

Inégalités de Harnack et phénomène de concentration

By Samy Skander BAHOURA

(Received Nov. 20, 2006)

Abstract. We give some results about the product $\sup u \times \inf u$ for some elliptic operators of order 2 and 4. If we use those inequalities and the concentration phenomena, we can describe the asymptotic behavior of some nonlinear PDE of Yamabe type.

1. Introduction et résultats.

1.1. Le cas d'opérateurs d'ordre 2.

On note $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$ le Laplacien géométrique.

On s'occupe de certaines inégalités de Harnack de type $\sup \times \inf$ et de leurs applications aux phénomènes de concentration dans le cas d'opérateurs elliptiques d'ordre 2. Ce type de problèmes est bien connu (cf. par exemple, [B1], [B2] [C-L], [DLN], [GT], [H], [He] [L1], [L2], [M]) et les résultats obtenus utilisent des techniques de symétrie (cf. [GNN]).

Les phénomènes de concentration (ainsi que leurs conséquences) ont été largement étudiés, précisément pour la recherche des meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev (voir par exemple [Au], [Au, D, He], [DHR] et [He, V]). En ce qui nous concerne, ce type d'inégalités ($\sup \times \inf$) et le phénomène de concentration, nous permettent de décrire le comportement asymptotique de certaines solutions d'EDP.

Considérons une suite de réels positifs $(\epsilon_i)_{i \geq 0}$ avec $\epsilon_i \rightarrow 0$ et une suite de fonctions $v_{\epsilon_i} > 0$ sur \mathcal{S}^n , telles que:

$$\Delta v_{\epsilon_i} + \frac{n(n-2)}{4} v_{\epsilon_i} = \frac{n-2}{4(n-1)} V_{\epsilon_i} v_{\epsilon_i}^{N-1-\epsilon_i},$$

avec, $N = \frac{2n}{n-2}$, $0 < a \leq V_{\epsilon_i}(x) \leq b < +\infty$, $\forall x \in \mathcal{S}^n$ et $\|\nabla V_{\epsilon_i}\|_{\infty} \leq A$.
On suppose que, pour tout i , les fonctions V_{ϵ_i} et v_{ϵ_i} sont régulières.

THÉORÈME 1. *Sous ces hypothèses la suite (v_{ϵ_i}) vérifie*

$$\epsilon_i^{(n-2)/2} \left(\sup_{\mathcal{S}^n} v_{\epsilon_i} \right)^{1/4} \times \inf_{\mathcal{S}^n} v_{\epsilon_i} \rightarrow 0. \quad (1)$$

On s'intéresse aussi au problème suivant:

$$\Delta u_i = V_i(|x|)u_i^{N-1-\epsilon_i}, \quad u_i > 0 \text{ dans } B_1(0) \text{ et } u_i = 0 \text{ sur } \partial B_1(0).$$

où $B_1(0)$ est la boule unité de \mathbf{R}^n et V_i est une fonction décroissante de $|x|$ qui vérifie $0 < a \leq V_i(|x|) \leq b < +\infty$ pour tout x . On suppose que les fonctions u_i et V_i sont régulières pour tout i .

THÉORÈME 2. *Pour tout compact K de $B_1(0)$, on a*

$$\sup_{B_1(0)} u_i \times \inf_K u_i \geq c = c(a, b, K, \Omega, n) > 0.$$

1.2. Application.

Considérons le problème suivant:

$$\Delta u_{\epsilon_i} = n(n-2)u_{\epsilon_i}^{N-1-\epsilon_i}, \quad u_{\epsilon_i} > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u_{\epsilon_i} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{E}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^n .

Pour ce type d'équation il existe de nombreux résultats de compacité et de comportement asymptotique (voir par exemple, [BP], [H], [He]).

THÉORÈME 3.

1) *Il existe $c_1 = c_1(n, \Omega) > 0$, $c_2 = c_2(n, \Omega) > 0$ telles que:*

$$c_2 \leq \|u_{\epsilon_i}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1.$$

2) *Si Ω est étoilé (pour simplifier), alors, il existe une sous-suite (u_{ϵ_j}) pour laquelle, il existe un $m \in \mathbf{N}^*$ et un nombre fini de points de concentration $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$ tels que:*

$$i) \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} u_{\epsilon_j} = 0 \text{ dans } C_{loc}^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}),$$

$\forall k \in \{1, \dots, m\}$, $\exists (x_{j,k})$ avec, $x_{j,k} \rightarrow x_k$ et $u_{\epsilon_j}(x_{j,k}) \rightarrow +\infty$.

$$ii) \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j} = \sum_{i=1}^m \mu_i \delta_{x_i} \text{ avec } \mu_i \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Ici la convergence a lieu au sens des distributions.

3) *Pour tout compact K de $\Omega - \{x_1, \dots, x_m\}$, il existe une constante positive $c = c(K, \Omega, n) > 0$ telle que:*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_K u_{\epsilon_j} \leq c.$$

4) *Il existe un voisinage ω du bord $\partial\Omega$ et une constante positive $\bar{c} = \bar{c}(\omega, \Omega, n)$ tels que:*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \bar{c}.$$

5) Il existe deux constantes positives, β_1 et β_2 telles que:

$$\beta_1 \leq \epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \leq \beta_2.$$

Plus précisément, il existe une fonction $g \in C^2(\partial\Omega)$, telle que,

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \rightarrow \frac{c_n \int_{\partial\Omega} \langle x | \nu(x) \rangle [\partial_{\nu} g(\sigma)]^2 d\sigma}{\sum_{k=1}^m \mu_k}.$$

6) Il existe m réels positifs $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $\gamma_k \geq n(n-2) \frac{\omega_n}{2^n}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, tels que:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times u_{\epsilon_j}(x) \rightarrow \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x) \text{ dans } C_{loc}^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}),$$

où G est la fonction de Green du laplacien avec condition de Dirichlet. On peut prendre, $g = \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ dans le 5).

REMARQUE. Le théorème 3, donne une généralisation du résultat de Han (cas d'un ouvert étoilé par exemple), qu'on peut retrouver en utilisant son hypothèse supplémentaire (voir [H]).

1.3. Le cas d'opérateurs d'ordre 4.

Concernant certains opérateurs d'ordre 4, il existe des résultats comme [C1], [C2], [C-G] et [V]. Nous nous occupons maintenant de savoir si pour certains d'entre eux des minoration du produit $\sup \times \inf$ sont possibles.

