T. V DUC
KODAI MATH. J.
1 (1978), 205—212

FIBRES VECTORIELS FEUILLETES

PAR TONG VAN DUC

§ 1. Connexions partielles.

Soit (E, p, M) un fibré vectoriel et soit $(VE, \bar{p}, E)$ son fibré vertical.

DEFINITION. Une connexion linéaire C sur (E, p, M) est la donnée d'un sous-fibré vectoriel $(HE, \bar{\bar{p}}, E)$ de TE telle que :

1) $T_{\hat{z}}E=VE_{\hat{z}}\oplus HE_{\hat{z}}$

2) $h_a^T HE_{\hat{z}}=HE_{a\hat{z}}, \quad \forall a\in R_+^*$ et $\forall \hat{Z}\in E$.

Soient Γ et H les projections de TE sur VE et HE. Γ s'appelle la forme de connexion de C. $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, on désigne par D_X la dérivée covariante définie par C et par d la différentielle extérieure associée à D_X.

On rappelle que C induit une connexion linéaire $\bar{C}$ sur le fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$.

Soit $B(E)=\sum_{q=0}^{\infty} B_q(E)$ l'algèbre de Lie graduée des formes vectorielles sur la variété E munie du crochet de Nijenhuis [2]. On définit un opérateur H^* sur $B(E)$ par :

$$H^*\Phi(A_1, \cdots, A_q)=\Phi(HA_1, \cdots, HA_q), \quad \forall\Phi\in B_q(E) \text{ et } \forall A_1, \cdots, A_q\in\mathfrak{X}(E)$$

$H^*\Phi$ est une forme semi-basique, i. e. $i_A H^*\Phi=0, \quad \forall A\in VE.$

On désigne par $\mathfrak{B}_q$ le $\mathfrak{F}(E)$-module des q-formes semi-basiques sur E à valeurs dans VE et on pose $\mathfrak{B}=\sum_{q=0}^{\infty}\mathfrak{B}_q$.

DEFINITION. La différentielle absolue d'une q-forme Φ sur E à valeurs dans VE est une $q+1$ forme notée $\nabla\Phi$ et définie par :

$$\nabla\Phi=\bar{d}(H^*\Phi).$$

PROPOSITION. *$\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $B(E)$ et ∇ est une dérivation de $\mathfrak{B}$, i. e. :*

$$(1) \qquad \nabla[\Phi, \Psi]=[\nabla\Phi, \Psi]+(-1)^q[\Phi, \nabla\Psi], \quad \forall\Phi\in\mathfrak{B}_q \text{ et } \forall\Psi\in\mathfrak{B}.$$

Received March 22, 1977.

Preuve: Si A est un champ vertical et si Φ est à valeurs dans VE, il en est de même de sa dérivée de Lie $\theta_A \Phi$. La première assertion découle alors de la formule (6) de la page 354 de [1] par un raisonnement de récurrence. D'autre part, on a montré que $\nabla\Phi = -[\Gamma, \Phi]$ et la deuxième assertion est une conséquence immédiate de la formule (2) de la même page.

DEFINITION. Une connexion linéaire partielle sur un fibré vectoriel (E, p, M) est un sous-fibré vectoriel F de TE tel que:

1) $F_{\hat{Z}} \cap VE_{\hat{Z}} = 0$
2) $h_a^T F_{\hat{Z}} = F_{a\hat{Z}}$, $\forall a \in \boldsymbol{R}_+^*$ et $\forall \hat{Z} \in E$,

où $F_{\hat{Z}}$ désigne la fibre de F au-dessus de $\hat{Z}$.

DEFINITION. Une connexion linéaire C sur (E, p, M) sera dite adaptée à une connexion linéaire partielle F si $\forall \hat{Z} \in E$, $HE_{\hat{Z}} \supset F_{\hat{Z}}$.

DEFINITION. Une connexion linéaire partielle F sur (E, p, M) sera dite plate si $\forall A, B \in F$, $[A, B] \in F$.

Dans la suite, par connexion (partielle), on entendra une connexion linéaire (partielle).

PROPOSITION. *Soit F une connexion partielle sur (E, p, M); les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *F est plate,*
2) *pour toutes les connexions adaptées à F, leur forme de courbure Ω vérifie*:
   (2) $\Omega(A, B) = 0$, $\forall A, B \in F$;
3) *si une connexion Γ est adaptée à F, sa forme de courbure vérifie* (2).

