J. Math. Soc. Japan
Vol. 20, Nos. 1-2, 1968

Sur les groupes algébriques semi-simples déployés

Dédié à Monsieur S. Iyanaga pour son soixantième anniversaire

Par Takashi TASAKA

(Reçu le 25 janv., 1967)

§ 0. Introduction.

Dans cet article, on considère quelques problèmes concernant les groupes algébriques semi-simples, surtout dans le cas où les groupes soient définis et déployés sur un corps k.

Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur un corps de nombres algébriques k. On construit le groupe adélique G_A de G. On désigne par G'_A le groupe des commutateurs de G_A au sens abstrait, alors le produit $G_kG'_A$ est un sous-groupe distingué de G_A au sens abstrait. Si G soit défini et déployé sur k, on démontre que les deux groupes G'_A et $G_kG'_A$ sont fermés dans G_A, et que le groupe quotient $A_k(G)=G_A/G_kG'_A$ est isomorphe au groupe abélien et compact qui est canoniquement isomorphe au produit des groupes de Galois des extensions abéliennes de k bien déterminées. Plus précisément, on désigne par J_k le groupe des idèles de k. Pour un entier positif n, nous posons

$$A_k(n)=J_k/k^*(J_k)^n\,.$$

Le groupe $A_k(n)$ est isomorphe au groupe de Galois de $K(n)$ sur k, où $K(n)$ désigne le corps composé de toutes extensions cycliques de k de degré d (d divise n). Alors on a

$$A_k(G)\cong\prod_{i=1}^{l}A_k(e_i)\,,$$

où l est le rang de G et e_i sont des diviseurs élémentaires de l'opérateur qui est déterminé par l'isogénie universelle de G.

Soit S un sous-ensemble fini de l'ensemble V des places de k contenant toutes places infinies de k. Si G soit un groupe algébrique linéaire défini sur k, on pose

$$G_S=\prod_{v\in S}G_v\,,$$

$$G_{A(S)}=G_S\times\prod_{v\notin S}G_{\mathfrak{O}_v}\,.$$

Si G soit semi-simple et si G_S ne soit pas compact, $G_kG_{A(S)}$ contient le groupe des commutateurs de G_A et la décomposition bilatère de G_A suivant les sous-groupe G_k et $G_{A(S)}$ est isomorphe au groupe quotient $G_A/G_kG_{A(S)}$ (au moins si G ne contienne pas le facteur simple de type E_8 qui est anisotropique sur k), voir Kneser [7] Part I.

Nous posons

$$A_k(n, S) = J_k/k^*(J_k)^n J_{A(S)} .$$

Si G soit déployé sur k et si G soit de type spécial (n° 4), on peut démontrer que

$$G_k \backslash G_A/G_{A(S)} \cong \prod_{i=1}^{l} A_k(e_i, S) ,$$

et que le nombre des classes dans un genre est égal au produit des degrés de quelques extensions finies de k.

Dans cet article, nous supposons que tout corps considéré soit de caractéristique zéro.

§ 1. Préliminaire.

Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur un corps k. Il y a un revêtement universel $\tilde{G}$ de G défini sur k et une isogénie π de $\tilde{G}$ sur G défini sur k qui sont uniques à un isomorphisme sur k près ([8], Appendix). C'est-à-dire il y a un groupe algébrique semi-simple simplement connexe $\tilde{G}$ défini sur k et une isogénie π de $\tilde{G}$ sur G que nous dirons l'isogénie universelle de G. Le noyau C de π est un groupe fini défini sur k contenu dans le centre de $\tilde{G}$. On a par conséquent une suite exacte des groupes algébriques;

(1) $$1 \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 .$$

Si l'on note $\bar{k}$ la clôture algébrique de k, on a

(1′) $$1 \longrightarrow C_{\bar{k}} \longrightarrow \tilde{G}_{\bar{k}} \xrightarrow{\pi} G_{\bar{k}} \longrightarrow 1 .$$

La suite (1′) entraine la suite suivante;

(2) $$1 \longrightarrow C_k \longrightarrow \tilde{G}_k \longrightarrow G_k \longrightarrow H^1(k, C) ,$$

où $H^1(k, C) = H^1(\mathfrak{g}(\bar{k}/k), C_{\bar{k}})$, et $\mathfrak{g}(\bar{k}/k)$ désigne le groupe de Galois de $\bar{k}$ sur k.

