

Sur les fonctions périodiques de plusieurs variables II (réduction au cas défini positif)

Par YUKITAKA ABE*

(Reçu le 11 janv., 1991)
(Revisé le 20 déc., 1991)

1. Introduction.

Les fonctions périodiques de n variables complexes se réduisent essentiellement aux fonctions méromorphes sur un groupe toroidal $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$. Cette fonction méromorphe s'écrit comme quotient de deux fonctions automorphes pour un facteur automorphe $\alpha : \Gamma \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^*$. Alors, il est important d'étudier les fonctions automorphes.

Le but de cet article est la caractérisation des facteurs automorphes pour lesquels il existe une fonction automorphe non-triviale. Dans l'article précédent [2], nous avons donné quelques conditions nécessaires pour l'existence des fonctions automorphes non-triviales. Nous leur ajoutons trois conditions nécessaires (Théorèmes 1 et 2), et montrons que le problème se réduit au cas défini positif sous ces conditions (Théorème 3). Dans le cas défini positif, nous avons la solution complète quand $\text{rang } \Gamma = n+1$, et une solution partielle en général ([2]).

Je tiens à remercier M.M. Stein qui m'a fait d'utiles remarques sur une seconde version de cet article et sur l'article précédent [2].

2. Conditions.

Soit $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$ un groupe toroidal non-compact, où Γ est un sous-groupe discret de rang $n+m$, $1 \leq m < n$. Tout espace fibré holomorphe en droites L sur X s'écrit $L = L_\alpha \otimes L_\rho$, où L_α est l'espace fibré holomorphe en droites topologiquement trivial donné par un facteur automorphe $\alpha : \Gamma \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^*$, et L_ρ est l'espace fibré holomorphe en droites donné par un facteur thêta réduit de type $(\mathcal{H}, \phi)$. On notera $H^0(X, \mathcal{O}(L))$ l'espace vectoriel des sections holomorphes de

* Cette recherche a été partiellement supporté par "Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists (No. 02854008), Ministry of Education, Science and Culture".

L . Il est clair qu'il est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions automorphes pour le facteur automorphe $\alpha \cdot \rho$. Notre problème est de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$, et de décider la dimension de l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{O}(L))$.

On écrira $\mathbf{R}_F^{n+m}$ le sous-espace linéaire réel engendré par le sous-groupe discret Γ de $\mathbf{C}^n$. Soit $\mathbf{C}_F^m$ le sous-espace linéaire complexe maximal dans $\mathbf{R}_F^{n+m}$. On notera $\mathcal{A}$ la partie imaginaire de la forme hermitienne $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{C}^n$. Définissons $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{H}|_{\mathbf{C}_F^m \times \mathbf{C}_F^m}$ et $\mathcal{A}_\Gamma = \mathcal{A}|_{\mathbf{R}_F^{n+m} \times \mathbf{R}_F^{n+m}}$. Soit $K = \text{Ker}(\mathcal{H}_\Gamma)$ le noyau de la forme hermitienne $\mathcal{H}_\Gamma$ sur $\mathbf{C}_F^m$ défini par

$$\text{Ker}(\mathcal{H}_\Gamma) = \{x \in \mathbf{C}_F^m ; \mathcal{H}_\Gamma(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{C}_F^m\}.$$

Il est connu que si $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$, alors la forme hermitienne $\mathcal{H}_\Gamma$ est semi-définie positive (Proposition 4.4 dans [1]). Nous considérons donc la condition suivante :

(C0) la forme hermitienne $\mathcal{H}_\Gamma$ est semi-définie positive et non-null.

Ensuite, considérons la condition suivante :

$$(C1) \quad \phi|_{\Gamma \cap K} = 1.$$

Dans l'article précédent [2], nous avons énoncé la nécessité de la condition suivante :

$$(C1') \quad \phi|_{\Gamma \cap K} \text{ est une représentation de } \Gamma \cap K \text{ qui est équivalente à la représentation unitaire } 1.$$

Ici, une représentation ϕ de $\Gamma \cap K$ est un homomorphisme $\phi : \Gamma \cap K \rightarrow \mathbf{C}^*$. Nous précisons la relation d'entre les conditions (C1) et (C1'), et montrons la nécessité de (C1), dans le paragraphe 4.

