen wir einen Satz von Fejér wie bei [5, Beweismethode III]. Die Entwicklungskreise $S_{\alpha z}$ und $S_{\beta z}$ der zugehörigen Verfahren S_α un S_β (vgl. Satz S) liegen auf verschiedenen Seiten des Punktes $z=1$, wobei

$$S_{\alpha z}: \quad \left|z-\frac{1}{\alpha}\right|<\left|1-\frac{1}{\alpha}\right|$$

und

$$S_{\beta z}: \quad \left|z-\frac{1}{\beta}\right|<\left|1-\frac{1}{\beta}\right|$$

sind.

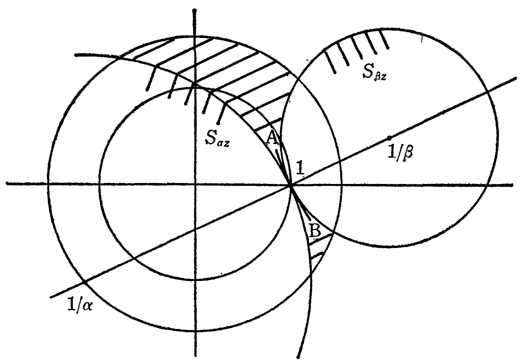

Fig. 2

In den abgeschlossenen Zwickel, der von den Kreisen $S_{\alpha z}$ und $S_{\beta z}$, sowie demjenigen der beiden Kreise $|z|=1/|\alpha|$ und $|z|=1/|\beta|$, der den kleineren Radius besitzt, begrenzt wird, legen wir einen kreisförmigen oder geradlinigen Schlitz mit den Endpunkten A und B so, daß dieser Schlitz symmetrisch zur Strecke durch die Punkte $z=1/\alpha$ und $z=1/\beta$ liegt und durch den Punkt $z=1$ hindurchgeht (vgl. Fig. 2).

Dann bekommen wir die Abbildung $w=F(z)$ von der z-Ebene auf den inneren Teil des Einheitskreises in der w-Ebene. Der Schlitz AB geht auf den Einheitskreis über, und die Gebiete $S_{\alpha z}$ und $S_{\beta z}$ gehen auf die Gebiete $S_{\alpha w}$ und $S_{\beta w}$ über (vgl. Fig. 3). Wir setzen nun

$$w=F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Nach einem Satz von Fejér[3] [3] über die Konvergenz der Potenzreihe anf ihrem Konvergenzkreis gibt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ein Beispiel für die Unverträglichkeit der Verfahren S_α und S_β.

(b) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ S_α-anwendbar ($|\alpha|=1$), so muß die Reihe

3) Vgl. Satz VI.

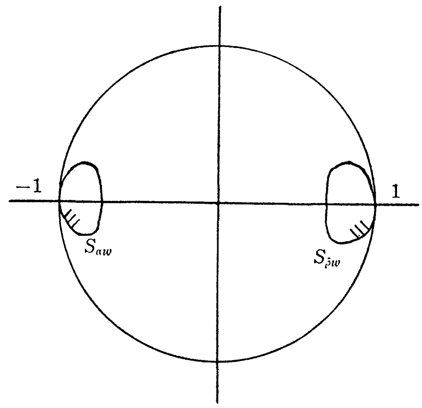

Fig. 3

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\nu+\mu}{\mu}\alpha^{\mu}a_{\mu+1}$$

für jede positive ganze Zahl ν konvergieren. Wegen

$$\binom{\nu+\mu}{\mu}\cong\frac{\mu^{\nu}}{\nu!}\qquad\text{bei}\quad\mu\to\infty$$

ist

$$a_{\mu+1}=o\left(\frac{1}{\mu^{\nu}|\alpha|^{\mu}}\right)$$

für jedes ν bei $\mu\to\infty$. Hieraus folgt

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}|a_{\mu}|<\infty.$$

Aus Satz 1 folgt die Behauptung.

Wir zitieren hier den Satz von Fejér [3] in der originalen Form.

SATZ VI. *Ist die Summe der für $|z|<1$ konvergenten Potenzreihe*

$$c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n\cdots$$

für $|z|\leqq1$ stetig, und entwirft sie auf die Ebene der Funktion ein schlichtes Bild des Innern des Einheitskreises $|z|<1$, so ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ am ganzen Einheitskreise $|z|=1$ gleichmäßig konvergent.