Sur une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 5$, on considère l'équation suivante:

$$\Delta^2 u_i + b \Delta u_i + c u_i = V_i u_i^{(n+4)/(n-4)}, \quad u_i > 0 \text{ sur } M, \tag{E'}$$

où $b, c > 0$, $c \leq \frac{b^2}{4}$ et $0 \leq V_i(x) \leq A$.

La condition $0 < c \leq (b^2/4)$ est très utile pour obtenir notre estimation, car elle permet d'avoir une fonction de Green avec d'intéressantes propriétés et est utilisée pour appliquer le principe du maximum voir [C2].

THÉORÈME 4. Il existe une constante positive $k = k(b, c, A, M, g)$, telle que,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq k, \quad \forall i,$$

où u_i est solution de (E') .

Autre résultat sur un ouvert Ω strictement convexe de \mathbf{R}^n avec $n \geq 5$, considérons l'équation:

$$\Delta^2 u_\epsilon = u_\epsilon^{p-\epsilon}, \quad u_\epsilon > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \text{et } u_\epsilon = \Delta u_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{E''}$$

avec $p = \frac{n+4}{n-4}$ et $0 < \epsilon \leq \frac{4}{n-4}$.

THÉORÈME 5. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c = c(K, \Omega, n) > 0$ telle que pour toute solution u_ϵ de (E'') , on ait:*

$$\sup_{\Omega} u_\epsilon \times \inf_K u_\epsilon \geq c.$$

Pour les opérateur d'ordre 4, il existe une identité de Pohozaev comme pour ceux d'ordre 2([P]), voir [C-G], et l'équation (E'') , avec $\epsilon = 0$, ne possède pas de solutions lorsque l'ouvert Ω est étoilé. Ceci nous pousse à étudier (E'') avec $\epsilon > 0$.

Pour l'équation (E'') , il est important de remarquer que les points x_ϵ où les solutions u_ϵ sont maximum, restent loin du bord $\partial\Omega$. Ceci est important pour estimer ces solutions près du bord. Ce fait important est réalisé pour les ouverts Ω strictement convexes, la méthode utilisée est celle de symétrie de [GNN] et la transformation de Kelvin. Pour le laplacien d'ordre 2, l'équation reste invariante par la transformation de Kelvin, ce qui n'est pas le cas pour (E'') et la condition de stricte convexité du domaine peut atténuer la non invariance par cette transformation, voir [C-G].

2. Preuves des Theoremes.

2.1. Preuve du Théorème 1.

Supposons par l'absurde que (1) ne soit pas vraie, alors:

$$\limsup_{\epsilon_i \rightarrow 0} \left[\epsilon_i^{(n-2)/2} \left(\sup_{S^n} v_{\epsilon_i} \right)^{1/4} \times \inf_{S^n} v_{\epsilon_i} \right] \geq c > 0.$$

Soit x_{ϵ_i} le point où v_{ϵ_i} atteint son maximum. On considère la projection stéréographique de pôle y_{ϵ_i} point diamétralement opposé à x_{ϵ_i} . On a:

Si $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ l'image de x par la projection stéréographique, alors:

$$x_i = \frac{2y_i}{1 + |y|^2}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x_{n+1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1},$$

et,

$$y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$g_0 = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^2 dy^2, \text{ et } u_{\epsilon_i} = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{(n-2)/2} v_{\epsilon_i}.$$

Soit E la métrique euclidienne et Δ_E le laplacien pour cette métrique, on obtient:

$$\Delta_E u_{\epsilon_i} = \frac{n-2}{4(n-1)} H^{\epsilon_i} V_i u_{\epsilon_i}^{N-1-\epsilon_i}, \quad \text{avec } H(y) = \left(\frac{2}{1 + |y|^2} \right)^{(n-2)/2},$$

et,

$$u_{\epsilon_i}(0) = 2^{(n-2)/2} \max_{\mathbf{S}^n} v_{\epsilon_i} = \max_{B_1(0)} u_{\epsilon_i}, \quad \text{et} \quad \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \geq \inf_{\mathbf{S}^n} v_{\epsilon_i}.$$

On en déduit que,

$$\limsup_{\epsilon_i \rightarrow 0} \left[\epsilon_i^{(n-2)/2} [u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \times \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \right] \geq \tilde{c} > 0.$$

On se retrouve dans le cas du Théorème 1 de [B1], les étapes de la preuve de ce Théorème 1 se conservent ici, mais il faut vérifier si le lemme 2 de l'étape 2-3 se conserve.

On a, $a_{\epsilon_i} = 0$ pour tout entier i et,

$$\tilde{V}_{\epsilon_i}(t, \theta) = e^{(n-2)\epsilon_i t/2} [H(t)]^{\epsilon_i} V_{\epsilon_i}(e^t \theta), \quad \text{avec } H(t) = \left(\frac{2}{1 + e^{2t}} \right)^{(n-2)/2}.$$

Comme,

$$\epsilon_i^{[2/(n-2) - \epsilon_i/2]^{-1}} [u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \geq \tilde{c} > 0,$$

ce qui s'écrit,

$$\log \epsilon_i \geq -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{n-2} - \frac{\epsilon_i}{2} \right) \log u_{\epsilon_i}(0) + \log \tilde{c} = t_i.$$

Donc

$$\partial_t \tilde{V}_{\epsilon_i} \geq 0, \quad \text{sur }]-\infty, t_i] \times \mathbf{S}^{n-1}.$$

Donc, le lemme 2 de l'étape 2-3 du Théorème 1 de [B1] se conserve et la conclusion de la preuve de ce Théorème 1 reste la même ici, à savoir,

$$[u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \leq \bar{c}, \quad \text{pour tout } i,$$

or, d'après notre hypothèse de départ,

$$[u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \geq \frac{\tilde{c}}{\epsilon_i^{(n-2)/2}} \rightarrow +\infty.$$

2.2. Preuve du Théorème 2.

D'après le Théorème 1' de Gidas-Ni-Nirenberg [GNN], la méthode "moving-plane" assure que u_i est radiale. Considérons la fonction de Green G du laplacien, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \max_{B_1(0)} u_i = u_i(0) &= \int_{B_1(0)} G(0, y) V_i(|x|) u_i(y)^{N-1-\epsilon_i} \\ &\leq b \left[\int_{B_1(0)} G(0, y) dy \right] (\max_{B_1(0)} u_i)^{N-1-\epsilon_i}, \end{aligned}$$

qui donne $[u_i(0)]^{4/(n-2)-\epsilon_i} \geq c > 0$, avec, $c = \frac{1}{b \left[\int_{B_1(0)} G(0, y) dy \right]}$.

On peut alors appliquer le Théorème 2 de [B2] pour obtenir le résultat voulu.