On désigne par G_k^1 l'image de $\tilde{G}_k$ par l'isogénie π. Comme $H^1(k, C)$ est un groupe abléien, G_k^1 contient le groupe des commutateurs G_k' de G_k.

§ 2. Cas de type déployé.

Soit G déployé sur k. Il y a donc un tore maximal T de G qui est déployé (ou décomposé) sur k, et pour toute racine α de G par rapport au T, il y a un isomorphisme θ_α défini sur k de $\boldsymbol{G}_a$ sur un sous-groupe U_α de G tel que

$$t\theta_\alpha(u)t^{-1} = \theta_\alpha(\alpha(t)u)\,, \qquad \text{pour } t \in T \text{ et } u \in \boldsymbol{G}_a\,.$$

Ici on a désigné comme toujours par $\boldsymbol{G}_a$ le groupe additif du domaine universel Ω de k.

On fixe un ordre lexicographique dans le module $X(T)$ des caractères rationnels de T. On désigne par U (resp. V) le sous-groupe de G engendré par U_α avec toutes les racines positives α (resp. négatives). Dans ce cas, on a la décomposition de Bruhat de G_K pour un corps K contenant k;

$$G_K = \bigcup_{w \in W} U'_{w,K} \cdot n_w \cdot T_K \cdot U_K\,, \tag{3}$$

où W est le groupe de Weyl de G: $W = N(T)/T$, et U'_w signifie un sous-groupe de U engendré par U_α avec toutes les racines positives α telles que $w(\alpha)$ soient négatives, et n_w signifie un représentant de $w \in W$ dans $N(T)_k$ [**2**].

Le revêtement universel de G se construit par Steinberg [**9**]. Plus précisément, soit $\Sigma = \{\alpha\}$ un système des racines de G par rapport au tore maximal T déployé sur k de G. Pour un corps K contenant k, on construit un groupe $\Gamma(K)$ par les générateurs $x_\alpha(t)$ ($t \in K$, $\alpha \in \Sigma$) sous les conditions (A), (B) et (C), mais l'on change la condition (B) en (B′) dans la composante simple de G qui est de rang 1.

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u)\,, \qquad \text{quelques soient } t,\ u \in K\,. \tag{A}$$

Pour deux racines α et β non-proportionnelles,

$$[x_\alpha(t),\ x_\beta(u)] = \prod_{i,j>0} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij,\alpha\beta}t^i u^j)\,, \tag{B}$$

où $[x, y]$ est le commutateur de x et y, et le produit s'étend sur toutes racines $i\alpha+j\beta$ $(i, j > 0)$ dans un certain ordre, et $c_{ij,\alpha\beta}$ sont les entiers rationnels donnés par Chevalley [**3**] p. 33. Pour $t \in K^*$, on pose

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)\,, \tag{4}$$

$$h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1} = w_\alpha(t)w_\alpha(-1)\,. \tag{5}$$

$$w_\alpha(t)x_\alpha(u)w_\alpha(t)^{-1} = x_{-\alpha}(-t^{-2}u)\,, \tag{B′}$$

$$h_\alpha(t)h_\alpha(u) = h_\alpha(tu)\,, \qquad \text{quelques soient } t,\ u \in K^*. \tag{C}$$

