J. Math. Soc. Japan
Vol. 20, Nos. 1-2, 1968

Über p-adische Kugelfunktionen und unitäre Darstellungen der Modulargruppen[1)]

Herrn Professor Iyanaga zum 60. Geburtstag

von Reiji TAKAHASHI

(Eingegangen am Okt. 1, 1967)

Die Aufzählung der irreduziblen Darstellungen der Modulargruppen $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}/(p^n))$ wurde neulich von verschiedenen Autoren unternommen (Shalika [**4**], Shintani [**5**], Tanaka [**6, 7**])[2)]. Da es sich um kompakte Gruppen handelt, sollte man um eine möglichst explizite Konstruktion bestrebt sein. In der vorliegenden Arbeit wird in diesem Sinne eine Anwendung der Theorie der sogenannten Kugelfunktionen der Klasse χ zur Herleitung einer Reihe irreduzibler Darstellungen dieser Gruppen gegeben. Diese Reihe entspricht der Hauptserie der klassischen Gruppen. Man kann die entsprechenden Kugelfunktionen ganz explizit bestimmen, so wie es im 2. Teil dieser Arbeit geschehen wird.

Im § 1 berichten wir kurz über die Grundlinien der gruppentheoretischen Behandlung der Kugelfunktionen, die wir dann in §§ 2, 3, 4 zur Gruppe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}_p)$ der unimodularen Matrizen mit p-adischen ganzen Koeffizienten anwenden.

§ 1. Unitäre Darstellungen und Kugelfunktionen der Klasse χ[3)].

Es sei gegeben eine lokal-kompakte unimodulare Gruppe G und eine kompakte Untergruppe H von G. Wir bezeichnen mit dg bzw. dh die Volumenelemente der invarianten Masse auf G bzw. H; dazu wird noch dh als normiert (d.h. $\int_{\mathrm{H}} dh = 1$) vorausgesetzt. Es sei ferner χ ein Charakter (eine unitäre Darstellung von der Dimension 1) von H. Wir bezeichnen mit $\mathrm{A}^{\chi}(\mathrm{G}; \mathrm{H})$ (oder einfach A^{χ}) die Unteralgebra von $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ der Funktionen φ, die die Gleichung

1) In einem Colloquium-Vortrag in Paris im April 1966 wurde zum grössten Teil über diese Arbeit berichtet.

2) Für die früheren Arbeiten, vgl. z. B. Tanaka [**6**], insbesondere II.

3) Für die Theorie der Kugelfunktionen der Klasse χ, vgl. Godement [**2, 3**] oder Tommasini [**8**]. Für die allgemeinen Begriffe und Bezeichnungen aus der Darstellungstheorie wird der Leser auf Dixmier [**1**] verwiesen.

(1) $$\varphi(hgh')=\overline{\chi(h)}\varphi(g)\overline{\chi(h')}$$

für alle $h, h'\in \mathrm{H}$ erfüllen (die Multiplikation in $L^1(G)$ ist durch die Faltung definiert: $\varphi*\psi(x)=\int_G \varphi(y)\psi(y^{-1}x)dy$, für $\varphi, \psi\in L^1(G)$. Grundlegend für die folgenden Betrachtungen ist die Voraussetzung, dass A^χ *kommutativ* ist.

DEFINITION 1. Eine unitäre Darstellung $g\mapsto T(g)$ von G ist als *eine Darstellung der Klasse* χ (in bezug auf H) bezeichnet, wenn es im Raum dieser Darstellung Vektoren $x\neq 0$ gibt, die die Bedingung

(2) $$T(h)x=\chi(h)x\,, \qquad \text{für alle } h\in \mathrm{H}\,,$$

erfüllen. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Vektoren $T(g)x$, $g\in G$, den ganzen Raum erzeugen (d.h. x ist ein zyklischer Vektor für die Darstellung).

Ein Vektor x heisst ein χ-*Vektor*, wenn x die Bedingung (2) erfüllt.

Ist eine unitäre Darstellung $(T, \mathcal{H})$ der Klasse χ gegeben, so bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_0$ den Unterraum der χ-Vektoren in $\mathcal{H}$. Dann gilt:

(3) $$x\in\mathcal{H}_0 \Leftrightarrow T(h)x=\chi(h)x \text{ für alle } h\in \mathrm{H} \Leftrightarrow T(\bar{\chi})x=x\,,$$

wobei

(4) $$T(\bar{\chi})=\int_H \overline{\chi(h)}T(h)dh$$

ist. Daraus folgt, dass die Operatoren

$$T(\varphi)=\int_G \varphi(g)T(g)dg\,, \qquad \text{mit } \varphi\in A^\chi\,,$$

durch $\mathcal{H}_0$ reduziert werden. Daher erhalten wir eine unitäre (d.h. $T(\tilde{\varphi})=T(\varphi)^*$ wenn $\tilde{\varphi}(g)=\overline{\varphi(g^{-1})}$ ist) Darstellung der involutiven Algebra A^χ in $\mathcal{H}_0$. Bekanntlich ist diese Darstellung irreduzibel, falls die gegebene Darstellung von G irreduzibel ist (vgl. Godement [2]).