Nous avons donné l'exemple (Exemple 8.3 dans [2]) qui n'a pas de section holomorphe non-triviale et satisfait aux conditions (C0) et (C1). Cet exemple ne satisfait pas à la condition d'inclusion :

$$(C2) \quad \text{Ker}(\mathcal{A}_\Gamma) \supset K,$$

où $\text{Ker}(\mathcal{A}_\Gamma)$ est le noyau de la forme R -bilinéaire alterné $\mathcal{A}_\Gamma : \mathbf{R}_F^{n+m} \times \mathbf{R}_F^{n+m} \rightarrow \mathbf{R}$.

Soit $\sigma : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n/K$ la projection canonique. On notera $\Gamma^* = \sigma(\Gamma)$ l'image de Γ par σ . Nous considérons de plus la condition suivante :

$$(C3) \quad \Gamma^* \text{ est un sous-groupe discret de } \mathbf{C}^n/K.$$

On peut écrire $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_F^m \times \mathbf{C}^{n-m}$. Soient $(z_1, \dots, z_m; w_1, \dots, w_{n-m})$ des coordonnées holomorphes de $\mathbf{C}^n$ telles que $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{C}_F^m$ et $w = (w_1, \dots, w_{n-m}) \in \mathbf{C}^{n-m}$. Prenons une matrice P de période de Γ par rapport à ces coordonnées

telle que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & T \\ I_{n-m} & R \end{pmatrix},$$

où I_{n-m} est la $(n-m, n-m)$ -matrice unité, $T = (I_m S)$ est la matrice de période d'un tore complexe de dimension m et R est une $(n-m, 2m)$ -matrice réelle satisfaisante à

$${}^t \tau R \notin \mathbf{Z}^{2m}$$

pour tout $\tau \in \mathbf{Z}^{n-m} \setminus \{0\}$ (Proposition 2 dans [3]). Supposons qu'un facteur automorphe additif $a : \Gamma \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ (voir la Définition 2.3 dans [2]) définit le facteur automorphe $\alpha : \Gamma \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^*$ par $\alpha(\gamma, x) = \exp(a(\gamma, x))$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \mathbf{C}^n$. D'après le résultat de Vogt (Proposition 8 dans [3]), on peut supposer de plus que le facteur automorphe additif $a(\gamma, x)$ a les propriétés suivantes :

a) $a(\gamma, x)$ ne dépend pas de z . Par cette raison on écrit $a(\gamma, x) = a(\gamma, w)$ fréquemment.

b) $a(\gamma, w) = 0$ pour tout $\gamma \in \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$.

c) $a(\gamma, w)$ est $\mathbf{Z}^{n-m}$ -périodique pour w .

Pour un point $w \in \mathbf{C}^{n-m}$ fixé, désignons par

$$\alpha_w(\gamma) = \alpha(\gamma, w) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma \cap K$$

la représentation de $\Gamma \cap K$. Considérons la condition suivante :

(C4) Pour tout $w \in \mathbf{C}^{n-m}$, $\alpha_w(\gamma) = 1$ sur $\Gamma \cap K$.

3. Nécessité des conditions (C2) et (C3).

Soit $X = \mathbf{C}^n / \Gamma$ un groupe toroidal et soit $L = L_a \otimes L_\rho$ un espace fibré holomorphe en droites sur X . On dira que l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{O}(L))$ des sections holomorphes de L engendre L sur X si pour chaque $x \in X$ il existe une section $s \in H^0(X, \mathcal{O}(L))$ telle que $s(x) \neq 0$.

LEMME 1. Si $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$, alors $H^0(X, \mathcal{O}(L^l))$ engendre L^l sur X pour tout entier $l \geq 2$.

DÉMONSTRATION. Pour chaque entier positif q , désignons par $A(L^q)$ l'ensemble des fonctions automorphes pour $\alpha^q \cdot \rho^q$. Il est clair que $A(L^q) \cong H^0(X, \mathcal{O}(L^q))$. Par hypothèse, il existe $f \in A(L)$ telle que $f \neq 0$.