Preuve: La démonstration se fait exactement comme dans le cas d'un fibré principal muni d'une connexion partielle [3].

Dans ce qui suit, on considère un fibré vectoriel (E, p, M) muni d'une connexion partielle plate. Une telle connexion définit sur la variété E un feuilletage $\mathfrak{F}$ qu'on appelle feuilletage transerve.

DEFINITION. Une connexion Γ sur (E, p, M) adaptée à F sera dite basique si $\forall A \in F$, $\theta_A \Gamma = 0$.

LEMME. $\theta_A \Gamma = 0 \quad \forall A \in F \Leftrightarrow \iota_A \Omega = 0 \quad \forall A \in F$.

Preuve: On a:

$$\theta_A \Gamma(B) = [A, \Gamma B] - \Gamma[A, B]$$

et $$\Omega(A, B) = \Gamma[A, B] - \Gamma[A, \Gamma B], \quad \forall A \in F \text{ et } \forall B \in \mathfrak{X}(E).$$

Si $\theta_A\Gamma=0$, on a $[A, \Gamma B]=\Gamma[A, B]$; par suite $\Gamma[A, \Gamma B]=\Gamma[A, B]$ et $\iota_A\Omega=0$. Réciproquement, si $\iota_A\Omega=0$, en calculant la valeur de $\theta_A\Gamma$ respectivement sur les champs horizontaux et verticaux, on trouve $\theta_A\Gamma=0$.

Exemples de connexion basique.

Soient (E, p, M) un fibré vectoriel quelconque, f une application différentiable d'une variété N dans M et $f^*(E)=(E', p', N)$ l'image réciproque de (E, p, M) par f. Alors l'application canonique u de E' sur E définit une connexion partielle plate sur $f^*(E)$. Soient Γ une connexion sur (E, p, M) et Γ' l'image réciproque de Γ par f. Alors Γ' est une connexion basique adaptée à F. En effet, on a [(6), 1] :

$$u^T\circ\Gamma'=\Gamma\circ u^T.$$

Donc $\Gamma'(A)=0$, $\forall A\in F$ car q^T est un isomorphisme sur les fibres. D'autre part, soient Ω' et Ω les formes de courbures de Γ' et Γ et $A\in F$. On a :

$$u^T(\Omega'_{\hat{Z}}, (A, B))=\Omega_{u(\hat{Z}')}(u^TA, u^TB)=0, \quad \forall\hat{Z}'\in E' \text{ et } \forall B\in\mathfrak{X}(E').$$

Donc $i_A\Omega'=0$.

En particulier, le fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$ est muni d'un feuilletage canonique et pour toute connexion Γ sur (E, p, M), la connexion $\bar{\Gamma}$ est basique.

§ 2. Fibres vectoriels feuilletes.

A partir de maintenant, on ne considère que des fibrés vectoriels dont la base est munie d'un feuilletage $\mathcal{L}$. On désignera par L le sous-fibré vectoriel de TM constitué par des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{L}$.

DEFINITION. Un fibré vectoriel (E, p, M) est dit feuilleté s'il est muni d'un feuilletage transverse $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont des revêtements de feuilles de $\mathcal{L}$.

Soit F la connexion partielle plate qui définit $\mathcal{F}$ et soit Γ une connexion adaptée à F. La loi de dérivation correspondant à Γ se restreint à une application $\boldsymbol{R}$-bilinéaire D de $\underline{L}\times\underline{E}$ dans $\underline{E}$ qui possède les propriétés suivantes :

$$D_{fX}\hat{Y}=fD_X\hat{Y}, \quad \forall X\in\underline{L}, \quad \forall\hat{Y}\in E \text{ et } \forall f\in\mathcal{F}(M) \tag{3}$$

$$D_Xf\hat{Y}=fD_X\hat{Y}+Xf\hat{Y}.$$

Utilisant la définition de la dérivée covariante [1], on vérifie facilement que D ne dépend pas de la connexion adaptée Γ.