SATZ 1. *Eine unitäre Darstellung* $(T, \mathcal{H})$ *von* G *der Klasse* χ *ist dann und nur dann irreduzibel, wenn der Unterraum* $\mathcal{H}_0$ *aller* χ-*Vektoren ein-dimensional ist.*

DEFINITION 2. Ist $(T, \mathcal{H})$ eine irreduzible unitäre Darstellung von G der Klasse χ, und ist x ein normierter χ-Vektor in $\mathcal{H}$, dann bezeichnet man die Funktion

(5) $$\zeta(g)=(T(g)x\,|\,x)$$

als *Kugelfunktion der Klasse* χ dieser Darstellung.

Diese Funktion ζ ist positiv-definit, stetig und erfüllt die Bedingung:

(6) $$\zeta(hgh')=\chi(h)\zeta(g)\chi(h')\,, \qquad \text{für alle } h, h'\in \mathrm{H}\,.$$

Da der Unterraum $\mathcal{H}_0$ ein-dimensional ist, ist, für alle $\varphi\in A^\chi$,

$$T(\varphi)x = a(\varphi)x\,, \qquad \text{mit } a(\varphi) \in \mathbf{C}\,.$$

Es ist $a(\varphi) = (a(\varphi)x\,|\,x) = (T(\varphi)x\,|\,x)$; somit ist

$$\varphi \mapsto \zeta(\varphi) = \int_{\mathrm{G}} \varphi(g)\zeta(g)dg \tag{7}$$

ein stetiger involutiver Homomorphismus von A^{χ} in $\mathbf{C}$ (d.h. ein Charakter von der involutiven Banachalgebra A^{χ}). Daraus folgt bekanntlich, dass die Funktion ζ der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$\int_{\mathrm{G}} \zeta(ghg'h^{-1})dh = \zeta(g)\zeta(g')\,, \qquad \text{für } g, g' \in \mathrm{G}\,. \tag{8}$$

Umgekehrt werden die Kugelfunktionen der Klasse χ durch diese Eigenschaften gekennzeichnet:

SATZ 2. *Genügt eine stetige und positiv-definite Funktion ζ den beiden Bedingungen* (6), (8), *dann ist ζ eine zu einer irreduziblen unitären Darstellung gehörige Kugelfunktion der Klasse χ. Diese Darstellung ist durch ζ bis auf eine unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Für die Fouriertransformation der Klasse χ

$$\varphi \mapsto \hat{\varphi}(\zeta) = \zeta(\varphi) = \int_{\mathrm{G}} \varphi(g)\zeta(g)dg \qquad (\varphi \in \mathrm{A}^{\chi})\,,$$

besteht bekanntlich (vgl. Godement [3]) ein Analogon der Plancherelschen Formel: es existiert ein lokalkompakter Raum Z von Kugelfunktionen der Klasse χ mit einem positiven Radonschen Mass m derart, dass für jede $\varphi \in \mathrm{A}^{\chi} \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$

(9) die Funktion $\hat{\varphi}(\zeta)$ in bezug auf m quadrat-integrierbar ist, und

$$\int_{\mathrm{G}} |\varphi(g)|^2 dg = \int_{\mathrm{Z}} |\hat{\varphi}(\zeta)|^2 dm(\zeta)$$

ist. Ferner gilt auch die folgende Umkehrformel:

$$\varphi(g) = \int_{\mathrm{Z}} \hat{\varphi}(\zeta)\overline{\zeta(g)}dm(\zeta) \tag{10}$$

für jede φ in $\mathrm{A}^{\chi} \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}^{\chi}$ den Unterraum von $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ der Funktionen f, die die Bedingung

$$f(hg) = \chi(h)f(g)\,, \qquad \text{für alle } h \in \mathrm{H}\,,$$

erfüllen. Die Darstellung $g \mapsto U(g)$, welche in $\mathcal{H}^{\chi}$ durch die Formel:

$$(U(g)f)(g') = f(g'g)$$

definiert wird, heisst die *durch χ induzierte* Darstellung, und wird mit $\operatorname*{ind}_{\mathrm{H}\uparrow\mathrm{G}} \chi$

bezeichnet. In Falle einer *kompakten* G, gilt dann der folgende

SATZ 3. *$Z(\chi)$ bezeichne die Menge der Kugelfunktionen der Klasse χ. Für $\zeta \in Z(\chi)$ definiert $f \mapsto (\zeta|\zeta)^{-1}\zeta * f$ die Projektion von $L^2(G)$ auf einen irreduziblen Unterraum $\mathcal{M}(\zeta)$ von $\mathcal{H}^\chi$. ζ ist selbst in $\mathcal{M}(\zeta)$ enthalten. $\mathcal{H}^\chi$ ist die direkte Summe der Unterräume $\mathcal{M}(\zeta)$, $\zeta \in Z(\chi)$, die einander inäquivalent sind.*