Nous démontrons le lemme pour $l=2$ à cause de la simplicité. Cette démonstration est valablement pour le cas général. En utilisant f , nous définissons la fonction holomorphe $F(a, x)$ sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ par

$$F(a, x) = f(x-a)f(x+a).$$

Prenons $x^0 \in C^n$ quelconque. On pose

$$f_0(a) = F(a, x^0).$$

Si $f_0|_{C^n} \equiv 0$, on a $f \equiv 0$. Par suite il existe $a^0 \in C^n$ tel que $f_0(a^0) \neq 0$. Fixons maintenant $a^0 \in C^n$. Alors $F(a^0, x)$ est une fonction automorphe pour

$$\alpha(\gamma, x-a^0)\alpha(\gamma, x+a^0)\rho(\gamma, x-a^0)\rho(\gamma, x+a^0).$$

Puisque le facteur automorphe $\alpha(\gamma, x)$ ne dépend pas de z , on a

$$\alpha(\gamma, x-a^0)\alpha(\gamma, x+a^0) = \alpha(\gamma, x)^2.$$

De plus, il est bien connu que $\rho(\gamma, x-a^0)\rho(\gamma, x+a^0)$ est un facteur thêta réduit de type $(2\mathcal{H}, \phi^2)$. Par conséquent, la fonction $F(a^0, x)$ appartient à $A(L^2)$ par rapport à x . Comme $F(a^0, x^0) = f_0(a^0) \neq 0$, $H^0(X, \mathcal{O}(L^2))$ engendre L^2 sur X . $\square$

REMARQUE. Soient D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs sur X . L'ensemble $\{x \in X; D_1 + x = D_2\}$ est contenu dans le diviseur $D_2 - d_1$ pour tout $d_1 \in D_1$. Alors, on peut prendre a^0 convenable dans la démonstration du lemme tel qu'il existe deux sections holomorphes premières relativement de L^2 si $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$.

THÉORÈME 1. *Supposons $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$. Alors L satisfait aux conditions (C2) et (C3).*

DÉMONSTRATION. Supposons que $L = L_\alpha \otimes L_\rho$ ne satisfait pas à la condition (C2). Par le Lemme 1, l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{O}(L^2))$ des sections holomorphes de L^2 engendre L^2 sur X . L'espace fibré holomorphe en droites L^2 sur X ne satisfait pas à la condition (C2) aussi. Alors, nous pouvons supposer depuis le commencement que $H^0(X, \mathcal{O}(L))$ engendre L sur X et L ne satisfait pas à la condition (C2). De plus, on peut supposer l'existence de la fonction méromorphe non-constante f sur C^n qui s'écrit comme quotient de deux sections holomorphes premières relativement de L par la Remarque susdite. La période P_f de f est un sous-groupe fermé de C^n contenant Γ . Alors on a $P_f = A \oplus B$, où A est un sous-espace linéaire complexe de C^n et B est discret. Donc, il existe la fonction méromorphe f' sur C^n/A avec la période B telle que f est l'image réciproque π^*f' de f' par la projection $\pi: C^n \rightarrow C^n/A$. Comme $\Gamma \subset P_f$, l'image $\Gamma' = \pi(\Gamma)$ de Γ par π est un sous-groupe de B . Par suite, on obtient la surjection $\bar{\pi}: X \rightarrow X' = (C^n/A)/B$ en vertu de π . Nous notons que X' est aussi un groupe toroidal. Pour f' , il existe un espace fibré holomorphe en droites L' sur X' et deux sections holomorphes s'_1, s'_2 premières relativement de L' telles que $f' = s'_2/s'_1$. Comme $f = \pi^*f'$, on a $L \cong \pi^*L'$. Soit $\mathcal{H}$ une forme hermitienne

de $L = L_\alpha \otimes L_\rho$, c'est-à-dire que ρ est le facteur thêta réduit de type $(\mathcal{H}, \phi)$. Soit $\mathcal{H}'$ une forme hermitienne de π^*L' . Alors nous obtenons $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}'_F$. Comme f est constante sur K (voir la démonstration de la Proposition 4.5 dans [1]), on a $K \subset A \subseteq \mathbf{C}^m_F$. Nous avons d'abord

$$\mathcal{A}'(x, y) = 0 \quad \text{pour tous } x \in K \text{ et } y \in \mathbf{R}^{n+m}_F.$$