§ 3. Vergleich der Verfahren S_α und E_p.

Nach dem Abelschen Grenzwertsatz bewies Strasser [9] den folgenden

SATZ VII. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und p. In folgenden Fällen liegt Verträglichkeit zwischen den zugehörigen Verfahren S_α und E_p vor:*

(a) $|\alpha|>1$, p *beliebig,*

(b) $|\alpha|\leqq 1$, $p\neq k\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ $(k<0)$.

Wir untersuchen nun die Fälle, die er ausschloß.

SATZ 3. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und p.* (a) *Ist $|\alpha|=1$ und p beliebig, so sind die Verfahren S_α und E_p verträglich.* (b) *Sind $|\alpha|<1$ und $p=k\alpha/(1-\alpha)$ $(-1\leqq k<0)$, so sind die Verfahren S_α und E_p nicht verträglich.* (c) *$|\alpha|<1$ und $p=k\alpha/(1-\alpha)$ $(k<-1)$, so sind die Verfahren S_α und E_p verträglich.*

Beweis. (a) Wie beim Beweis des Satzes 2 (b) ist die S_α-anwendbare Reihe mit $|\alpha|=1$ konvergent. Da das Verfahren E_1 die gewöhnliche Konvergenz, folgt die Behauptung aus Satz I.

(b) Wir beweisen den Satz in diesem Fall nach dem Fejérschen Satz wie beim Beweis des Satzes 2 (a). In diesem Fall haben die Entwicklungsgebiete $S_{\alpha z}$ und E_{pz} der Funktion

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{1}{z^n}$$

für die Verfahren S_α und E_p (vgl. Sätze S und E) keinen gemeinsamen Teil, und die Kreise liegen auf der gleichen Seite des Punktes $z=1$.

In den abgeschlossenen Zwickel, der von den Kreisen $S_{\alpha z}$ und E_{pz}, sowie vom Kreis $|z|=1/|\alpha|$ begrenzt wird, legen wir einen kreisförmigen Schlitz mit den Endpunkten A und B so, daß dieser Schlitz symmetrisch zur Strecke durch die Punkte $z=1/\alpha$ und $z=1-1/p$ liegt und durch den Punkt $z=1$ hindurchgeht (vgl. Fig. 4).

Dann bekommen wir die Abbildung $w=F(z)$ von der z-Ebene auf den inneren Teil des Einheitskreises in der w-Ebene. Wir setzen nun

$$z=F(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{1}{z^n}.$$

Nach Satz VI von Fejér gibt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ein Beispiel für die Unverträglichkeit der Verfahren S_α und E_p.

(c) Wir beweisen zunächst den folgenden

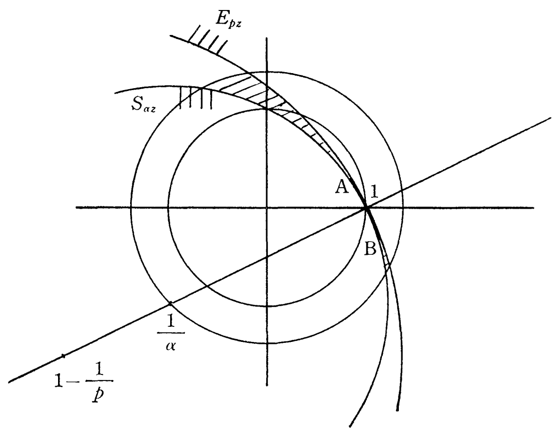

Fig. 4

HILFSSATZ 1.[4] *Sei* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *sei* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *die* S_α*-Transformation (RR-Form) von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit* $|\alpha|<1$ *und sei die Folge* $\{b_n\}$ *beschränkt. Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *die* E_p*-Transformation (RR-Form) von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und sei die Folge* $\{c_n\}$ *beschränkt. Sei ferner* $p=k\alpha/(1-\alpha)$ $(k<-1)$. *Dann ist* $f(1/z)$ *abgesehen vom Punkt* $z=1$ *regulär in der vollen z-Ebene einschließlich des Punktes* $z=\infty$, *und zwar ist* $g(w)=f(w/(w+1))$ *ein Polynom von höchstens zweitem Grad (vgl. Fig.* 5).