On désigne par $\Delta = \{a\}$ l'ensemble des racines simples par rapport à l'ordre déterminé plus haut. Si l'on désigne par $H(K)$ le sous-groupe de $\Gamma(K)$ engendré par $h_\alpha(t)$ avec $\alpha \in \Sigma$ et $t \in K^*$, on peut écrire chaque élément h de $H(K)$ de façon unique sous la forme (6);

$$h = \prod_{a \in \Delta} h_a(t_a)\,, \qquad t_a \in K^*\,, \tag{6}$$

où ce produit s'étend sur toutes les racines simples. Pour deux éléments $h_1=\prod h_a(t_a)$ et $h_2=\prod h_a(s_a)$ de $H(K)$, on a

$$h_1h_2=\prod h_a(t_a s_a)\,.$$

Si $h=\prod h_a(t_a)\in H(K)$, on a

$$hx_\alpha(u)h^{-1}=x_\alpha(u\prod_{a\in\Delta}t_a^{c(\alpha,a)})\,, \tag{7}$$

où $c(\alpha, a)=2(\alpha, a)/(a, a)$ (l'entier de Cartan). Par conséquent, si K a plus de trois éléments, $x_\alpha(u)$ est contenu dans $\Gamma(K)'$. D'où

$$\Gamma(K)'=\Gamma(K)\,. \tag{8}$$

Soit R un sous-anneau de K. On désigne par $U(R)$ (resp. $V(R)$) un sous-groupe de $\Gamma(K)$ engendré par $x_\alpha(t)$ $(t\in R)$ avec toutes les racines positives α (resp. négatives) et par $H(R)$ un sous-groupe de $H(K)$ engendré par $h_a(t)$ $(t\in R^*)$ avec toutes les racines simples a, où R^* signifie le groupe des éléments inversibles dans R. On désigne par $\Gamma(R, K)$ un sous-groupe de $\Gamma(K)$ engendré par $U(R)$, $V(R)$ et $H(R)$. Si R soit un sous-corps de K, on a

$$\Gamma(R)=\Gamma(R, K)\,.$$

Soit W le groupe de Weyl de G, c'est-à-dire $W=N(T)/T$. Le normalisateur $N(H(K))$ de $H(K)$ dans $\Gamma(K)$ est le sous-groupe de $\Gamma(K)$ engendré par $H(K)$ et $w_\alpha(t)$, et on a l'isomorphisme de $N(H(K))/H(K)$ sur $W=N(T)/T$. Dans ce qui suit, on identifie $N(H(K))/H(K)$ au W. Pour $w\in W$, on désigne par $U'_w(K)$ un sous-groupe de $U(K)$ engendré par $x_\alpha(t)$ $(t\in K)$ avec toutes les racines positives α telles que $w(\alpha)$ soient négatives. Alors on a la décomposition de Bruhat de $\Gamma(K)$;

$$\Gamma(K)=\bigcup_{w\in W}U'_w(K)\cdot\sigma_w\cdot H(K)\cdot U(K)\,, \tag{9}$$

où pour les symétries $S_\alpha\in W$ par rapport aux α, $\sigma_{S_\alpha}=w_\alpha(1)=x_\alpha(1)x_{-\alpha}(-1)x_\alpha(1)$ $\in N(H(K))$, et pour les autres éléments w de W, σ_w sont les produits correspondants [**9**].

Pour le revêtement universel $\tilde G$ de G défini sur k, on a $\tilde G_K=\Gamma(K)$ pour un corps K contenant k. L'application de $\Gamma(K)$ dans G_K qui est compatible avec l'isogénie π se donne par $x_\alpha(t)\to\theta_\alpha(a_\alpha t)$ $(t\in K)$ où $a_\alpha\in k^*$. En changeant de θ_α, on peut supposer que $a_\alpha=1$ pour toute α. Dans ce qui suit, on supposera que $a_\alpha=1$, et on identifiera $\tilde G_K$ au $\Gamma(K)$.

PROPOSITION 1. *Si G est un groupe algébrique semi-simple connexe défini et déployé sur k, alors on a*

$$G_k^1=G_k'\,. \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que G_k' contient G_k^1. Par (8), on a

$$G_k^1 = \pi(\Gamma(k)) = \pi(\Gamma(k)') = (\pi(\Gamma(k)))' = (G_k^1)' \subset G_k',$$

ce que nous voulions démontrer.