D'autre part, il existe $x_0 \in K \setminus \text{Ker}(\mathcal{A}_F)$ par hypothèse $\text{Ker}(\mathcal{A}_F) \subsetneq K$. Alors, il existe $y_0 \in \mathbf{R}^{n+m}_F$ tel que $\mathcal{A}(x_0, y_0) \neq 0$. Ceci est une contradiction. Par conséquent, il faut que la condition (C2) est satisfaite.

Ensuite, nous montrons la nécessité de la condition (C3). Comme $\mathcal{H}'_F = \mathcal{H}_F$ et il existe une forme hermitienne $\mathcal{H}'_0$ définie positive sur $\mathbf{C}^n/A$ telle que $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_0 \circ (\pi \times \pi)$, on a $A = K$. Nous avons donc $\Gamma' = \Gamma^* = \sigma(\Gamma)$. $\square$

REMARQUE. Soit $\mathcal{H}$ une forme hermitienne sur $\mathbf{C}^n$ dont la partie imaginaire $\mathcal{A} = \text{Im} \mathcal{H}$ est à valeurs entières sur $\Gamma \times \Gamma$. On dira qu'une forme hermitienne $\tilde{\mathcal{H}}$ sur $\mathbf{C}^n$ est une extension de $\mathcal{H}$ si $\tilde{\mathcal{A}}_F = \mathcal{A}_F$, où $\tilde{\mathcal{A}} = \text{Im} \tilde{\mathcal{H}}$ (cf. [2]).

Supposons maintenant que $\mathcal{H}_F$ est semi-définie positive. Alors, $\mathcal{H}$ a une extension $\tilde{\mathcal{H}}$ semi-définie positive sur $\mathbf{C}^n$ si et seulement si la condition (C2) est satisfaite (Proposition 8.1 dans [2]). Dans ce cas, on a

$$\text{Ker}(\mathcal{H}_F) = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{H}}) = \{x \in \mathbf{C}^n; \mathcal{H}(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in \mathbf{C}^n\}.$$

4. Remarque sur les conditions (C1) et (C1').

Dans ce paragraphe, nous complétons l'article précédent [2] et montrons la nécessité de la condition (C1).

LEMME 2. *Supposons que la condition (C3) est satisfaite. Alors, $K/(\Gamma \cap K)$ est un tore complexe.*

DÉMONSTRATION. Soit $2k = \dim_{\mathbf{R}} K$. Si $\text{rang } \Gamma \cap K < 2k$, alors on a $\text{rang } \Gamma^* > n + m - 2k$. Ceci contredit à la condition (C3). $\square$

REMARQUE. Nous avons énoncé la nécessité de la condition (C1') (Théorème 3.4 dans [2]). Il n'est pas correct qu'il existe la projection canonique $X \rightarrow X_0 := K/(\Gamma \cap K)$ (p. 91, lignes 18 et 19 dans [2]). Mais on peut conclure que X_0 est un tore complexe si $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$, par le Théorème 1 et le Lemme 2. Ensuite, la démonstration du Théorème 3.4 dans [2] est validement.