Die Funktion $\xi = (\zeta|\zeta)^{-\frac{1}{2}}\zeta$ wird als *kanonischer* χ-Vektor in $\mathcal{M}(\zeta)$ bezeichnet. Die Zerlegung der Darstellung $\operatorname{ind}_{H \uparrow G} \chi$ ist also mit der Bestimmung aller Kugelfunktionen der Klasse χ (oder kanonischer χ-Vektoren) gleichbedeutend.

§ 2. Einige Untergruppen der Gruppe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}_p)$.

Es sei p eine ungerade Primzahl. Wir bezeichnen mit $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Z}_p$ bzw. $\mathbf{U}_p$ den Körper der p-adischen Zahlen, den Ring der ganzen p-adischen Zahlen bzw. die Gruppe der p-adischen Einheiten; ferner bezeichnen wir mit $v_p(.)$ den p-Exponent. Wir betrachten die Gruppe $K = \mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}_p)$ der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, mit $a, b, c, d \in \mathbf{Z}_p$ und $ad-bc=1$. In der üblichen p-adischen Topologie ist K eine kompakte Gruppe. Wir bezeichnen mit K^m die Untergruppe von K der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die die Bedingung

$$a \equiv d \equiv 1\,, \qquad b \equiv c \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\, p^m\,, \tag{1}$$

erfüllen. K^m ist ein Normalteiler von K, und die Faktorgruppe K/K^m ist zur Gruppe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}/(p^m))$, d. h. der homogenen Modulargruppe $\mathfrak{M}_h(p^m)$ zur Stufe p^m, isomorph. In der p-adischen Topologie sind die Untergruppen K^m offen und abgeschlossen, und bilden ein vollständiges Umgebungssystem vom Einselement e in K. Mit T^m bezeichnen wir die Untergruppe der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \bmod p^m$, während Y^m die der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mid $a \equiv d \equiv 1$, $c \equiv 0 \bmod p^m$ bezeichnet. U bezeichnet die Untergruppe der Diagonalmatrizen in K; der Durchschnitt $U \cap K^m$ wird mit $U^{(m)}$ bezeichnet; $U^{(m)}$ ist also die Untergruppe der Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ mit $u \equiv 1 \bmod p^m$. Ferner bezeichnen wir mit T bzw. Y die Untergruppen von K der Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt offenbar

$$\bigcap_{m \geqq 1} K^m = \{e\}\,, \qquad \bigcap_{m \geqq 1} T^m = T\,, \qquad \bigcap_{m \geqq 1} Y^m = Y\,. \tag{2}$$

HILFSSATZ 1. *Jedes Element h von T lässt sich eindeutig in der Form*

$$h = yu\,, \qquad y \in Y,\ u \in U \tag{3}$$

darstellen. Für $m \geqq 1$, gilt ferner:

(4) $$\mathrm{T}^m = \mathrm{Y}^m\mathrm{U} = \mathrm{U}\mathrm{Y}^m\,, \qquad \mathrm{Y}^m \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}^{(m)}\,.$$

Beweis. Wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}^m$, dann ist $c = c'p^m$, mit $c' \in \mathbf{Z}_p$; da $ad - bc'p^m = 1$, ist $ad \equiv 1 \bmod p^m$, und d ist eine Einheit. Hieraus ergibt sich die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & b/d \\ c'dp^m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

HILFSSATZ 2. *Mit* Z^m *bezeichnen wir die Gesammtheit der Matrizen der Form* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ *mit* $c \equiv 0 \bmod p^m$. *Dann lässt sich jedes Element* $h \in \mathrm{T}^m$ *eindeutig in der Form*

$$h = yuz\,, \quad y \in \mathrm{Y}\,, \quad u \in \mathrm{U}\,, \quad z \in \mathrm{Z}^m$$

darstellen.