2.3. Preuve du Théorème 3.

PREUVE DE 1). D'après l'inégalité de Harnack du type sup \times inf (voir [C-L], [L1] ou adapter la méthode qui se trouve dans [B1] avec les $V_i \equiv 1$), pour tout compact K d'un ouvert $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, il existe une constante positive $\bar{c} = \bar{c}(K, \Omega_0, \Omega, n)$ telle que :

$$\sup_K u_\epsilon \times \inf_{\Omega_0} u_\epsilon \leq c.$$

On sait que (voir [H] p. 164–165) pour $\delta = \delta_0 > 0$ assez petit:

$$u_\epsilon(x) \leq M = M(\delta, \Omega, n), \quad \forall x \in \{y, d(y, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

Ici δ_0 dépend de Ω mais pas de $\epsilon > 0$.

On prend, $\Omega_0 = \left\{ x, d(x, \partial\Omega) > \frac{\delta_0}{2} \right\}$ et $K = \left\{ x, d(x, \partial\Omega) \geq \frac{2\delta_0}{3} \right\}$.

Soit G la fonction de Green du laplacien avec condition de Dirichlet, alors:

$$u_\epsilon(x) = \int_{\Omega} G(x, y) u_\epsilon^{N-1-\epsilon}(y) dy.$$

En appliquant le principe du maximum à G , on a pour $\delta_0 > 0$,

$$G(x, y) \geq c_1 = c_1(\delta_0, \Omega, n) > 0 \text{ sur } \{x, d(x, \partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\} \times \{y, d(y, \partial\Omega) \geq \delta_0/2\},$$

qui donne

$$\bar{c} \geq \sup_K u_\epsilon \times \inf_{\Omega_0} u_\epsilon \geq \int_{\{x, d(x, \partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy.$$

Comme,

$$\|u_\epsilon\|_{N-\epsilon}^{N-\epsilon} = \int_{\{x, d(x, \partial\Omega) \leq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy + \int_{\{x, d(x, \partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy.$$

On en déduit que:

$$\|u_\epsilon\|_{N-\epsilon}^{N-\epsilon} \leq c(n, \Omega).$$

En multipliant (E) par $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient:

$$\|u_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(n, \Omega).$$

D'autre part, en utilisant l'injection de Sobolev, puis en multipliant l'équation (E) par u_ϵ , en intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$K_1 \|u_\epsilon\|_{N-\epsilon}^2 \leq K_2 \|u_\epsilon\|_N^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 = n(n-2) \int_\Omega u_\epsilon^{N-\epsilon} = n(n-2) \|u_\epsilon\|_{N-\epsilon}^{N-\epsilon},$$

qui donne,

$$\|u_\epsilon\|_{N-\epsilon} \geq \tilde{K}_1 > 0 \quad \text{et} \quad \|u_\epsilon\|_{H^1} \geq \tilde{K}_2 > 0.$$

PREUVE DE 2).

Point i): Comme u_ϵ est bornée dans H^1 , on peut en extraire une sous-suite $u_{\epsilon'} \rightarrow u$ et la convergence est presque partout, dans $L^{N-(1/2)}$ fort et dans H^1 faible.

La fonction $u \geq 0$ vérifie, $\Delta u = n(n-2)u^{N-1}$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. De plus $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_{\epsilon_i}\|_{H^1(\Omega)} \leq c(n, \Omega)$.

1') Régularité de u au bord: On sait (voir [H] pp. 164–165), qu'il existe un voisinage ω du bord $\partial\Omega$ et constante positive M telle que:

$$u_{\epsilon_i}(x) \leq M, \quad \forall x \in \omega.$$

En utilisant le lemme 2 de [H] (ou le lemme 8 de [He]), on en déduit que la suite (u_{ϵ_i}) est uniformément bornée dans $C^{1,\alpha}$ au voisinage du bord. En utilisant le théorème d'Ascoli,

la suite (u_{ϵ_i}) converge vers une fonction C^1 et donc u est C^1 au voisinage du bord.

2') Régularité de u à l'intérieur de Ω : En utilisant les arguments de régularité locale de Trudinger (voir [T] le théorème 3 et le lemme p.268) et le théorème de Ladyzenskaya-Ural'ceva (voir le théorème 4.40 de [Au]), on en déduit que u est au moins de classe $C^2(\Omega)$.

Finalement $u \in C^2(\bar{\Omega})$. D'après le principe du maximum $u \equiv 0$ ou $u > 0$. Comme Ω est étoilé, en utilisant la formule de Pohozaev [P], on conclut que $u \equiv 0$.

REMARQUE. On peut se passer du fait que Ω est étoilé. On sait que les points x_{ϵ_i} où u_{ϵ_i} est maximum restent loin du bord, alors, soit u_{ϵ_i} est uniformément borné dans $C^0(\bar{\Omega})$ et on a donc un résultat de compacité, soit, il existe une sous-suite de u_{ϵ_i} notée encore u_{ϵ_i} telle que $u_{\epsilon_i}(x_{\epsilon_i}) \rightarrow +\infty$ et dans ce cas l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$ et les estimations de Schauder (au voisinage du bord), nous permettent d'avoir l'existence d'un point a_0 très proche du bord sans être sur le bord (où u_{ϵ_i} est uniformément bornée) tel que $u(a_0) = 0$, le principe du maximum appliqué à u implique que $u \equiv 0$.

On définit un point de concentration x_0 comme suit,

$$\forall \delta > 0, \quad \liminf_{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \delta) \cap \Omega} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x) dx > 0.$$

On prend la $\lim \inf$ au lieu de $\lim \sup$, dans la définition d'un point de concentration, pour pouvoir compter tous les points de concentrations, on verra plus tard qu'il est plus simple de compter les points de concentrations (qui seront en nombre fini).

En utilisant le Lemme 1 dans [He] (avec la modification $\lim \sup$ devient $\lim \inf$), on en déduit que si x_0 est un point de concentration, alors:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \delta) \cap \Omega} u_{\epsilon}^{N-\epsilon}(y) dy \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Comme $u_{\epsilon}(x) \leq M$ sur $\{x, d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$, d'après les estimations elliptiques on en déduit que $\|\nabla u_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq M'$, où ω est un voisinage du bord $\partial\Omega$. On conclut grâce au théorème d'Ascoli que u_{ϵ} converge uniformément vers 0 sur un voisinage du bord et donc il n'y a pas de points de concentration au voisinage du bord. De plus en utilisant le lemme 2 de [H] ou lemme 8 de [He] et le théorème 6.6 de [GT], on déduit que $\|u_{\epsilon}\|_{C^2(\omega)}$ converge vers 0 au voisinage ω du bord, (on prend une couronne C voisinage du bord, les bords ∂C de C sont, $\partial\Omega$ et $\partial(\Omega_{\epsilon_0})$, on prend η une fonction telle que $\eta \equiv 0$ sur $\partial(\Omega_{\epsilon_0})$ et $\eta \equiv 1$ dans un voisinage de $\partial\Omega$, puis on s'occupe de l'équation $\Delta(\eta u_{\epsilon}) = f_{\epsilon} \in C^{0,\beta}(C)$ et $\eta u_{\epsilon} = 0$ sur ∂C).