Si $\tilde{T}$ soit un tore maximal de $\tilde{G}$ tel que $\pi(\tilde{T}) = T$, on a canoniquement $\tilde{T}_K = H(K)$ pour un corps K contenant k. Pour fixer les idées, on considère que $\tilde{T} = (\boldsymbol{G}_m)^l$ et $T = (\boldsymbol{G}_m)^l$, où l signifie le rang de G. Alors on a

$$\pi : \tilde{T} \in (x_1, \cdots, x_l) \to (\prod_{i=1}^{l} x_i^{a_{1i}}, \cdots, \prod_{i=1}^{l} x_i^{a_{li}}) \in T,$$

où les x_i sont contenus dans le groupe multiplicatif $\boldsymbol{G}_m$ du domaine universel Ω. La matrice $A = (a_{ij})$ est contenue dans l'anneau $M_l(\boldsymbol{Z})$ des matrices carrées d'ordre l à coefficients dans $\boldsymbol{Z}$ et contenue dans $GL(l, \boldsymbol{Q})$. On suppose que ses diviseurs élémentaires soient $e_1, \cdots, e_l$. En posant $T_k^1 = \pi(\tilde{T}_k) = T_k \cap G_k^1$, on a

$$T_k^1 \cong \prod_{i=1}^{l} (k^*)^{e_i}, \tag{11}$$

où $(k^*)^n = \{x^n : x \in k^*\}$. Si C soit le noyau de π, on a $C = \prod_{i=1}^{l} \boldsymbol{Z}/e_i\boldsymbol{Z}$ et $C_k = \prod_{i=1}^{l} \boldsymbol{Z}/d_i\boldsymbol{Z}$, où d_i est l'entier positif maximal divisant e_i tel que d_i-ièmes racines de l'unité soient contenues dans k. On a la décomposition de Bruhat de G_k^1 de celle de $\tilde{G}_k$;

$$G_k^1 = \bigcup_{w \in W} U'_{w,k} \cdot n_w \cdot T_k^1 \cdot U_k, \tag{12}$$

où $n_w = \pi(\sigma_w)$. Dans la décomposition (3), on peut prendre aussi $n_w = \pi(\sigma_w)$. Par conséquent on a les isomorphismes suivants;

$$G_k/G_k^1 \cong T_k/T_k^1 \cong \prod_{i=1}^{l} k^*/(k^*)^{e_i}. \tag{13}$$

Si k est un corps valué localement compact, on en déduit facilement que T_k^1 est ouvert dans T_k, et est d'indice fini dans T_k. Par (13), nous avons donc démontré la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini et déployé sur k. Si k est un corps valué localement compact, alors le groupe des commutateurs G_k' de G_k est ouvert dans G_k et le groupe quotient G_k/G_k' est un groupe abélien fini.*

REMARQUE. Si k est le corps des nombres réels $\boldsymbol{R}$, on peut vérifier sans difficulté que $G_{\boldsymbol{R}}'$ est la composante connexe de l'élément neutre de $G_{\boldsymbol{R}}$ au sens ordinaire. Si k est le corps des nombres complexes $\boldsymbol{C}$, on a $G_{\boldsymbol{C}}' = G_{\boldsymbol{C}}$.

§ 3. Groupes adéliques.

Dans ce numéro, on considère les groupes algébriques définis sur un corps de nombres algébriques k, c'est-à-dire sur une extension finie du corps des nombres rationnels $\boldsymbol{Q}$. On désigne par I l'anneau des entiers algébriques dans k. Soit $V=\{v\}$ l'ensemble des places de k, et soit k_v le complété de k par rapport à une places v. Si v soit une place finie, on désigne comme toujours par $\mathfrak{O}_v$ ou simplement par $\mathfrak{O}$ l'anneau de valuation de k_v, par $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathfrak{O}_v$, et par $\mathfrak{u}$ le groupe des unités de $\mathfrak{O}_v$. Supposons que G soit un groupe algébrique défini sur k. On pose $G_v=G_{k_v}$; pour une place finie v, on désigne par $G_{\mathfrak{O}}$ l'ensemble de point x de G_v tel que les coordonnées de x et x^{-1} soient contenues dans $\mathfrak{O}$, et pour une place infinie v, on pose $G_{\mathfrak{O}}=G_v$. Le groupe G_v est localement compact, et $G_{\mathfrak{O}}$ est un sous-groupe ouvert et compact de G_v pour presque toute place finie v (c'est-à-dire sauf le nombre fini des places). Si G soit linéaire, alors $G_{\mathfrak{O}}$ est un sous-groupe ouvert et compact de G_v pour toute place finie v. Le groupe adélique G_A de G est, par définition, le produit direct des G_v restrient aux $G_{\mathfrak{O}}$ [**10**];