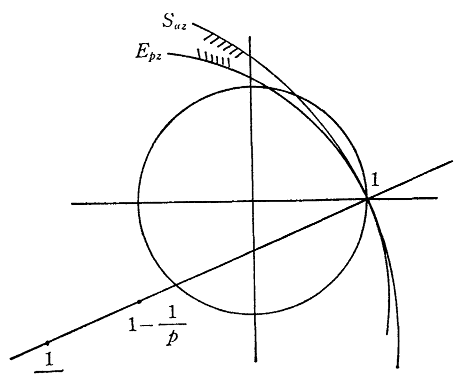

Fig. 5

Beweis. Es sei $|b_n|\leqq M$ und $|c_n|\leqq M$ $(n=0, 1, \cdots)$. Nach Satz S haben wir die Entwicklung

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-n}\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$

4) Vgl. Meyer-König und Zeller [8], Hilfssatz 1.

Setzen wir hier $z=1+1/w$, so erhalten wir

$$g(w)=f\left(\frac{w}{w+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left\{1+\frac{1}{w(1-1/\alpha)}\right\}^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(1-\frac{p}{kw}\right)^n.$$

Da $|b_n|\leqq M$ ist, ist $g(w)$ regulär für

$$\left|1-\frac{p}{kw}\right|<1, \tag{3.1}$$

und weiter gilt dort

$$|g(w)|\leqq\frac{M}{1-|1-p/kw|}.$$

Nun seien $w=u+iv$ und $p=r+is$. Dann ist das Gebiet (3. 1)

$$ru+sv-\frac{r^2+s^2}{2k}<0. \tag{3.2}$$

$g(w)$ ist regulär im Gebiet (3. 2), und dort gilt

$$|g(w)|\leqq\frac{M|w|\{|w|+|w-p/k|\}}{|w|^2-|w-p/k|^2}. \tag{3.3}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die E_p-Transformation von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist, haben wir die Entwicklung

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^n\{z-(p-1)/p\}^n}.$$

Wir setzen $z=1+1/w$ und dann erhalten wir

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{w}{w+p}\right)^n.$$

Wegen $|c_n|\leqq M$ ist $g(w)$ regulär für

$$\left|1+\frac{p}{w}\right|>1, \tag{3.4}$$

und dort gilt

$$|g(w)|\leqq\frac{M}{1-|w/(w+p)|}. \tag{3.5}$$

Das Gebiet (3. 4) ist

$$ru+sv+\frac{r^2+s^2}{2}>0 \tag{3.6}$$

(vgl. Fig. 6).

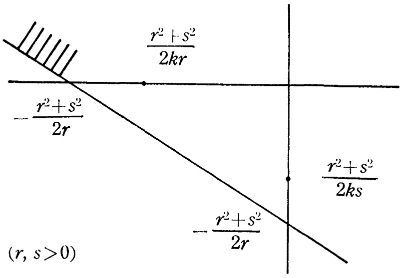

Fig. 6

$g(w)$ ist regulär für w in (3. 6) und dort gilt

$$|g(w)| \leqq \frac{M|w+p|\{|w+p|+|w|\}}{|w+p|^2-|w|^2}. \tag{3. 7}$$

Aus (3. 2), (3. 3), (3. 6) und (3. 7) zusammen ist $g(w)$ ein Polynom von höchstens zweitem Grad wie bei Meyer-König und Zeller [8], Hilfssatz 1, z. B.

$$g(w)=d_0+d_1w+d_2w^2.$$

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ regulär S_α-summierbar, so ist die Funktion $f(1/z)$ regulär bei $z=1/\alpha$, und ihre Entwicklung nach Potenzen von $z-1/\alpha$ konvergiert für $z=1$. Also hat die analytische Funktion $f(1/z)$ einen endlichen Wert bei $z=1$. $g(w)$ bleibt daher beschränkt für $w\to\infty$. Somit ist $d_1=d_2=0$ und $a_0=d_0$, $a_1=a_2=\cdots=0$, d. h. $\{s_n\}$ konstante Folge $\{d_0, d_0, \cdots\}$, woraus folgt die Behauptung (c).

§ 4. Vergleich der Verfahren S_α und B_q.

Strasser [9] bewies den folgenden Satz nach dem Abelschen Grenzwertsatz.