BEWEIS. Die Eindeutigkeit der Zerlegung ist klar: $\mathrm{T} \cap \mathrm{Z}^m = \{e\}$. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}^m$, gilt, wegen $c \equiv 0 \bmod p^m$, die folgende Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/d & 1 \end{pmatrix}.$$

KOROLLAR. *Es gelten die Zerlegungen:*

$$\mathrm{T}^m = \mathrm{T}\mathrm{K}^m = \mathrm{K}^m\mathrm{T}\,, \qquad \mathrm{Y}^m = \mathrm{Y}\mathrm{K}^m = \mathrm{K}^m\mathrm{Y}\,.$$

DEFINITION 1. Wir bezeichnen mit ν einen festen quadratischen Nichtrest mod p. Wir setzen:

(5) $$k_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k_{-1} = e_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k_{j+1} = e_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^j & 1 \end{pmatrix}.$$

$$k_{-j-1} = e_{-j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu p^j & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } j \geqq 1\,.$$

HILFSSATZ 3. *Für* $m \geqq 1$, *bilden die Elemente* k_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m$, *ein vollständiges Repräsentantensystem der zweiseitigen Nebenklassen von* K mod T^m. *Ferner bilden die Elemente* k_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots$, *ein vollständiges Repräsentantensystem der zweiseitigen Nebenklassen von* K mod T. *Es gelten ferner die folgenden Beziehungen:*

(6) $$\mathrm{T}e_-\mathrm{T} = \mathrm{T}^m e_- \mathrm{T}^m \qquad \textit{für alle } m \geqq 1\,;$$

(7) $$\mathrm{T}e_j\mathrm{T} = \mathrm{T}^m e_j \mathrm{T}^m \qquad \textit{für } 1 \leqq |j| \leqq m-1\,;$$

(8) $$\mathrm{T}^m = \mathrm{T} \cup \bigcup_{j \geqq m} \{\mathrm{T}e_j\mathrm{T} \cup \mathrm{T}e_{-j}\mathrm{T}\}\,.$$

KOROLLAR. *Für* $1 \leqq j \leqq m-1$, *gilt*

(9) $$\mathrm{T}^m e_j \mathrm{T}^m \cup \mathrm{T}^m e_{-j} \mathrm{T}^m = \mathrm{T}^j \cap \complement\mathrm{T}^{j+1}\,.$$

Zum Beweis zeigen wir zuerst:

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T} \quad \Leftrightarrow c=0$;

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_{-}\mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{v}_p(c)=0$, d. h. $c \in \mathbf{U}_p$;

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_j\mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{v}_p(c)=j$ und $c=c'p^j$, $c' \in \mathbf{U}_p$, $\left(\frac{c'd}{p}\right)=1$ $(j \geqq 1)$

(iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_{-j}\mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{v}_p(c)=j$ und $c=c'p^j$, $c' \in \mathbf{U}_p$, $\left(\frac{c'd}{p}\right)=-1$ $(j \geqq 1)$.

In der Tat ist (i) die Definition der Untergruppe T. Es ist klar, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_{-}\mathrm{T} \Rightarrow c \in \mathbf{U}_p$; umgekehrt, sei $c \in \mathbf{U}_p$; dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/c & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_{-}\mathrm{T}\,.$$

Es ist auch klar, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}e_{\pm j}\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{v}_p(c)=j$, u. s. w.; nehmen wir also an, dass, für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{v}_p(c)=j, \quad c=c'p^j \qquad \text{mit } c' \in \mathbf{U}_p$$

ist; dann gibt es eine Einheit t mit der Eigenschaft

$$c'dt^2 = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \left(\frac{c'd}{p}\right)=1\,, \\ \nu & \text{wenn } \left(\frac{c'd}{p}\right)=-1\,; \end{cases}$$

es gilt dann

$$\begin{pmatrix} 1/t & -b/dt \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} td & 0 \\ 0 & 1/td \end{pmatrix} = \begin{cases} e_j & \text{wenn } \left(\frac{c'd}{p}\right)=1\,, \\ e_{-j} & \text{wenn } \left(\frac{c'd}{p}\right)=-1\,. \end{cases}$$

Somit sind die Behauptungen (i)-(iv) bewiesen.

Hieraus folgt unmittelbar, dass die Elemente k_j, $j=\pm 1, \pm 2, \cdots$, die Repräsentanten für die zweiseitigen Nebenklassen mod T sind.

Wir zeigen nun (6). Da $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^m$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{T}e_{-}\mathrm{T} \supset \mathrm{T}^m e_{-}\mathrm{T}^m$ ist. Für $h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{T}^m$, $h'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{T}^m$ hat man aber

$$c \equiv c' \equiv 0 \mod p^m \text{ und } a, a', d, d' \in \mathbf{U}_p\,;$$

für die Matrix $he_{-}h'=\begin{pmatrix} * & * \\ da'-cc' & * \end{pmatrix}$, gilt also: $da'-cc' \in \mathbf{U}_p$; wegen (ii) ist also $he_{-}h' \in \mathrm{T}e_{-}\mathrm{T}$, w. z. b. w.