$$G_A=\prod_{v\in V}(G_v, G_{\mathfrak{O}})\,.$$

On suppose que G soit semi-simple. On note G'_A le groupe des commutateurs de G_A au sense abstrait. Alors le groupe $G_kG'_A$ est distingué dans G_A au sens abstrait. On définit un groupe abélien abstrait par

$$A_k(G)=G_A/G_kG'_A=G_k\backslash G_A/G'_A\,, \tag{14}$$

et un groupe topologique par

$$B_k(G)=G_A/\overline{G_kG'_A}\,, \tag{15}$$

où $\overline{G_kG'_A}$ signifie l'adhérence de $G_kG'_A$ dans G_A. D'après la définition du groupe adélique, on peut voir sans difficulté que les groupes $A_k(G)$ et $B_k(G)$ ne dépendent pas de la représentation affine de G.

Dans la suite, on supposera que le groupe algébrique semi-simple G soit connexe et déployé sur k. On utilise les notations déterminées dans n° 2.

Nous supposons que G soit linéaire, c'est-à-dire soit contenu dans $SL(N, \Omega)$ pour quelque entier N [**4**] Exp. 16. Alors T est diagonalisable sur k. Soit L le réseau sur I qui détermine le sous-groupe G_I. On pose $L_v=L\underset{I}{\otimes}\mathfrak{O}$ pour une place finie v. On peut vérifier sans difficulté les faits suivants de (i) à (vi).

i) *Pour presque toute place finie v, il existe une base $x_1, \cdots, x_N$ de L_v telle que*

$$tx_i=h_i(t)x_i\,, \qquad \text{pour } t\in T \text{ et } i=1, \cdots, N\,,$$

où h_i sont les poids de cette représentation.

Pour une place v qui satisfait à (i), on pose

$$\mathfrak{a}_v=\{u\in k_v:\ \theta_\alpha(u)\in U_{\mathfrak{O}} \text{ pour toute racine } \alpha\}\,,$$

alors $\mathfrak{a}_v$ est l'idéal de $\mathfrak{O}$.

ii) *Pour presque toute place finie v, on a* $\mathfrak{a}_v=\mathfrak{O}_v$.

Soit P le module des poids de $\mathfrak{g}$ qui est l'algèbre de Lie correspondant au G, et soit R le module engendré par les racines simples de G. Comme $[P, R]<\infty$, on a $\{t\in T_v: h(t)\in\mathfrak{u}$ pour tout $h\in P\}=\{t\in T_v: h(t)\in\mathfrak{u}$ pour tout $h\in R\}$.

iii) *Pour presque toute place finie v, on a*

$$T_{\mathfrak{O}}=\{t\in T_v: h(t)\in\mathfrak{u} \text{ pour tout } h\in P\}.$$

On note $V_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe de $V_{\mathfrak{O}}$ qui est le noyau de la réduction modulo $\mathfrak{p}$.

iv) *Pour presque toute place finie v, on a* $V_{\mathfrak{p}}=\pi(V(\mathfrak{p}))$.

Soit G^* le groupe adjoint de G. On a la suite exacte suivante;

$$1\longrightarrow Z\longrightarrow G\xrightarrow{f} G^*\longrightarrow 1, \tag{16}$$

où Z signifie le centre de G. G_K^* est le groupe construit par Chevalley [3] n° 3. On note U^*, V^* et T^* les sous-groupes de G^* correspondants aux U, V et T (resp.).

v) *Pour presque toute place finie v, $G_{\mathfrak{O}}^*$ est le sous-groupe de G_v^* qui laisse invariant le réseau de Chevalley.*

Pour une place v qui satisfait à (v), on a la décomposition suivante de $G_{\mathfrak{O}}^*$, voir Iwahori-Matsumoto [5] Prop. 2.4.

$$G_{\mathfrak{O}}^*=\bigcup_{w\in W} V_{\mathfrak{p}}^*\cdot U_{\mathfrak{O}}^*\cdot n_w^*\cdot T_{\mathfrak{O}}^*\cdot U_{\mathfrak{O}}^*, \tag{17}$$

où $n_w^*=f(n_w)\in N(T^*)$.

vi) *Pour presque toute place finie v, on a* $f(G_{\mathfrak{O}})\subset G_{\mathfrak{O}}^*$.