Comme (u_{ϵ_i}) est bornée dans $H^1(\Omega)$, par le théorème de Rellich-Kondrachov, pour tout $q \in [1, N[$, il existe une sous-suite notée encore (u_{ϵ_i}) qui converge vers 0 dans L^q . En prenant une suite $q \rightarrow N$ et en utilisant le procédé diagonal, on déduit qu'il existe une sous-suite notée encore (u_{ϵ_i}) qui converge vers 0 dans tous les L^q avec $q \in [1, N[$.

En première conclusion, on obtient, une sous-suite notée (u_{ϵ_i}) telle que $\|u_{\epsilon_i}\|_{C^2(\omega)} \rightarrow 0$ et $\forall q \in [1, N[$, $\|u_{\epsilon_i}\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0$, avec ω un voisinage du bord.

Comme u_{ϵ_i} est bornée dans L^N , on en déduit que si il y a des points de concentration alors ils sont en nombre fini x_1, \dots, x_m . De plus m est borné par un réel ne dépendant que de Ω et n .

On va voir que la suite u_{ϵ_i} a au moins un point de concentration. Supposons le contraire, soit alors K un compact de Ω tel que $\Omega - K \subset \omega$, où ω est un voisinage du bord tel que, $\|u_{\epsilon_i}\|_{C^2(\omega)} \rightarrow 0$, alors $\sup_K u_{\epsilon_i} = u_{\epsilon_i}(y_{\epsilon_i})$ avec $y_{\epsilon_i} \rightarrow y \in K$. Après passage à une sous-suite, il existe $\delta_y > 0$ tel que, $\liminf_{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_{B(y, \delta_y)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x) dx = 0$, on en déduit grâce au procédé d'itération de Moser, que $\sup_{B(y, \delta_y/2)} u_{\epsilon_i} \rightarrow 0$ et donc $\|u_{\epsilon_i}\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$. Ainsi, $\|u_{\epsilon_i}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$, or ceci contredit le fait que $\|u_{\epsilon_i}\|_{L^N(\Omega)} \geq c > 0$, pour tout i .

Pour la suite (u_{ϵ_i}) , on a un nombre fini de points de concentration de Ω , on considère alors, une sous-suite (u_{ϵ_j}) de (u_{ϵ_i}) qui a le maximum de points de concentration, soit x_1, x_2, \dots, x_m tous les points de concentration de (u_{ϵ_j}) . Alors toute sous-suite de (u_{ϵ_j}) a au plus m points de concentration.

D'après le lemme 1(modifié, $\limsup \rightarrow \liminf$) de [He], on a:

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \forall \delta > 0, \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) dx \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

et,

$$\forall y \in \Omega - \{x_1, \dots, x_m\}, \exists \delta_y > 0, \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(y, \delta_y)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) dx = 0.$$

Soit K un compact de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$, on a, $\sup_K u_{\epsilon_j} = u_{\epsilon_j}(y_j)$ avec, par compacité, $y_j \rightarrow y \in K$. En utilisant le même raisonnement que [He] dans le lemme 4 et le lemme 8 et les estimations elliptiques (théorème 9.11 de [GT]), puis les estimations de Schauder, on en déduit qu'il existe une sous-suite $u_{\epsilon_{j_r}}$ qui tend vers 0 dans $C^2(K)$. De plus cette sous-suite vérifie

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \forall \delta > 0, \liminf_{\epsilon_{j_r} \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_{j_r}}^{N-\epsilon_{j_r}}(x) dx \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

qui revient à dire que la nouvelle sous-suite a au moins m points de concentrations, d'après la définition de m , cette sous-suite a exactement m points concentrations x_1, \dots, x_m . On obtient:

$$\forall y \in \Omega - \{x_1, \dots, x_m\}, \exists \delta_y > 0, \liminf_{\epsilon_{j_r} \rightarrow 0} \int_{B(y, \delta_y)} u_{\epsilon_{j_r}}^{N-\epsilon_{j_r}}(x) dx = 0.$$

En considérant une suite exhaustive de compacts (K_n) de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$, $K_n \subset \bar{K}_{n+1}$, $\cup_n K_n = \bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$ et en utilisant le procédé diagonal, on en déduit qu'il existe une sous-suite notée u_{ϵ_j} qui a exactement m points de concentration x_1, \dots, x_m et qui converge vers 0 dans $C^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\})$.

Soit x_1 un point de concentration, alors, il existe une suite $j_n \rightarrow +\infty$ et $x_{j_n,1} \rightarrow x_1$

avec $u_{\epsilon_j}(x_{j_n,k}) \rightarrow +\infty$. En appliquant le même procédé pour x_2 puis pour x_k , k allant de 3 à m , on extrait une sous-suite notée encore (u_{ϵ_j}) et des suites de points $(x_{j,k})$, k allant de 1 à m tels que, $u_{\epsilon_j}(x_{j,k}) \rightarrow +\infty$ et $x_{j,k} \rightarrow x_k$.

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, il existe une suite $y_{j,k} \rightarrow x_k$ et $u_{\epsilon_j}(y_{j,k}) \rightarrow +\infty$.

On peut remarquer que,

$$|B(x_k, \delta)| \sup_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i} \geq \int_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x) dx \geq \frac{\omega_n}{2^{n+1}} \text{ pour } i \geq i_0,$$

puis, on fait tendre δ vers zéro.

Point ii): Soit x_k un point de concentration, alors:

$$\mu_k = \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) dx \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

avec, $\delta_0 = \min_{\{i \neq j, i, j=1, \dots, m\}} \frac{d(x_i, x_j)}{2}$.