Nun zeigen wir (7). Wegen $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^m$ und des Hilfssatzes 1, braucht man nur zu zeigen, dass $he_jh' \in \mathrm{T}e_j\mathrm{T}$ ist, wenn $h, h' \in \mathrm{Y}^m$, $1 \leqq j \leqq m-1$, ist. Für $h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $h'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ hat man aber

$$a \equiv a' \equiv d \equiv d' \equiv 1, \qquad c \equiv c' \equiv 0 \qquad \bmod p^m;$$

dann ist für $he_jh' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$,

$$c'' = ca' + da'p^j + dc' = p^j(1 + c_1 p^{m-j}), \qquad \text{mit } c_1 \in \mathbf{Z}_p,$$

$$d'' = cb' + db'p^j + dd' = 1 + d_1 p^j, \qquad \text{mit } d_1 \in \mathbf{Z}_p;$$

daraus folgt, wegen (iii), dass $he_jh' \in \mathrm{T}e_j\mathrm{T}$ ist. Für $j < 0$, gilt ein ähnlicher Beweis.

Die Zerlegung (8) ist klar aus (i), (iii) und (iv). Hieraus folgt dann unmittelbar, dass die Elemente k_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m$, ein vollständiges Repräsentantensystem für $\mathrm{T}^m\backslash \mathrm{K}/\mathrm{T}^m$ bilden.

HILFSSATZ 4. *Für das invariante Integral auf* K *gelten die Formeln*:

$$(10)_m \qquad \int_{\mathrm{K}} f(k)dk = \sum_{1 \leqq j \leqq m} \mathrm{M}_j^m \int_{\mathrm{T}^m}\int_{\mathrm{T}^m} f(hk_jh')d_mhd_mh';$$

$$(10)_\infty \qquad \int_{\mathrm{K}} f(k)dk = \sum_{j=-1, \pm 2, \cdots} \mathrm{M}_j \int_{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}} f(hk_jh')dh\,dh',$$

wobei dk das normierte Mass auf K, *d_mh das von* T^m, *dh das von* T *bezeichnen, und*

$$(11) \qquad \mathrm{M}_1^m = 1/p^{m-1}(p+1),\ \mathrm{M}_{-1} = p/(p+1),\ \mathrm{M}_{\pm j}^m = \mathrm{M}_{\pm j} = (p-1)/2p^{j-1}(p+1)$$

$$\textit{für } j \geqq 2.$$

BEWEIS. Zuerst wollen wir $(10)_m$ zeigen. Für eine stetige Funktion f auf K setzen wir

$$F(k) = \int_{\mathrm{T}^m}\int_{\mathrm{T}^m} f(hkh')d_mhd_mh';$$

dann ist $F(k)$ auf $\mathrm{T}^m k_j \mathrm{T}^m$ konstant, und, wegen der Invarianz der Massen, $\int_{\mathrm{K}} f(k)dk = \int_{\mathrm{K}} F(k)dk$; da also auch T^m offene Untergruppen von K sind, sind die zweiseitigen Nebenklassen $\mathrm{T}^m k_j \mathrm{T}^m$, $1 \leqq |j| \leqq m$, alle offen; wenn M(A) das Mass von einer Menge A bezeichnet, gilt es deshalb

$$\int_{\mathrm{K}} f(k)dk = \sum_j F(k_j)\mathrm{M}(\mathrm{T}^m k_j \mathrm{T}^m).$$

Um die Zahlen $\mathrm{M}(\mathrm{T}^m k_j \mathrm{T}^m)$ für verschiedene j zu finden, kann man natürlich zur Faktorgruppe K/K^m übergehen; so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\mathrm{M}(\mathrm{T}^m) = [\mathrm{T}^m : \mathrm{K}^m]/[\mathrm{K} : \mathrm{K}^m] = 1/[\mathrm{K} : \mathrm{T}^m] = 1/p^{m-1}(p+1);$$

$$(12) \qquad \mathrm{M}(\mathrm{T}^m e_j \mathrm{T}^m) + \mathrm{M}(\mathrm{T}^m e_{-j} \mathrm{T}^m) = \mathrm{M}(\mathrm{T}^j) - \mathrm{M}(\mathrm{T}^{j+1}) = (p-1)/p^j(p+1);$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{T}^m e_- \mathrm{T}^m) = 1 - \mathrm{M}(\mathrm{T}^m) - \sum_{1 \leqq j \leqq m-1} (\mathrm{M}(\mathrm{T}^m e_j \mathrm{T}^m) + \mathrm{M}(\mathrm{T}^m e_{-j} \mathrm{T}^m)) = p/(p+1).$$

Der Automorphismus J: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b/\nu \\ c\nu & d \end{pmatrix}$ lässt T^m, $T^m e_- T^m$ invariant, während er die Nebenklassen $T^m k_j T^m$ und $T^m k_{-j} T^m$ vertauscht. Daraus ergibt sich, dass $M(T^m k_j T^m) = M(T^m k_{-j} T^m) = (p-1)/2p^j(p+1)$ ist. Die Formel $(10)_\infty$ ergibt sich dann aus den Formeln (6), (7) und (12).

