ZUSATZ UND BERICHTIGUNG FÜR MEINE MITTEILUNG "ZUM BEWEIS DER VERALLGEMEINERUNG DES FIXPUNKTSATZES" IN DIESEN REPORTS, BD.5, NR.1. 1953.

Von Hukukane NIKAIDO

(Vorgelegt von S. Ikehara)

1. Der Vollständigkeit meiner Mitteilung halber zeige ich hier einen Beweis des von Neumann-Kakutanischen Fixpunktsatzes für die endlich dimensionalen Fälle. Die Methode liegt darin, dass von Neumannsche originale Verfahren(1) einfacher und kürzer zu machen. Ebenso stimmt sie im wesentlichen mit dem Kakutanischen Beweis überein, wenn man sich der simplizialen Abbildungen bedient(2). Ich muss deshalb im besonderen betonen, dass sie nichts anderes als eine weitere Modifizierung ihrer Ergebnisse ist.

Satz (von Neumann-Kakutani). Es sei X eine kompakte konvexe Menge in einem n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n. Es sei ferner $f(x)$ eine nach oben halbstetige Transformation, die zu jedem Punkt $x \in X$ eine abgeschlossene konvexe Untermenge $f(x)$ von X entsprechen lässt. Dann gibt es einen Punkt $\hat{x}$ mit $\hat{x} \in f(\hat{x})$.

Beweis. Da X kompakt ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε-Netz $\{a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, \ldots\ldots, a_{s_\varepsilon}^\varepsilon\}$. Weiter setzen wir

$$\varphi_i^\varepsilon(x) = \mathrm{Max}\,[0, \varepsilon - \rho(x, a_i^\varepsilon)] \quad (i = 1, 2, \cdots, s_\varepsilon),$$

wobei $\rho(x, a_i^\varepsilon)$ der Abstand von x zu a_i^ε ist. Somit bekommen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Transformation,

$$\Phi^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{s_\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x) b_i^\varepsilon \Big/ \sum_{i=1}^{s_\varepsilon} \varphi^\varepsilon_i(x),$$

wobei b_i^ε ein beliebiger Punkt von $f(a_i^\varepsilon)$, z. B. ihr Schwerpunkt ist.

Wir wählen eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ von positiven Zahlen und eine Punktfolge $\{x_n\}$ mit den folgenden Bedingungen:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi^{\varepsilon_n}(x_n) = x_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x};$$

Das ist möglich wegen der Kompaktheit von X und des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Wir behaupten nun: $\hat{x} \in f(\hat{x})$. Bezeichnen wir mit U_δ die sphärische Umgebung des Anfangspunktes von Radius $\delta > 0$.

Wegen der Halbstetigkeit von $f(x)$, gibt es eine positive Zahl γ, so dass $\gamma \leq \delta$, und

$$(*) \qquad f(x) \subset f(\hat{x}) + U_\delta$$

für $x \in X$ mit $\rho(x, \hat{x}) < \gamma$. Auf Grund von (I) und (II), kann man eine geeignete ganze Zahl p finden, so dass $\varepsilon_p < \gamma/2$, $\rho(x_p, \hat{x}) < \gamma/2$.

Nun, für $\varphi_i^{\varepsilon_p}(x_p) > 0$ haben wir $\rho(x_p, a_i^{\varepsilon_p}) < \varepsilon_p < \gamma/2$, und folglich $\rho(\hat{x}, a_i^{\varepsilon_p}) < \gamma$. Dann, wegen $(*)$, haben wir $b_i^{\varepsilon_p} \in f(a_i^{\varepsilon_p}) \subset f(\hat{x}) + U_\delta$ für alle i mit $\varphi_i^{\varepsilon_p}(x_p) > 0$.

Da $f(\hat{x}) + U_\delta$ konvex ist, besagt dies:

$$x_p = \Phi^{\varepsilon_p}(x_p) = \sum_{i=1}^{s_{\varepsilon_p}} \varphi_i^{\varepsilon_p}(x_p) b_i^{\varepsilon_p} \Big/ \sum_{i=1}^{s_{\varepsilon_p}} \varphi_i^{\varepsilon_p}(x_p) \in f(\hat{x}) + U_\delta;$$

was ergibt:

$$\hat{x} \in f(\hat{x}) + U_{\delta+\gamma} \subset f(\hat{x}) + U_{2\delta}.$$

Somit haben wir $\hat{x} \in f(\hat{x})$ wegen der Abgeschlossenheit von $f(\hat{x})$ und der Beliebigkeit von δ, w. z. b. w.

2. Ich möchte Professor Kakutani für seine schriftliche Auseinandersetzung dieses Problems meinen herzlichsten Dank abstatten.

3. Wenn die Ertragfunktion $K(x, y)$ des von Neumannschen Minimaxsatzes nur in bezug auf jede Veränderliche $x(y)$ für jeden fixen Wert $y(x)$ stetig ist, kann man sich nicht mehr auf dem von Neumann-Kakutanischen Fixpunktsatz beruhen lassen, um den Minimaxsatz zu beweisen. Aber, auch für diesen Fällen, können wir mit einer Methode einen Schritt weiter gehen, die unserem Beweisverfahren ähnlich ist. Was dieses Verhaltnis betrifft, man siehe meine in kurzem in Pacific J. Math. erscheinende Mitteilung: On von Neumann's Minimax Theorem.

4. Wir verbessern einige Formeln in der im Titel genannten Mitteilung, weil der Verfasser die Gelegenheit nicht gehabt hat, den Korrekturabzug zu lesen; daran ist er doch ganz schuld. Die folgenden Verbesserungen enthalten triviale Druckfehlerberichtigungen nicht, die ihrem Charakter nach stilistisch sind:

S. 15, rechts, Zeile 11 von unten lies: "kompakt" statt "in X abgeschlossen".

S. 15, rechts, Zeile 7 von unten lies: "$(a+V) \cap (f(a)+\bar{U}+V) \cap X = \phi$" statt Formel (12).

S. 15, rechts, Zeile 3 von unten lies: "V" statt "$\bar{U}$".

(1) Siehe J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungs-system und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergeb. Math. Kolloq. Heft 8 (1935-1936)

(2) Siehe S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem Duke Math. J. Vol.8, No.3 (1941).

Addendum:

[6] I. L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952).

(Der Verfasser dankt Professor Glicksberg, der ihm das Extractum dieses Werkes freundlichst geschenkt hat).

Naturwissenschaftliche Hochschule zu Tokyo.

(*) Eingegangen am 9. Okt., 1953.