PROPOSITION 3. *Si une place finie v satisfait aux conditions* (i)~(vi), *$G_{\mathfrak{O}}$ est engendré par les sous-groupes $U_{\mathfrak{O}}$, $V_{\mathfrak{O}}$ et $T_{\mathfrak{O}}$. Nous avons la décomposition suivante de $G_{\mathfrak{O}}$;*

$$G_{\mathfrak{O}}=\bigcup_{w\in W} V_{\mathfrak{p}}\cdot U_{\mathfrak{O}}\cdot n_w\cdot T_{\mathfrak{O}}\cdot U_{\mathfrak{O}}. \tag{18}$$

DÉMONSTRATION. Sous notre hypothèse, f induit l'isomorphisme de $U_{\mathfrak{O}}$ (resp. $V_{\mathfrak{p}}$) sur $U_{\mathfrak{O}}^*$ (resp. $V_{\mathfrak{p}}^*$). Soit x contenu dans $G_{\mathfrak{O}}$. Alors $f(x)$ est contenu dans $G_{\mathfrak{O}}^*$. D'après (17), on a

$$f(x)=v^*u^*n_w^*t^*y^*,$$

où $v^*\in V_{\mathfrak{p}}^*$, $t^*\in T_{\mathfrak{O}}^*$, u^* et $y^*\in U_{\mathfrak{O}}^*$, et $n_w^*=f(n_w)$. Il existe v dans $V_{\mathfrak{p}}$, et u et y dans $U_{\mathfrak{O}}$ tels que $f(v)=v^*$, $f(u)=u^*$, et $f(y)=y^*$. D'où

$$t^*=f(n_w^{-1}u^{-1}v^{-1}xy^{-1})\in f(G_{\mathfrak{O}})\cap T_{\mathfrak{O}}^*.$$

Par conséquent, il existe t dans $T_{\mathfrak{O}}$ tel que $f(t)=t^*$. D'où

$$x=vun_wtyz,$$

où z est contenu dans $T_{\mathfrak{O}}\cap\ker(f)$. La décomposition (18) de $G_{\mathfrak{O}}$ est immédiate, car z est contenu dans le centre de $G_{\mathfrak{O}}$.

PROPOSITION 4. *Si une place finie v satisfait aux conditions* (i)$\sim$(vi), *et si le corps résiduel $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ a plus de trois éléments, on a*

$$G_{\mathfrak{O}} \cap G'_v = (G_{\mathfrak{O}})' .$$

DÉMONSTRATION. Dans $\Gamma(k_v)$, on a $h_\alpha(t)x_\alpha(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\alpha(t^2u)$. D'où