§ 3. Die Algebra $A^\chi(K; T)$.

Ein Charakter χ von T ist stets trivial auf Y, da Y die Kommutatoruntergruppe von T ist, und wird durch einen Charakter χ der Diagonalgruppe gegeben:

(1) $$\chi(yu) = \chi(u), \qquad \text{für } y \in Y,\ u \in U.$$

Der Charakter χ von U ist seinerseits durch einen Charakter, den wir der Einfachheit halber auch mit χ bezeichnen, von der multiplikativen Gruppe $\mathbf{U}_p$ der p-adischen Einheiten gegeben. Bekanntlich gibt es dann eine positive ganze Zahl n derart, dass $\chi(u)=1$ wenn $u \equiv 1 \mod p^n$ ist, während $\chi(u) \neq 1$ für mindestens eine Einheit u mit $u \equiv 1 \mod p^{n-1}$ ist; wir sagen dann, der Charakter sei $\mod p^n$ definiert.

Im folgenden werden wir die unitären Darstellungen und die Kugelfunktionen der Klasse χ von K in bezug auf T betrachten. Um die im § 1 zitierten Ergebnisse anzuwenden, zeigen wir, dass die Grundvoraussetzung der Kommutativität der Algebra A^χ erfüllt ist.

SATZ 1. *Die Algebra* $A^\chi(K; T)$ *ist für alle Charakter* χ *kommutativ.*

BEWEIS. A) Nehmen wir zuerst an, dass der Charakter χ *reell* ist, d.h. χ entweder der Einscharakter $\chi(u) \equiv 1$, oder der quadratische Restcharakter $\chi(u) = \left(\frac{u}{p}\right)$ ist. Die Involution

(2) $$k \mapsto k^+, \quad \text{wobei } k^+ = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \text{ ist, } \quad \text{für } k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

lässt offenbar alle Elemente k_j invariant, während $u^+ = u^{-1}$ ist; da der Charakter χ reell ist, gilt aber $\chi(u^+) = \chi(u)$; daraus folgt, dass alle Funktionen φ in A^χ durch die Involution $k \mapsto k^+$ invariant sind. Für φ, ψ in A^χ hat man also

$$(\varphi * \psi)(k) = \int_K \varphi(kl^{-1})\psi(l)dl = \int_K \varphi((l^+)^{-1}k^+)\psi(l^+)dl$$
$$= \int_K \psi(l)\varphi(l^{-1}k^+)dl = (\psi * \varphi)(k^+) = (\psi * \varphi)(k),$$

da $dl^+ = dl$ und $(l^{-1})^+ = (l^+)^{-1}$ ist.

B) Sei nun χ ein $\mod p^n$ definierter *komplexer* Charakter. Ein Hilfssatz ist erforderlich:

HILFSSATZ 1. *Sei* χ *ein* $\bmod p^n$ *definierter Charakter von* $\mathbf{U}_p$. *Dann gilt*

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \chi(1+yp^i)\, dy = \begin{cases} 1 & \text{für } i \geqq n\,, \\ 0 & \text{für } 1 \leqq i \leqq n-1\,. \end{cases} \tag{3}$$

BEWEIS. Wenn man dieses Integral mit I bezeichnet, gilt für $1 \leqq i \leqq n-1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{\mathbf{Z}_p} \chi(1+(y+y'p^{n-i-1})p^i)dy = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi(1+yp^i)\chi(1+y'p^{n-1})dy \\ &= \chi(1+y'p^{n-1})\mathrm{I}\,, \end{aligned}$$

für alle $y' \in \mathbf{Z}_p$, da $n+(i-1) \geqq n$ ist. Weil χ $\bmod p^n$ definiert ist, muss $\mathrm{I}=0$ sein. Es ist klar, dass $\mathrm{I}=1$ für $i \geqq n$ ist.

Kehren wir zum Beweis des Satzes zurück. Wir zeigen zuerst, das für alle φ in A^χ

$$\varphi(e_-) = 0 \tag{4}$$

ist.