PROPOSITION. *Supposons $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$. Alors, la condition (C1) est satisfaite.*

DÉMONSTRATION. Par le Théorème 3.4 dans [2] et la Remarque susdite, la condition (C1') est satisfaite. Comme $K/(\Gamma \cap K)$ est un tore complexe (Lemme

2), il est clair que $\phi|_{\Gamma \cap K} = 1$. □

5. Nécessité de la condition (C4).

THÉORÈME 2. *Soit $L = L_\alpha \otimes L_\rho$ un espace fibré holomorphe en droites sur un groupe toroidal $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$. Si $H^0(X, \mathcal{O}(L)) \neq 0$, alors α est équivalent au facteur automorphe qui satisfait à la condition (C4).*

DÉMONSTRATION. Par les résultats jusqu'ici, on peut supposer que $L = L_\alpha \otimes L_\rho$ satisfait aux conditions (C0)~(C3). Soit $\bar{\sigma} : X \rightarrow Y = (\mathbb{C}^n / K) / \Gamma^*$ la surjection induite de la projection $\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / K$, où $\Gamma^* = \sigma(\Gamma)$. Par la démonstration du Théorème 1, il existe un espace fibré holomorphe en droites $L' = L_{\alpha'} \otimes L_{\rho'}$ sur Y tel que $L^2 \cong \bar{\sigma}^* L'$. Supposons que ρ' est de type $(\mathcal{H}', \phi')$. Comme $L^2 \cong \bar{\sigma}^* L'$, $\alpha^2 \rho^2$ est équivalent à $(\alpha' \cdot \rho') \circ (\sigma \times \sigma)$. De plus, on peut supposer $2\mathcal{H} = \mathcal{H}' \circ (\sigma \times \sigma)$, car $(2\mathcal{A})_\Gamma = (\mathcal{A}' \circ (\sigma \times \sigma))_\Gamma$. Comme ρ^2 et $\rho' \circ (\sigma \times \sigma)$ sont deux facteurs thêta réduits avec la même forme hermitienne, il existe une représentation $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}_1^\times = \{\zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta| = 1\}$ telle que $\rho^2 = \lambda \cdot (\rho' \circ (\sigma \times \sigma))$. Alors α^2 est équivalent à $\lambda^{-1} \cdot (\alpha' \circ (\sigma \times \sigma))$. Soit $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ le homomorphisme tel que $\lambda(\gamma) = \exp(\varphi(\gamma))$. Alors, deux facteurs automorphes additifs $a(\gamma, w)$ et $-(1/2)\varphi(\gamma) + (1/2)a'(\sigma(\gamma), w)$ sont équivalents, où $\alpha = \exp a$ et $\alpha' = \exp a'$. Pour $\gamma \in \Gamma \cap K$, on a $\alpha'(\sigma(\gamma), w) = \alpha'(0, w) = 1$. D'autre part,

$$\phi(\gamma)^2 = \lambda(\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma \cap K.$$

Comme $\phi(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \Gamma \cap K$ par (C1), on a $\lambda(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in \Gamma \cap K$. Alors nous pouvons supposer que $\varphi(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma \cap K$. Par conséquent, le facteur automorphe $\exp(-(1/2)\varphi(\gamma) + (1/2)a'(\sigma(\gamma), w))$ satisfait à la condition (C4). □

6. Réduction au cas défini positif.

Soit $X = \mathbb{C}^n / \Gamma$ un groupe toroidal, où $\text{rang } \Gamma = n + m$, $1 \leq m < n$. Supposons qu'un espace fibré holomorphe en droites $L = L_\alpha \otimes L_\rho$ sur X satisfait aux conditions (C0)~(C4). Nous pouvons supposer par (C2) que la forme hermitienne $\mathcal{H}$ est semi-définie positive sur $\mathbb{C}^n$ et $\text{Ker}(\mathcal{H}) = \text{Ker}(\mathcal{H}_\Gamma) = K$ (Remarque dans le paragraphe 3). De plus, la projection canonique $\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / K$ donne la surjection $\bar{\sigma} : X = \mathbb{C}^n / \Gamma \rightarrow Y = (\mathbb{C}^n / K) / \Gamma^*$ par (C3). Ici Y est aussi un groupe toroidal. Il est clair qu'il y a la forme hermitienne $\mathcal{H}_0$ définie positive sur $\mathbb{C}^n / K$ telle que $\text{Im } \mathcal{H}_0$ est à valeurs entières sur $\Gamma^* \times \Gamma^*$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \circ (\sigma \times \sigma)$. Pour chaque $\gamma^* \in \Gamma^*$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma^* = \sigma(\gamma)$. En utilisant tel γ , nous définissons $\phi_0 : \Gamma^* \rightarrow \mathbb{C}_1^\times = \{\zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta| = 1\}$ par $\phi_0(\gamma^*) = \phi(\gamma)$. Par la condition (C1), $\phi_0(\gamma^*)$ est indépendante du choix de γ avec $\gamma^* = \sigma(\gamma)$. Nous obtenons alors un semi-caractère ϕ_0 de Γ^* attaché à $\mathcal{H}_0$. Ensuite on a le facteur thêta réduit positif $\rho_0 : \Gamma^* \times$