SATZ VIII. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und $q=e^{i\theta}$. In folgenden Fällen liegt Vertäglichkeit zwischen den zugehörigen Verfahren S_α und B_q vor:*

(a) $\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0$, $q=\pm 1$,

(b) $|\alpha|>1$, *θ beliebig* $(0<\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi)$,

(c) $|\alpha|\leqq 1$, $\frac{1}{\alpha}\neq 1-\rho e^{-i\theta}$ $(\rho>0;\ 0<\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi)$.

Wir untersuchen nun die Fälle, die er ausschloß.

SATZ 4. *Gegeben seien die komplexen Parameter α und $q=e^{i\theta}$.* (a) *Ist $|\alpha|=1$ und θ beliebig $(0\leqq\theta<2\pi)$, so sind die Verfahren S_α und B_q verträglich.* (b) *Sind $|\alpha|<1$ und $1/\alpha=1-\rho e^{-i\theta}$ ($\rho>0$, $0\leqq\theta<2\pi$, so sind die Verfahren S_α und B_q nicht verträglich.*

Beweis. (a) Wie beim Beweis des Satzes 2 (b) ist die S_α-anwendbare Reihe ($|\alpha|=1$) konvergent. Die Behauptung folgt aus Satz IV, da die gewöhnliche Konvergenz das E_1-Verfahren ist.

(b) Nach der Voraussetzung und dem Satz 3 (b) sind das Verfahren S_α mit $|\alpha|<1$ und das Verfahren E_p mit

$$-\rho e^{-i\theta}=\frac{1}{\alpha}-1=\frac{k}{p} \quad (-1\leqq k<0)$$

nicht verträglich. Nach Satz II gilt $E_p\subseteqq B_p$. Da $p=|k/\rho|e^{i\theta}$ ist, sind die Verfahren B_p und B_q äquivalent (vgl. § 1, II), so daß die Verfahren S_α und B_q nicht verträg lich sind (vgl. Fig. 7).

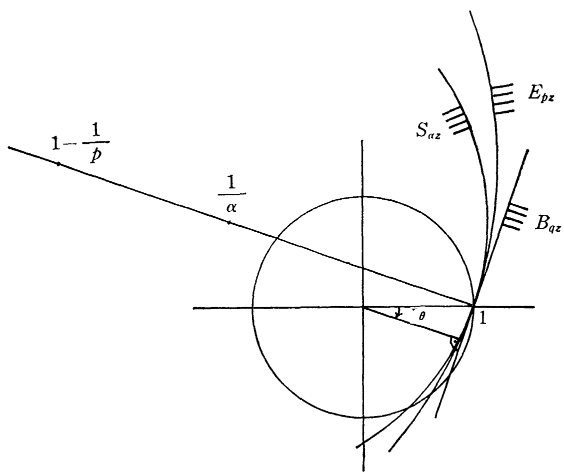

Fig. 7

Schriftenverzeichnis

[1] Agnew, R. P., Euler transformations. Amer. J. Math. **66** (1944), 313–338.

[2] Doetsch, G., Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation. 581 S., Basel (1950).

[3] Fejér, L., Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene. Math. Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem fünfzig-jährigen Doktorjubiläum (1914), 42–53.

[4] Hardy, G. H., Divergent series. 396 S., Oxford (1949).

[5] Ishiguro, K., W. Meyer-König, und F. Strasser, Über die Verträglichkeit der Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei reellen Ordnungen. Math. Zeitschr. **120** (1971), 107–123.

[6] Meyer-König, W., Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Zeitschr. **52** (1949), 257–304.

[7] MEYER-KÖNIG, W., Die E_p- und S_α-Summierbarkeit einer Potenzreihe an der Konvergenzgrenze. Math. Zeitschr. **52** (1949), 344–354.

[8] MEYER-KÖNIG, W., UND K. ZELLER, Euler-Knopp und Borel-Verfahren komplexer Ordnung. Math. Zeitschr. **82** (1963), 394–402.

[9] STRASSER, F., Über die Verträglichkeit der Verfahren E_p, B_q und S_α der Limitierungstheorie. Dissertation Stuttgart. 37 S. (1967).

[10] VERMES, P., Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer. J. Math. **71** (1949), 541–562.

[11] WAIS, R., Das Taylorsche Summierungsverfahren. Dissertation Tübingen. 58 S. (1935).

[12] ZELLER, K., UND W. BEEKMANN, Theorie der Limitierungsverfahren. 2 Aufl. 314 S., Berlin-Heidelberg-New York (1970).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
HOKKAIDO UNIVERSITY, SAPPORO.