In der Tat gilt für alle $u \in \mathrm{U}$,

$$ue_- = e_-u^{-1}\,;$$

also ist

$$\varphi(ue_-) = \varphi(e_-u^{-1}), \quad \text{d.h.} \quad (\chi(u)-\overline{\chi(u)})\varphi(e_-) = 0\,.$$

Wir zeigen nun, dass die Beziehung

$$\varphi * \psi(k_j) = \psi * \varphi(k_j) \tag{5}$$

für alle j gilt, falls $\varphi,\ \psi \in \mathrm{A}^\chi$, was natürlich die Kommutativität der Algebra A^χ zur Folge hat. Da

$$\mathrm{J}k_j = k_{-j}, \qquad \mathrm{J}k_{-j} = u_\nu k_j u_\nu^{-1}, \qquad \text{für } j \geqq 2\,,$$

mit

$$\mathrm{J}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/\nu \\ c\nu & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_\nu = \begin{pmatrix} 1/\nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$

ist, dürfen wir dabei $j \geqq 2$ annehmen. Wegen der Integralformel (2.10) und wegen (3.4), hat man

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(e_j) &= \int_{\mathrm{K}} \varphi(k^{-1})\psi(ke_j)dk \\ &= \sum_{|i| \geqq 1} \mathrm{M}_{|i|+1} \int_{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}} \varphi(h_2^{-1}e_i^{-1}h_1^{-1})\psi(h_1e_ih_2e_j)dh_1dh_2\,, \end{aligned}$$

wobei die Summation nur auf $i = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$ läuft. Es gilt also

$$\varphi * \psi(e_j) = \sum_{|i| \geqq 1} \mathrm{M}_{|i|+1}\varphi(e_i^{-1})\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}} \psi(e_iyue_ju^{-1})d\mu(y)d\nu(u)\,, \tag{6}$$

wobei $d\mu(y)$ bzw. $d\nu(u)$ die normierten invarianten Massen auf Y bzw. U bezeichnen. Ganz analog folgt aus

$$\phi * \varphi(e_j) = \int_K \varphi(k^{-1})\phi(e_j k)dk ,$$

die Formel:

$$\phi * \varphi(e_j) = \sum_{|i| \geqq 1} M_{|i|+1}\varphi(e_i^{-1})\int_Y \int_U \phi(ue_j u^{-1} y e_i) d\mu(y) d\nu(u) . \tag{7}$$

Wie man leicht nachprüft[4], hat man (für $i, j \geqq 1$)

$$e_{\pm i} y u e_j u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & y(1+y\alpha p^i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+y\alpha p^i)^{-1} & 0 \\ \alpha p^i + u^2(1+y\alpha p^i)p^j & 1+y\alpha p^i \end{pmatrix} \tag{8}$$

und

$$u e_j u^{-1} y e_{\pm i} = \begin{pmatrix} 1+y\alpha p^i & 0 \\ \alpha p^i + u^2(1+y\alpha p^i)p^j & (1+y\alpha p^i)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y(1+y\alpha p^i)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

wobei

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für } e_i , \\ \nu & \text{für } e_{-i} \end{cases}$$

zu nehmen ist. Daher ist

$$\begin{aligned} &\int_Y \int_U \phi(e_{\pm i} y u e_j u^{-1}) d\mu(y) d\nu(u) \\ &= \int_{Z_p} dy \int_{U_p} \phi\begin{pmatrix} (1+y\alpha p^i)^{-1} & 0 \\ \alpha p^i + u^2(1+y\alpha p^i)^j & 1+y\alpha p^i \end{pmatrix} du \\ &= \int_{Z_p} dy \int_{U_p} \phi\begin{pmatrix} (1+y\alpha p^i)^{-1} & 0 \\ \alpha p^i + u^2 p^j & 1+y\alpha p^i \end{pmatrix} du , \end{aligned}$$

da das Mass durch die Transformation $u \mapsto (1+y\alpha p^i)^{-1/2}u$ invariant ist. Es gibt nun v, w in $\mathbf{U}_p$, für welche

$$\begin{pmatrix} (1+y\alpha p^i)^{-1} & 0 \\ \alpha p^i + u^2 p^j & 1+y\alpha p^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{-1} & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cp^r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{-1} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

gilt, wobei

$$vw = 1+y\alpha p^i, \quad cp^r v/w = \alpha p^i + u^2 p^j, \quad r = \mathrm{v}_p(\alpha p^i + u^2 p^j) ,$$

$$c = \begin{cases} 1 & \text{für } i > j, \text{ oder } i = j \text{ und } \left(\frac{p^{i-r}(\alpha+u^2)}{p}\right) = 1 , \\ \alpha & \text{für } i < j , \\ \nu & \text{für } i = j \text{ und } \left(\frac{p^{i-r}(\alpha+u^2)}{p}\right) = -1 , \end{cases}$$

---

4) Wenn keine Verwechselung zu befürchten ist, bezeichnen wir die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus Y auch mit y; ähnlicherweise wird die Matrix $\begin{pmatrix} 1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ aus U mit u bezeichnet.