Puisque la connexion partielle est plate, il résulte du théorème 7 de [1] que :

$$D_XD_Y-D_YD_X-D_{[X,Y]}=0, \quad \forall X, Y\in\underline{L} \tag{4}$$

i. e. : $$R(X, Y)=D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}=0.$$

où R est la courbure de Γ.

DEFINITION. On appellera loi de dérivation partielle des sections d'un fibré vectoriel (E, p, M), toute application $\boldsymbol{R}$-bilinéaire de $\underline{L}\times\underline{E}$ dans $\underline{E}$ qui satisfait (3). De plus, si la condition (4) est remplie, la loi de dérivation sera dite plate.

Ainsi à chaque fibré vectoriel feuilleté est canoniquement associée une loi de dérivation partielle plate de ses sections. Réciproquement, soit D une telle loi sur les sections d'un fibré vectoriel (E, p, M). On peut prolonger D en une loi de dérivation. Soit Γ la connexion linéaire correspondante. Pout tout $\hat{Z}\in E$, on pose :

$$F_{\hat{Z}}=\operatorname{Ker}\Gamma_{\hat{Z}}\cap(p^T)^{-1}(L_{p(\hat{Z})}).$$

On obtient ainsi une connexion partielle F qui est plate d'après le théorème mentionné plus haut. Donc la donnée de D et de L fait de (E, p, M) un fibré vectoriel feuilleté.

Exemple de fibré vectoriel feuilleté.

Soit $f^*(E)=(E', p', N)$ l'image réciproque d'un fibré vectoriel (E, p, M) par une submersion f d'une variété N sur M. Alors (E, p, M) est feuilleté par les feuilletages définis par f et la projection canonique de E' sur E.

§ 3. Obstruction a l'existence d'une connexion basique.

Si l'existence sur un fibré vectoriel feuilleté d'une connexion adaptée est toujours assurée, il n'en est pas de même pour les connexions basiques comme on va le voir dans ce qui suit.

Soit Γ une connexion adaptée à un fibré vectoriel feuilleté (E, p, M). En utilisant le lemme de la page 374 de [1], on trouve encore :

$$\bar{d}\Gamma=\Omega.$$

On se donne une fois pour toutes un sous-fibré vectoriel Q de TE tel que $TE=Q\oplus F$.

DEFINITION. Une forme Φ sur la variété E à valeurs dans un fibré vectoriel quelconque sera dite de type (r, s) si $\Phi(A_1, \cdots, A_{r+s})=0$ chaque fois que la suite $A_1, \cdots, A_{r+s}$ contient plus de r vecteurs de Q ou plus de s vecteurs de F.

On désignera par $\bar{B}^{r,s}$ le $\mathcal{F}(E)$-module des formes de type (r, s) à valeurs dans VE.

Si $\Phi\in\bar{B}^{r,s}$, $\bar{d}\Phi$ se décompose en une somme de trois formes de type $(r, s+1)$, $(r+1, s)$ et $(r+2, s-1)$

$$d\Phi=\bar{d}_F\Phi+\bar{d}_F^1\Phi+\bar{d}_F^2F.$$

La forme de courbure Ω de Γ et la courbure $\bar{R}$ de $\bar{\Gamma}$ sont donc des sommes de 3 formes:

$$\Omega=\Omega^{2,0}+\Omega^{1,1}+\Omega^{0,2}$$

$$\bar{R}=\bar{R}^{2,0}+\bar{R}^{1,1}+\bar{R}^{0,2}$$

Puisque la connexion partielle est plate, $\Omega^{0,2}=0$. D'autre part, le lemme cité ci-dessus montre que $\bar{R}^{0,2}=0$.

Comme $\bar{d}^2\Phi=\bar{R}\wedge\Phi$, en calculant la composante de type $(r, s+2)$ de $\bar{d}^2\Phi$, on trouve $\bar{d}_F^2\Phi=0$. Pour chaque entier q, on a donc le complexe:

$$\bar{B}^{q,0}\xrightarrow{\bar{d}_F}\bar{B}^{q,1}\longrightarrow\bar{B}^{q,2}\longrightarrow\cdots\bar{B}^{q,r}\xrightarrow{\bar{d}_F}\cdots$$