$(\mathbb{C}^n/K) \rightarrow \mathbb{C}^*$ de type $(\mathcal{H}_0, \phi_0)$ tel que $\rho = \rho_0 \circ (\sigma \times \sigma)$. Soit L_{ρ_0} l'espace fibré holomorphe en droites sur Y donné par le facteur thêta ρ_0 . Alors, L_ρ est l'image réciproque $\bar{\sigma}^* L_{\rho_0}$ de L_{ρ_0} par $\bar{\sigma}$.

Considérons ensuite L_α . Nous définissons le facteur automorphe $\alpha_0: \Gamma^* \times (\mathbb{C}^n/K) \rightarrow \mathbb{C}^*$ par

$$\alpha_0(\gamma^*, w) = \alpha(\gamma, w) \quad \text{pour } \gamma^* \in \Gamma^*,$$

où γ est un élément de Γ tel que $\gamma^* = \sigma(\gamma)$. Cette définition de α_0 est indépendante du choix de γ avec $\gamma^* = \sigma(\gamma)$ par (C4). Soit L_{α_0} l'espace fibré holomorphe en droites sur Y donné par α_0 . Il est clair $L_\alpha = \bar{\sigma}^* L_{\alpha_0}$ par la définition de α_0 . On a donc $L_\alpha \otimes L_\rho = \bar{\sigma}^*(L_{\alpha_0} \otimes L_{\rho_0})$.

THÉOREME 3. Soient $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ un groupe toroidal, et $L = L_\alpha \otimes L_\rho$ un espace fibré holomorphe en droites sur X satisfaisant aux conditions (C0)~(C4). Soient $Y = (\mathbb{C}^n/K)/\Gamma^*$ le groupe toroidal et $L_{\alpha_0} \otimes L_{\rho_0}$ l'espace fibré holomorphe en droites sur Y , obtenus par la construction précédente. Alors on a un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}(L_\alpha \otimes L_\rho)) \cong H^0(Y, \mathcal{O}(L_{\alpha_0} \otimes L_{\rho_0})).$$

DÉMONSTRATION. On écrira $z = (z', z'') \in K \times \mathbb{C}^{m-k} = \mathbb{C}_T^m$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$$f(x + \gamma) = \alpha(\gamma, w) \rho(\gamma, x) f(x)$$

pour $\gamma \in \Gamma$ et $x = (z', z''; w) \in \mathbb{C}^n$. Prenons $\gamma \in \Gamma \cap K$ quelconque. D'abord on a $\phi(\gamma) = 1$ et $\alpha(\gamma, w) = 1$ par les conditions (C1) et (C4). Comme $k = \text{Ker}(\mathcal{H}) = \text{Ker}(\mathcal{H}_T)$ par (C2), nous obtenons

$$\mathcal{H}(\gamma, x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{C}^n.$$

Alors, la fonction $f(x)$ a la période $\Gamma \cap K$. Grâce au Lemme 2, il en résulte que $f(x)$ ne dépend pas de $z' \in K$. Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Bibliographie

- [1] Y. Abe, On toroidal groups, J. Math. Soc. Japan, **41** (1989), 699-708.
- [2] Y. Abe, Sur les fonctions périodiques de plusieurs variables, Nagoya Math. J., **122** (1991), 83-114.
- [3] Ch. Vogt, Line bundles on toroidal groups, J. Reine Angew. Math., **335** (1982), 197-215.

Yukitaka ABE

Département de Mathématiques
Université de Toyama
Gofuku, Toyama 930
Japon