$$[h_\alpha(t),\ x_\alpha(u)] = x_\alpha((t^2-1)u) .$$

Sous notre hypothèse, il y a un élément t dans $\mathfrak{u}$ tel que t^2-1 soit contenu dans $\mathfrak{u}$. Par conséquent $U(\mathfrak{O})$ et $V(\mathfrak{p})$ sont contenus dans $\Gamma(\mathfrak{O}, k_v)'$ et leurs images $U_{\mathfrak{O}}$ et $V_{\mathfrak{p}}$ par π sont contenues dans $G'_{\mathfrak{O}}$. Comme σ_w est contenu dans $\Gamma(\mathfrak{O}, k_v)'$, $n_w = \pi(\sigma_w)$ est contenu dans $G'_{\mathfrak{O}}$. D'après (18), il suffit de considérer l'ensemble $T_{\mathfrak{O}} \cap G'_v$. Il est facile de voir qu'il est l'image de $H(\mathfrak{O})$ par π. D'après la définition de $h_\alpha(t)$ (voir (4) et (5)), $H(\mathfrak{O})$ est contenu dans $\Gamma(\mathfrak{O}, k_v)'$. Il en résulte que $T_{\mathfrak{O}} \cap G'_v$ est contenu dans $G'_{\mathfrak{O}}$, ce que nous voulions démontrer. Remarque: Pour un élément x de $G'_{\mathfrak{O}}$, on définit la longueur $m(x)$ de x par le nombre minimal des commutateurs qui représentent x. D'après la décomposition (18), on a alors $m(x) < M$ pour tout x de $G'_{\mathfrak{O}}$ et pour toute place v qui satisfait aux conditions (i)$\sim$(vi), où M est un entier qui ne dépend que de la structure de G.

D'après la remarque qui précède, on a démontré

PROPOSITION 5. *Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini et déployé sur un corps de nombres algébriques k, et soit G_A le groupe adélique de G. Le groupe des commutateurs G'_A de G_A est le produit direct restreint;*

$$G'_A = \prod_{v \in V} (G'_v,\ G'_{\mathfrak{O}}) \tag{19}$$

qui est fermé dans G_A.

On désigne par T_A le groupe adélique de T;

$$T_A = \prod (T_v,\ T_{\mathfrak{O}}) . \tag{20}$$

On pose

$$T^1_A = \prod (T_v \cap G'_v,\ T_{\mathfrak{O}} \cap G'_v) . \tag{21}$$

D'après (10), on a

$$\begin{aligned} G_A/G'_A &\cong \prod (G_v/G'_v,\ G_{\mathfrak{O}}G'_v/G'_v) \\ &\cong \prod (T_v/T_v \cap G'_v,\ (T_v \cap G'_v)T_{\mathfrak{O}}/T_v \cap G'_v) \cong T_A/T^1_A . \end{aligned} \tag{22}$$

Soit J_k le groupe des idèles de k. On pose

$$(J_k)^n = \{x^n :\ x \in J_k\} .$$

$(J_k)^n$ est le produit direct restreint;

$$(J_k)^n = \prod((k_v^*)^n,\ (\mathfrak{u})^n)\,.$$

On définit un groupe topologique par

$$A_k(n) = J_k/k^*(J_k)^n = \mathfrak{C}_k/(\mathfrak{C}_k)^n\,, \tag{23}$$

où l'on note $\mathfrak{C}_k$ le groupe des classes d'idèle de k. Alors $A_k(n)$ est compact et est canoniquement isomorphe au groupe de Galois de $K(n)$ sur k où $K(n)$ est le corps composé de toute extension cyclique de k de degré d (d divise n) [1].

Comme le groupe U_k est contenu dans G'_k, en particulier dans G'_A, d'après la décomposition (3), on a $G_kG'_A = T_kG'_A$. D'où

$$\begin{aligned} A_k(G) &= G_A/G_kG'_A = G_A/T_kG'_A = T_k\backslash G_A/G'_A \cong T_k\backslash T_A/T^1_A \\ &= T_A/T_kT^1_A \cong \prod_{i=1}^{l} J_k/k^*(J_k)^{e_i} = \prod_{i=1}^{l} A_k(e_i)\,. \end{aligned}$$

THÉORÈME 1. *Si G set un groupe algébrique semi-simple connexe défini et déployé sur un corps de nombres algébriques k, le groupe $G_kG'_A$ est fermé dans G_A. Par conséquent, on peut identifier $A_k(G)$ au $B_k(G)$, et l'on a $A_k(G)=\prod_{i=1}^{l}A_k(e_i)$. Par suite, le groupe topologique $B_k(G)$ est un groupe compact.*

§ 4. Le nombre des classes dans un genre.