$\bar{d}_F$ ne dépend pas de la connexion adaptée Γ. En effet, soit Γ' une autre connexion adaptée à F. Alors $\Psi=\Gamma'-\Gamma$ est une 1-forme semibasique de type $(1,0)$. Or:

$$\bar{d}'\Phi=\bar{d}\Phi+\Psi\wedge\Phi\in\bar{B}^{r,s}.$$

En calculant la composante de type $(r, s+1)$ des deux membres de l'égalité, on trouve:

$$\bar{d}'_F\Phi=\bar{d}_F\Phi.$$

Soit maintenant un sous-fibré vectoriel S de TM tel que $TM=S\oplus L$. En définissant les formes de type (r, s) comme précédemment, on voit que pour toute connexion adaptée Γ, $R^{0,2}=0$. Γ induit d'autre part une connexion Γ dans le fibré adjoint $\mathrm{End}(E)$ et on a:

$$\underline{R}(X, Y)h=R(X, Y)h-hR(X, Y),\quad \forall X, Y\in\mathfrak{X}(M) \text{ et } \forall h\in\mathrm{End}\,E.$$

Ainsi $\underline{R}^{0,2}=0$ et on a un complexe:

$$\mathcal{A}^{q,0}(M, \mathrm{End}\,E)\xrightarrow{\underline{d}_L}\mathcal{A}^{q,1}\longrightarrow\cdots\mathcal{A}^{q,r}\xrightarrow{\underline{d}_L}$$

où $\mathcal{A}^{q,r}$ désigne le $\mathcal{F}(M)$-module des formes de type (q, r) sur M à valeurs dans le fibré vectoriel $\mathrm{End}\,E$.

On vérifie encore que $\underline{d}_L$ ne dépend pas de Γ. Comme $\underline{d}R=0$, on en déduit $\underline{d}_L R^{1,1}=0$. Soit Γ' une autre connexion adaptée et soit $h:\mathfrak{X}(M)\times E\longrightarrow E$ définie par $h(X, \hat{Y})=D'_X\hat{Y}-D_X\hat{Y}$, $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$ et $\forall\hat{Y}\in\underline{E}$. Alors h considéré comme élément de $\mathcal{A}(M, \mathrm{End}\,E)$ est de type $(1,0)$ et on a: $R'=R+dh+h\wedge h$. D'où $R'^{1,1}=R^{1,1}+\underline{d}_L h$. Il en résulte que la classe de cohomologie de $R^{1,1}$ ne dépend pas de la connexion Γ.

On posera :

$$\underline{a}(E)=[R^{1,1}]\in H_L^{1,1}(M, \text{End } E).$$

Toujours d'après le théorème 7 de [1], une connexion adaptée Γ est basique si et seulement si $i_X R=0$, $\forall X\in\Gamma$.

THEOREME 1. *Pour qu'il existe une connexion basique sur un fibré vectoriel feuilleté (E, p, M) il faut et il suffit que $\underline{a}(E)=0$.*

Preuve: Dans un sens, c'est immédiat. Réciproquement, si $\underline{a}(E)=0$, soit Γ une connexion adaptée et R sa courbure. On a $\underline{a}(E)=[R^{1,1}]=0$. Donc il existe $h\in\mathcal{A}^{1,0}(M, \text{End } E)$ telle que $R^{1,1}=\underline{d}_L h$. Soit $D'_X=D_X-i_X h$ et soit Γ la connexion adaptée correspondant à D'_X. On a :

$$R'^{1,1}=R^{1,1}-d_L h=0.$$

Par suite $i_X R'=0$, $\forall X\in\underline{L}$.

En ce qui concerne les classes caractéristiques, on a le :

THEOREME 2. *Les classes de Pontrjagin d'un fibré vectoriel feuilleté sont nulles en dimension supérieure à deux fois la codimension du feuilletage transverse.*

Si en plus, $\underline{a}(E)=0$, les classes de Pontrjagin d'un fibré vectoriel feuilleté sont nulles en dimension supérieure à la codimension du feuilletage transverse.

On retrouve ainsi un résultat de P. Molino [4] sans passer par les fibrés principaux associés.

§ 4. Faisceau des germes des sections feuilletees.