Alors, pour $0 < \delta \leq \delta_0$, on a:

$$\mu_k = \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) dx = \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) dx.$$

En considérant une sous-suite et en prenant $\phi \in C(\Omega)$, on obtient:

$$\int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) \phi(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{B(x_k, \delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) \phi(x) dx + \int_{\Omega - [\cup_{k=1}^m B(x_k, \delta)]} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) \phi(x) dx.$$

En prenant δ assez petit et en utilisant le point i) du théorème, on en déduit que:

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x) \phi(x) dx = \sum_{k=1}^m \mu_k \phi(x_k), \quad \mu_k \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Point iii): Soit $x_{\epsilon_j} \in \Omega$ tel que $u_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) = \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j}$, après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $x_{\epsilon_j} \rightarrow x_0 \in \Omega$. Il est clair que x_0 est un point de concentration et donc x_0 est l'un des x_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, on peut supposer que $x_0 = x_1$.

Soit K un compact de $\Omega - \{x_1, \dots, x_m\}$, alors il existe $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_m > 0$ tels que, $K \subset \tilde{\Omega} = \Omega_1 - [\cup_{i=1}^m \bar{B}(x_i, \alpha_i)]$, où Ω_1 est un ouvert relativement compact de Ω . D'après le point i), $u_{\epsilon_j} \rightarrow 0$ uniformément sur $\tilde{\Omega}$.

Considérons l'opérateur $L = -\Delta + n(n-2)u_{\epsilon_j}^{N-2-\epsilon_j}$. Alors, $Lu_{\epsilon_j} = 0$ et l'inégalité de Harnack usuelle est vérifiée pour cet opérateur (voir [GT]). Ainsi, pour tout $\hat{\Omega} \subset\subset \tilde{\Omega}$, il existe $c = c(\hat{\Omega}, \tilde{\Omega}, n) > 0$ telle que:

$$\sup_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j} \leq c \inf_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j}.$$

On prend $\hat{\Omega}$ contenant K et tel que son bord extérieur (bord le plus proche de $\partial\Omega$) soit le bord d'un ouvert O contenant une boule de centre x_1 et de rayon $\alpha > 0$. Comme u_{ϵ_j} est sous-harmonique, on obtient:

$$\inf_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j} \leq \inf_{\partial O} u_{\epsilon_j} = \inf_O u_{\epsilon_j}.$$

Comme, $\bar{B}(x_1, \alpha) \in O$, en utilisant l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$, on a:

$$\sup_{B(x_1, \alpha)} u_{\epsilon_j} \times \inf_O u_{\epsilon_j} \leq c = c(O, \alpha, n).$$

Or, $\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} = \sup_{B(x_1, \alpha)} u_{\epsilon_j}$, en combinant ces inégalités, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \sup_K u_{\epsilon_j} \leq c = c(K, \Omega, n).$$

Point iv):

Méthode 1: On sait (voir [H] pp. 164–165) qu'il existe un voisinage du bord ω , un ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ et une constante positive $c' = c'(n, \Omega)$ tels que:

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq c' \int_{\Omega'} u_{\epsilon_j}(x) dx.$$

On peut (quitte à grandir Ω'), supposer qu'il existe $R > 0$ tel que, $B(x_k, R) \subset \Omega'$, $k \in \{1, \dots, m\}$.

Comme u_{ϵ_j} est sous-harmonique d'après l'inégalité de Moser-Harnack, il existe $0 < R' < R$ et une constante positive $\tilde{c} = \tilde{c}(n, \Omega, R')$ tels que:

$$\int_{B(x_k, R')} u_{\epsilon_j}(x) dx \leq \tilde{c} \inf_{B(x_k, R')} u_{\epsilon_j} = \tilde{c} \inf_{\partial B(x_k, R')} u_{\epsilon_j}, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

D'après le point iii), on a:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\partial B(x_k, R')} u_{\epsilon_j} \leq \tilde{c}_k.$$

Ce qui donne:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \int_{B(x_k, R')} u_{\epsilon_j}(x) dx \leq \tilde{c}(R', \Omega, k, n).$$

On se place maintenant sur $\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R'/2)\}$. Sur cet ouvert on a d'après le point i), $u_{\epsilon_j} \leq 1$ à partir d'un certain rang, on peut appliquer l'inégalité de Harnack usuelle à la fonction u_{ϵ_j} solution de $Lu_{\epsilon_j} = 0$ où $L = -\Delta + n(n-2)u_{\epsilon_j}^{N-2-\epsilon_j}$. Il existe $\hat{c} = \hat{c}(R', \Omega, n)$ telle que:

$$\sup_{\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R')\}} u_{\epsilon_j} \leq \hat{c} \inf_{\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R')\}} u_{\epsilon_j} = \hat{c} \inf_{\partial(\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R')\})} u_{\epsilon_j} \leq \hat{c} \inf_{\partial\Omega'} u_{\epsilon_j} = \hat{c} \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j}.$$

En utilisant l'inégalité de Harnack du type sup × inf, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j} = \sup_{B(x_1, R')} u_{\epsilon_j} \times \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j} \leq c(\Omega', \Omega, n).$$

Finalement, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \int_{\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R')\}} u_{\epsilon_j}(x) dx \leq \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k, R')\}} u_{\epsilon_j} \leq c(\Omega, R', \Omega, n).$$

En combinant, toutes ces inégalités, on obtient,

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq c' \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \int_{\Omega'} u_{\epsilon_j}(x) dx \leq c(\omega, \Omega, n).$$

Méthode 2: D'après l'inégalité d'Alexandrov-Bakelman-Pucci (voir [Au]), on a:

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C \|u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}\|_{L^n(\omega)}.$$

Donc,

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C \|u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}\|_{L^n(\omega)} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C (\sup_{\omega} u_{\epsilon_j})^{N-1-\epsilon_j}.$$

D'après le point i), $\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \rightarrow 0$, d'où:

$$(1 - k) \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} \text{ avec } 0 < k < 1.$$

En utilisant iii), on conclut que:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \frac{1}{1 - k} \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} \leq c(\omega, \Omega, n).$$

Point v): D'après la formule de Pohozaev (voir [P] ou [H]), on a:

$$\epsilon_j \int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}(x) dx = c_n \int_{\partial\Omega} \langle (x - y) | \nu(x) \rangle [\partial_{\nu} u_{\epsilon_j}(\sigma)]^2 d\sigma.$$

D'où,

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}(x) dx = c_n \int_{\partial\Omega} \langle x | \nu(x) \rangle \left[\partial_{\nu} [(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j}) u_{\epsilon_j}](\sigma) \right]^2 d\sigma.$$

Posons, $g_{\epsilon_j} = (\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j}) u_{\epsilon_j}$ et $f_{\epsilon_j} = n(n-2)(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j}) u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}$. Alors, on a :

$$\Delta g_{\epsilon_j} = f_{\epsilon_j} \text{ dans } \Omega \text{ et } g_{\epsilon_j} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

D'après le point iv), $\|g_{\epsilon_j}\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq c(\omega, \Omega, n)$, avec ω un voisinage du bord $\partial\Omega$.