Soit H un groupe algébrique linéaire défini sur un corps de nombres algébriques k. Pour un sous-ensemble fini S de $V = \{v\}$, on pose

$$H_S = \prod_{v\in S} H_v\,,$$

$$H_{A(S)} = H_S \times \prod_{v\notin S} H_{\mathfrak{o}}\,.$$

Le groupe $H_{A(S)}$ est un sous-groupe ouvert de H_A, et le groupe H_S est un sous-groupe fermé et distingué de H_A. Si H soit connexe et simplement connexe, et H_S ne soit pas compact, le théorème d'approximation forte est valable pour H, c'est-à-dire H_kH_S est dense dans H_A (sauf probablement le cas où H contient des composantes de type E_8 qui sont anisotropiques sur k) [7].

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini sur k. Si G_S ne soit pas compact, le produit $G_kG_{A(S)}$ contient le groupe des commutateurs de G_A (par conséquent $G_kG_{A(S)}$ est un sous-groupe distingué de G_A) et l'ensemble des classes bilatères de G_A suivant les sous-groupes G_k et $G_{A(S)}$ est isomorphe au groupe quotient $G_A/G_kG_{A(S)}$ (sauf quelque type de E_8) [7].

On suppose que G soit déployé sur k et que S contienne toutes places infinies de k. Comme G est linéaire, G est contenu dans $SL(Y_\Omega)$, où Y est un espace vectoriel défini sur k. Soit L un réseau dans Y sur l'anneau I des entiers de k qui détermine G_I. Nous dirons que G est de type spécial, s'il existe une base $x_1, \cdots, x_N$ du réseau L telle que l'on ait

$$tx_i = h_i(t)x_i\,, \qquad (i=1, \cdots, N) \text{ pour tout } t \in T\,.$$

Alors $T_{\mathfrak{O}}$ est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{u}$ pour toute place finie v. En utilisant la décomposition de Bruhat de G et la décomposition (18) de $G_{\mathfrak{O}}$, on a

$$(24) \qquad G_k \backslash G_A / G_{A(S)} = G_k G'_A \backslash G_A / G_{A(S)} = G_k G'_A \backslash G_A / T_{A(S)} = A_k(G)/T_{A(S)}$$

$$\cong T_k T^1_A \backslash T_A / T_{A(S)} \cong \prod_{i=1}^{l} J_k / k^*(J_k)^{e_i} J_{A(S)}\,.$$

On désigne par $M(S)$ l'extension abélienne maximale de k dans laquelle toute place ne ramifie pas et toute place de S se décompose complètement. On pose

$$M(n, S) = K(n) \cap M(S)\,.$$

D'après la théorie du corps de classes, le groupe

$$A_k(n, S) = J_k / k^*(J_k)^n J_{A(S)}$$

est isomorphe au groupe de Galois de $M(n, S)$ sur k[**1**].

THÉORÈME 2. *Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple connexe défini et déployé sur un corps de nombres algébriques k. Soit G de type spécial et soit S un sous-ensemble fini de V contenant toutes places infinies de k. Alors la décomposition bilatère de G_A suivant les sous-groupes G_k et $G_{A(S)}$ est isomorphe au groupe fini $\prod A_k(e_i, S)$, et le nombre des classes bilatères de G_A est égal au $\prod[M(e_i, S)\,;\,k]$.*

L'Université de Tokyo

Bibliographie

[1] E. Artin and J. Tate, Class field theory, Harvard, 1961.

[2] A. Borel et J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES, n° 27, 1965.

[3] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J., **7** (1955), 14–66.

[4] C. Chevalley, Classification des groupe de Lie algébriques, Séminaire de ENS, 1958.

[5] N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of $\mathfrak{p}$-adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES, n° 25, 1965.

[6] M. Kneser, Starke Approximation in algebraischen Gruppen I, J. reine angew. Math., **218** (1965), 190–203.

[7] M. Kneser, Strong approximation, Lecture notes of Summer Institute on algebraic groups and discontinuous subgroups, held at Boulder, Colorado, 1965.

[8] T. Ono, On the relative theory of Tamagawa numbers, Ann. of Math., **82** (1965), 88–111.

[9] R. Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloque de Bruxelle, 1962, 113–127.

[10] A. Weil, Adeles and algebraic groups, Institute for Advanced Study, Princeton, 1960.