Puisque la variété M est feuilletée, il existe un atlas de M tel que si (x^i) $(i, j, \cdots=1, 2, \cdots, m)$ sont les coordonnées locales dans un ouvert U de l'atlas, les champs de vecteurs $\partial/\partial x^u$ $(u, v, \cdots=q+1, \cdots, m)$ constituent une base locale de L. Ce qui équivaut à dire que sur $U\cap V$ supposé non vide, $\partial x^{a'}/\partial x^u=0$ $(a, b, \cdots=1, \cdots, q)$, où V est un autre ouvert de l'atlas muni de coordonnées locales $(x^{i'})$.

Suivant I. Vaisman [5], une fonction différentiable f sur la variété feuilletée M sera dite feuilletée si $\partial f/\partial x^u=0$.

D'autre part, puisque (E, p, M) est feuilleté, il existe un atlas de M vérifiant la condition ci-dessus et tel que si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes vectorielles de (E, p, M), il existe une application $x\longrightarrow(M_\beta^\alpha(x))$ de $U\cap V$ dans $\mathrm{Gl}(n, \boldsymbol{R})$ constante sur les feuilles et telle que l'application $\psi^{-1}\circ\varphi$ ait pour expression locales : $(x^i, z^a)\longrightarrow(x^i, M_a^{a'}z^a)$.

DEFINITION. Une section $\hat{Y}=\hat{Y}^{\alpha}E_{\alpha}$ de (E, p, M) au-dessus d'un ouvert U de l'atlas défini plus haut sera dite feuilletée si les fonctions $\hat{Y}^{\alpha}$ sont feuilletées.

On vérifie que cette condition ne dépend pas de coordonnées locales.

On désigne par δ le faisceau des germes des sections feuilletées et on se propose de calculer les groupes de cohomologie de M à coefficients dans δ.

Soit ω une forme scalaire sur M de type (r, s). On a vu que $d\omega=d_L\omega+d_L^1\omega+d_L^2\omega$. Il en résulte que $d_L^2=0$.

D'autre part, d'après un théorème de Vaisman [5], toute forme scalaire de type (r, s) définie sur un ouvert de M et d_L-fermée est d_L-exacte sur cet ouvert.

Soit maintenant Φ une forme de type (r, s) à valeurs dans (E, p, M) ayant pour expression locale $\Phi=\Phi^{\alpha}\otimes E_{\alpha}$.

On pose $d_L\Phi=d_L\Phi^{\alpha}\otimes E_{\alpha}$. On vérifie encore que d_L est bien défini. De plus $d_L^2=0$. On obtient ainsi un complexe :

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow \delta \longrightarrow \mathcal{A}^{\circ}(M, E) \xrightarrow{d_L} \mathcal{A}^{0,1}(M, E) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow \mathcal{A}^{0,n-q}(M, E) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{A}^{r,s}(M, E)$ désigne le faisceau des germes des formes de type (r, s) à valeurs dans (E, p, M). Dans ce qui suit, on suppose la variété M paracompacte.

THEOREME 3. *Le complexe* (5) *est une résolution fine de* δ.

Preuve: la suite (5) est exacte en $\mathcal{A}^{\circ}(M, E)$ par définition de δ. Ailleurs, on peut supposer que (E, p, M) a pour rang 1 et on applique alors le théorème de Vaisman.

COROLLAIRE. $H^r(M, \delta)=Z^{0,r}/d_L\mathcal{A}^{0,r-1}(M, E)$ *où* $Z^{0,r}$ *est l'espace des formes de type* $(0, r)$ d_L*-fermées.*

REFERENCES

[1] T.V. DUC, Sur la Géométrie différentielle des fibrés vectoriels, Kōdai Math. Sem. Rep., **26** (1975), 349-408.
[2] A. FRÖLICHER and A. NIJENHUIS, Theory of vector differential forms, Part I, Proc. Kon. Ned. Akad. A, **59** (1956), 338-359.
[3] F. KAMBER and Ph. TONDEUR, Folioted Bundles and Characteristic Classes, Lectures notes, **493** (1975).
[4] P. MOLINO, Classes d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projectables, C.R. Ac. Sc. Paris t. **272** (1971), 779-781.

[5] I. VAISMAN, Variétés riemanniennes feuilletées, Czech. Math. J., 21 (1971), 46-75.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S., n° 188
UNIVERSITE DE GRENOBLE I
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES-FRANCE