D'après la formule de représentation de la fonction Green, on a :

$$g_{\epsilon_j}(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f_{\epsilon_j}(y) dy \geq \int_{\Omega-\omega} G(x, y) f_{\epsilon_j}(y) dy.$$

D'après le point iii), on a, $g_{\epsilon_j}(x) \leq c(x, \Omega, n)$ pour $x \in \Omega - \{x_1, \dots, x_m\}$ et d'après le point iv) et i), $\|f_{\epsilon_j}\|_{L^{\infty}(\omega)} \leq c(\omega, \Omega, n)$.

D'après le principe du maximum, $G(x, y) \geq c(x, \Omega - \omega, \Omega, n) > 0$ pour $x \in \Omega$.

Finalement,

$$\int_{\Omega} f_{\epsilon_j}(y) dy \leq c, \quad \forall j.$$

On veut prouver qu'il existe une constante $c = c(\Omega, n) > 0$ telle que pour toute solution positive u_i de,

$$\Delta u_i = n(n-2)u_i^{N-1-\epsilon_i}, \text{ dans } u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

on a,

$$\int_{\Omega} f_i \leq c.$$

On sait qu'il existe un voisinage ω du bord tel que $\sup_{\omega} u_i \leq c(\omega, \Omega, n)$, on considère l'opérateur $L = -\Delta + n(n-2)u_i^{N-2-\epsilon_i}$ dans l'ouvert ω , pour cet opérateur on peut appliquer l'inégalité de Harnack usuelle (voir [GT], chapitre 8). On obtient,

$$\sup_{\tilde{\omega}} u_i \leq \hat{c} \inf_{\tilde{\omega}} u_i,$$

pour tout ouvert $\tilde{\omega}$ relativement compact dans ω et $\hat{c} = c(\tilde{\omega}, \omega, n)$.

On sait aussi, qu'il existe $\delta = \delta(\Omega, n) > 0$ tel que $d(x_i, \partial\Omega) \geq \delta$, avec $u_i(x_i) = \sup_{\Omega} u_i$. On prend alors, $\tilde{\omega}$ tel que son bord extérieur soit $\partial\tilde{\Omega}$, et $\tilde{\Omega}$ contient strictement les x_i . On a ω dépend de Ω et de n , de même $\tilde{\omega} \subset\subset \omega$, est choisi à partir de ω et donc dépend (il le doit) de Ω et de n . On a

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u_i \times \sup_{\tilde{\omega}} u_i &\leq \hat{c} \sup_{\Omega} u_i \inf_{\tilde{\omega}} u_i \leq \hat{c} \sup_{\Omega} u_i \inf_{\partial_{\text{exterieur}} \tilde{\omega}} u_i \\ &= \hat{c} u_i(x_i) \times \inf_{\partial \tilde{\Omega}} u_i = \hat{c} u_i(x_i) \times \inf_{\Omega} u_i, \end{aligned}$$

car u_i est sous-harmonique et l'inf sur l'ouvert est atteint sur le bord (principe du maximum).

On utilise l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$ pour obtenir,

$$\sup_{\Omega} u_i \times \inf_{\tilde{\Omega}} u_i \leq c(\tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, n),$$

Donc,

$$g_i(x) \leq c(\tilde{\omega}, \Omega, n) \text{ sur } \tilde{\omega}. \tag{*}$$

D'après, l'inégalité d'Alexandrov-Bekelman-Pucci,

$$\sup_{\omega} u_i \leq \sup_{\partial \omega} u_i + C \|u_i^{N-1-\epsilon_i}\|_{L^n(\omega)} \leq \sup_{\partial \omega} u_i + \tilde{C} \|u_i\|_{L^n(\omega)}.$$

En multipliant par $\sup_{\Omega} u_i$ à droite et à gauche, on obtient,

$$\sup_{\omega} g_i \leq \sup_{\partial \omega} g_i + C \|g_i\|_{L^n(\omega)}.$$

On peut écrire,

$$\|g_i\|_{L^n(\omega)} \leq \|g_i\|_{L^n(\omega-\omega_\epsilon)} + \|g_i\|_{L^n(\omega_\epsilon)},$$

avec, ω_ϵ un ouvert de ω qui est voisinage de $\partial \Omega$,

$$\|g_i\|_{L^n(\omega_\epsilon)} \leq \sup_{\omega_\epsilon} g_i |\omega_\epsilon|^{1/n} \leq \sup_{\omega} g_i |\omega_\epsilon|^{1/n},$$

ainsi,

$$\sup_{\omega} g_i (1 - \tilde{C} |\omega_\epsilon|^{1/n}) \leq \sup_{\partial \omega} g_i + \tilde{C} \sup_{\omega-\omega_\epsilon} g_i.$$

En prenant ω_ϵ voisin de $\partial \Omega$ de mesure très petite $|\omega_\epsilon| < \tilde{C}^{-n}$, puis en utilisant (*) avec $\tilde{\omega} = \omega - \omega_\epsilon$ puis $\tilde{\omega} = \partial \omega$, on obtient,

$$\|g_i\|_{L^\infty(\omega)} \leq c(\Omega, n).$$

Grâce à la fonction de Green du laplacien,

$$g_i(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f_i(y) dy \geq \int_{\Omega - \omega} G(x, y) f_i(y) dy.$$

Par le principe du maximum, $G(x, y) \geq c(\partial\omega - \partial\Omega, \Omega - \omega, \Omega, n)$ pour $x \in \partial\omega - \partial\Omega$ et $y \in \Omega - \omega$.

Donc,

$$\int_{\Omega - \omega} f_i \leq c(\Omega, n),$$

or, $f_i = n(n - 2)g_i \times u_i^{N-2-\epsilon_i} \leq c(\Omega, n)$ sur ω , d'où le résultat.

En utilisant, le lemme 8 de [He] ou le lemme 2 de [H], il existe une constante positive $c = c(\omega, \Omega, n)$ telle que pour $\beta \in]0, 1]$, pour tout voisinage $\omega' \subset\subset \omega$ du bord $\partial\Omega$, on a :

$$\|g_{\epsilon_j}\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \|\nabla g_{\epsilon_j}\|_{C^{0,\beta}(\omega')} \leq c, \quad 1 \leq q < \frac{n}{n-2}.$$

En utilisant le théorème d'Ascoli, on peut extraire de g_{ϵ_j} une sous-suite qu'on note encore g_{ϵ_j} qui converge uniformément dans $C^1(\omega')$ vers $g \geq 0$. D'après le principe du maximum de Hopf, $\sup_{\partial\Omega} |\partial_\nu g| > 0$, en utilisant le point 1) et l'identité de Pohozaev (voir [H]), on conclut qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que :

$$\beta_1 \leq \epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \leq \beta_2.$$

Plus précisément,

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \rightarrow \frac{c_n \int_{\partial\Omega} \langle x | \nu(x) \rangle [\partial_\nu g(\sigma)]^2 d\sigma}{\sum_{k=1}^m \mu_k}.$$

Sur un voisinage ω de $\partial\Omega$, en passant aux sous-suites, on peut supposer que g_{ϵ_j} converge uniformément vers g_ω dans $C^2(\omega)$.

Point vi): Considérons une suite exhaustive de compacts (K_n) de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$. Sur tout compact K de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$ le point iii) donne $\|g_{\epsilon_j}\|_{L^\infty(K)} \leq c(K, \Omega, n)$. En utilisant les estimations elliptiques et le lemme 2 de [H] ou le lemme 8 de [He] et le théorème d'Ascoli, on peut extraire de (g_{ϵ_j}) une sous-suite qui converge dans $C^1(K)$ vers une fonction g_K . Comme $\nabla f_{\epsilon_j} = n(n - 2)(N - 1 - \epsilon_j)u_{\epsilon_j}^{N-2-\epsilon_j} \nabla g_{\epsilon_j}$, en appliquant ce procédé à la suite de compacts (K_n) et en utilisant le procédé diagonal et l'unicité des limites, on construit de proche en proche une fonction $g \in C^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\})$ et une sous-suite notée encore g_{ϵ_j} qui converge vers g dans $C^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\})$. En prolonge g et ∇g en \tilde{g} et $\tilde{\nabla} g$ sur $\bar{\Omega}$ par 0 (par exemple) sur $\{x_1, \dots, x_m\}$. \tilde{g} reste une fonction mesurable sur $\bar{\Omega}$ et comme $\|g_{\epsilon_j}\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c(n, \Omega)$ avec $1 < q < (n/(n - 1))$. Grâce à l'injection de Sobolev $W^{1,q}$ dans L^r $1 \leq r \leq q^*$ et l'injection compacte de Khondrakov

pour $1 \leq r < q^*$, on a $g_{\epsilon_j} \rightarrow \bar{g}$ dans L^r et $\bar{g} = \tilde{g}$ presque partout (on compare g et \bar{g} sur K_n , puis on passe à la limite en n). Donc, $\tilde{g} \in L^r(\Omega)$ avec $r > 1$ et est solution (au sens des distributions) de:

$$\int_{\Omega} \tilde{g} \Delta \phi = \sum_{k=1}^m \gamma_k \delta_{x_k}, \quad \forall \phi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \dot{H}_1^2(\Omega),$$

avec, $\gamma_k = \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} f_{\epsilon_j}(x) dx$ et $\delta_0 = \min_{i \neq j, i, j \in \{1, \dots, m\}} ((d(x_i, x_j))/2)$. En utilisant les points i), iii) et iv), la suite (f_{ϵ_j}) converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$.

Or, la fonction G de Green du laplacien avec condition de Dirichlet, vérifie:

$$\int_{\Omega} G(x_k, x) \Delta \phi = \delta_{x_k}, \quad \forall \phi \in C^2(\bar{\Omega}) \cup \dot{H}_1^2(\Omega).$$

Donc,

$$\int_{\Omega} \left[\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x) \right] \Delta \phi = 0, \quad \forall \phi \in C^2(\bar{\Omega}) \cap \dot{H}_1^2(\Omega)$$

et,

$$\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En utilisant le théorème de régularité d'Agmon (voir théorème 8.2 p.444 de [Ag] ou [Au]), on conclut que, $u = \tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x)$ presque partout avec $u \in C^\infty(\Omega)$.

Comme $\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ est $C^1(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\})$, on en déduit que $u = g - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ partout sur $\Omega - \{x_1, \dots, x_m\}$.

Soit alors, w la fonction qui vaut u dans $B(x_k, \epsilon)$, $k = 1, \dots, m$ et $g - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ partout ailleurs sur $\bar{\Omega}$, w est $C^2(\bar{\Omega})$ égale à $u - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ presque partout sur Ω et donc, $\int_{\Omega} w \Delta \phi = 0$ au sens des distributions et $w \equiv 0$ sur le bord $\partial\Omega$. Finalement $w \equiv 0$ sur Ω ; d'où $\tilde{g} \equiv \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot)$ sur $\bar{\Omega} - \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Ainsi, on a:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} u_{\epsilon_j} \rightarrow \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, \cdot) \text{ dans } C_{loc}^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}).$$

On a:

$$\gamma_k = \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} f_{\epsilon_j} \text{ et } \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j} = \mu_k \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

donc,

$$\gamma_k = n(n - 2) \liminf_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_{B(x_k, \delta_0)} \left[\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right] u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j} \geq n(n - 2)\mu_k.$$

2.4. Preuve du Théorème 4.

Les conditions $b, c > 0$, et $c \leq (b^2/4)$, nous permettent d’avoir l’existence d’une fonction de Green G pour l’opérateur $\Delta^2 + b\Delta + c$, telle que,

$$\frac{C'(M, g)}{d_g(x, y)^{n-4}} \geq G(x, y) \geq \frac{C(M, g)}{d_g(x, y)^{n-4}},$$

avec, $C(M, g), C'(M, g) > 0$.

On écrit alors,

$$\min_M u_i = u_i(x_i) = \int_M G(x, y) V_i(y) u_i(y)^{(n+4)/(n-4)} dV_g(y),$$

et,

$$\min_M u_i \geq \bar{C} \int_M V_i(y) u_i(y)^{(n+4)/(n-4)} dV_g(y),$$

d’où,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq \int_M V_i u_i^{2n/(n-4)}.$$

On multiplie l’équation (E) par u_i puis on intègre par parties, on obtient,

$$\int_M V_i u_i^{2n/(n-2)} = \int_M [(\Delta u_i)^2 + b|\nabla u_i|^2 + c u_i^2] \geq K \|u_i\|_{H^2_2(M)}^2.$$

On utilise l’injection de Sobolev $H^2_2(M)$ dans $L^{2n/(n-4)}(M)$ et le fait que $0 \leq V_i(x) \leq A$ sur M pour obtenir,

$$A \|u_i\|_{L^{2n/(n-4)}}^{2n/(n-4)} \geq K' \|u_i\|_{L^{2n/(n-4)}}^2,$$

donc,

$$\|u_i\|_{L^{2n/(n-4)}} \geq K'' > 0, \quad \forall i$$

ainsi,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq \int_M V_i u_i^{2n/(n-2)} \geq \tilde{K} > 0, \forall i.$$

2.5. Preuve du Théorème 5.

Supposons par l'absurde que:

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_K u_i \rightarrow 0.$$

Alors, pour $\delta > 0$ assez petit, on a:

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_{\{x, d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}} u_i \rightarrow 0.$$

D'après la preuve de la proposition 2.4 de [C-G], on a pour $\delta > 0$ assez petit,

$$\sup_{\{x, d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}} u_i \leq M = M(n, \Omega).$$

On a,

$$u_i(x) = \int_\Omega G(x, y) u_i(y)^{p-\epsilon_i} dy.$$

Soient, K' un autre compact de Ω , en utilisant le principe du maximum, on obtient:

$$\exists c_1 = c_1(K, K', n, \Omega) > 0, \text{ tel que } G(x, y) \geq c, \forall x \in K', y \in K',$$

donc,

$$\inf_K u_i = u_i(x_i) \geq c_1 \int_{K'} u_i(y)^{p-\epsilon_i} dy.$$

En prenant, $K = K_\delta = \{x, d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$, il existe $c_2 = c_2(\delta, n, K, \Omega) > 0$ telle que:

$$\inf_K u_i \geq c_2 \int_{K_\delta} u_i(y)^{p-\epsilon_i} dy,$$

d'où,

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_K u_i \geq c_2 \int_{K_\delta} u_i(y)^{p+1-\epsilon_i} dy.$$

On en déduit que:

$$\|u_i\|_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i} = \int_{\{x,d(x,\partial\Omega)\leq\delta\}} u_i^{p+1-\epsilon_i} + \int_{\{x,d(x,\partial\Omega)\geq\delta\}} u_i^{p+1-\epsilon_i},$$

qui donne,

$$\|u_i\|_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i} \leq \sup u_i \times \inf_{\{x,d(x,\partial\Omega)\geq\delta\}} u_i + \text{mes}(\{x, d(x, \partial\Omega) \leq \delta\})M^{p+1-\epsilon_i},$$

en faisant tendre, i vers l'infini et en prenant δ assez petit, on conclut que,

$$\|u_i\|_{p+1-\epsilon_i} \rightarrow 0.$$

Or, d'après l'injection de Sobolev (voir [V]), $H_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$, en multipliant (E) par u_ϵ , en intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient,

$$K_1 \|u_i\|_{p+1-\epsilon_i}^2 \leq K_2 \|u_i\|_{p+1}^2 \leq \int_{\Omega} (\Delta u_i)^2 = \int_{\Omega} u_i^{p+1-\epsilon_i} = \|u_i\|_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i}.$$

De $0 < \epsilon_i \leq \frac{4}{n-4}$ et de l'inégalité précédente, on a la contradiction suivante,

$$\|u_i\|_{p+1-\epsilon_i} \geq K_3 > 0.$$

REMERCIEMENTS. Ce travail a été fait pendant le séjour de l'auteur en Grèce. L'auteur tient à remercier le département de Mathématiques de l'Université de Patras, surtout le Professeur Athanase Cotsiolis et la Fondation IKY pour leur accueil.

Bibliographie

- [Ag] S. Agmon, The L_p approach to the Dirichlet problem, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **13** (1959), 405–448.
- [Au] T. Aubin, Some nonlinear problems in Riemannian geometry, Springer-Verlag, 1998.
- [Au, D, He] T. Aubin, O. Druet and E. Hebey, Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, **326** (1998), 1117–1121.
- [B1] S. S. Bahoura, Majorations du type $\sup u \times \inf u \leq c$ pour l'équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de \mathbf{R}^n , $n \geq 3$, J. Math. Pures Appl. (9), **83** (2004), 1109–1150.
- [B2] S. S. Bahoura, Estimations du type $\sup \times \inf$ sur une variété compacte, Bull. Sci. Math., **130** (2006), 624–636.
- [B3] S. S. Bahoura, Inégalités de Harnack pour les opérateurs d'ordre 2 et 4 et phénomène de concentration, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **342** (2006), 755–758.
- [BP] H. Brézis and L. A. Peletier, Asymptotic for elliptic equations involving critical growth, Partial differential equations and calculus of variation, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **1** (1989), 149–192.
- [C1] D. Caraffa, Etude des problèmes elliptiques non linéaires du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes, J. Math. Pures Appl. (9), **83** (2004), 115–136.
- [C2] D. Caraffa, Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes, J. Math. Pures Appl. (9), **80** (2001), 941–960.

- [C-L] C.-C. Chen and C.-S. Lin, Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes, *Comm. Pure Appl. Math.*, **50** (1997), 971–1017.
- [C-G] K.-S. Chou and D. Geng, Asymptotics of positive solutions for a biharmonic equation involving critical exponent, *Differ. Integral Equ. Appl.*, **13** (2000), 921–940.
- [DLN] D. G. De Figueiredo, P. L. Lions and R. D. Nussbaum, A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **61** (1982), 41–63.
- [DHR] O. Druet, E. Hebey and F. Robert, Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian Geometry, *Math. Notes*, 45 (2004).
- [GNN] B. Gidas, W. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.*, **68** (1979), 209–243.
- [GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Berlin Springer-Verlag, Grundlehren Math. Wiss., **224** (1983).
- [H] Z.-C. Han, Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **8** (1991), 159–174.
- [He] E. Hebey, Asymptotics for some quasilinear elliptic equations, *Differ. Integral Equ. Appl.*, **9** (1996), 71–88.
- [He,V] E. Hebey and M. Vaugon, The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian Manifolds, *Duke Math. J.*, **79** (1995), 235–279.
- [L1] Y. Y. Li, Prescribing scalar curvature on S^n and related problems I, *J. Differential Equations*, **120** (1995), 319–410.
- [L2] Y. Y. Li, Prescribing scalar curvature on S^n and related problems II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49** (1996), 541–597.
- [M] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 577–591.
- [P] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **165** (1965), 1408–1411.
- [T] N. S. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, **22** (1968), 265–274.
- [V] R. C. A. M. van der Vorst, Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$, *Differ. Integral Equ. Appl.*, **6** (1993), 259–276.

Samy Skander BAHOURA
 Département de Mathématiques
 Université de Patras
 Patras 26500 Grèce
 E-mail: bahoura@ccr.jussieu.fr
 samybahoura@yahoo.fr