sind. Daher hat die Funktion im letzten Integral auf $\mathbf{U}_p$ den folgenden Wert:

$$\phi(\cdots)=\chi(v)\phi(e_s)\chi(w)=\chi(vw)\phi(e_s)=\chi(1+y\alpha p^i)\phi(e_s),$$

wobei $s=s(\pm i, j; u)$ die folgende ganzzahlige Funktion bezeichnet:

$$s(\pm i, j; u)=\begin{cases} r & \text{wenn} \quad c=1, \\ -r & \text{wenn} \quad c=\nu. \end{cases} \tag{10}$$

Dabei ist wichtig zu bemerken, dass $s(\pm i, j; u)$ *von y unabhängig* ist; unser Integral ist also gleich

$$\int_{\mathbf{Z}_p}\chi(1+y\alpha p^i)dy\cdot\int_{\mathbf{U}_p}\phi(e_s)du;$$

nach dem Hilfssatz ist also

$$\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}}\phi(e_{\pm i}yue_ju^{-1})d\mu(y)d\nu(u)=\begin{cases} 0 & \text{für } 1\leqq i\leqq n-1, \\ \int_{\mathbf{U}_p}\phi(e_s)du & \text{für } i\geqq n. \end{cases}$$

Wegen der Zerlegung (9) ist andererseits

$$\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}}\phi(ue_ju^{-1}ye_{\pm i})d\mu(y)d\nu(u)=\int_{\mathbf{Z}_p}\chi(1+y\alpha p^i)dy\int_{\mathbf{U}_p}\phi(e_s)du$$

mit *derselben* Funktion $s=s(\pm i, j; u)$ wie oben; wir erhalten also

$$\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}}\phi(ue_ju^{-1}ye_{\pm i})d\mu(y)d\nu(u)=\begin{cases} 0 & \text{für } 1\leqq i\leqq n-1, \\ \int_{\mathbf{U}_p}\phi(e_s)du & \text{für } i\geqq n. \end{cases}$$

Die Beziehung (5) ist somit völlig bewiesen.

KOROLLAR DES BEWEISES: *Sei χ ein* mod p^n *definierter Charakter von* U. *Dann ist für alle Funktion φ in* A^χ

$$\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}}\varphi(e_iyue_ju^{-1})d\mu(y)d\nu(u)=0, \tag{11}$$

falls $1\leqq|i|<n$, $j=\pm1, \pm2, \cdots$ *ist.*

Von der Kommutativität der Algebra $\mathrm{A}^\chi(\mathrm{K};\mathrm{T})$ ergibt sich nach dem § 1, dass die durch χ induzierte Darstellung $\mathrm{U}=\underset{\mathrm{T}\uparrow\mathrm{K}}{\mathrm{ind}}\,\chi$ von K diskrete direkte Summe inäquivalenter irreduzibler Darstellungen der Klasse χ in bezug auf T ist.

§ 4. Zerlegung der Darstellung $\operatorname*{ind}_{T\uparrow K}\chi$.

Es sei χ ein $\bmod p^n$ definierter Charakter der Gruppe U, den wir durch

$$\chi(yu)=\chi(u)\,, \qquad \text{für } y\in \mathrm{Y},\ u\in \mathrm{U}\,.$$

zu einem Charakter von $\mathrm{T}=\mathrm{YU}$ fortsetzen. Für $m\geqq n$, kann man ihn sogar, wegen

$$\mathrm{T}^m=\mathrm{Y}^m\mathrm{U},\quad \mathrm{Y}^m\cap \mathrm{U}=\mathrm{U}^{(m)} \quad \text{und} \quad \chi(u)=1 \qquad \text{für } u\in \mathrm{U}^{(m)}\,.$$

durch

$$\chi(yu)=\chi(u) \qquad \text{für } y\in \mathrm{Y}^m,\ u\in \mathrm{U}\,. \tag{1}$$

zu einem Charakter von T^m fortsetzen. Mit diesem erweiterten Charakter definieren wir den Unterraum $\mathcal{H}^{\chi,m}$ von $\mathcal{H}=L^2(\mathrm{K})$ als die Gesammtheit der Funktionen f in $\mathcal{H}$, die die Bedingung

$$f(yuk)=\chi(u)f(k)\,, \qquad \text{für alle } y\in \mathrm{Y}^m,\ u\in \mathrm{U}\,, \tag{2}$$

erfüllen. Wenn $\mathcal{H}^{\chi}$ den Unterraum der Funktionen f, die die Bedingung (2) für alle $y\in \mathrm{Y}$, $u\in \mathrm{U}$ erfüllen, bezeichnet, hat man offensichtlich

$$\mathcal{H}^{\chi,n}\subset \mathcal{H}^{\chi,n+1}\subset \cdots \subset \mathcal{H}^{\chi,m}\subset \mathcal{H}^{\chi,m+1}\subset \cdots \subset \mathcal{H}^{\chi}\,, \tag{3}$$

und es gilt der

SATZ 1. *Wenn man für $m\geqq n+1$*

$$\mathcal{K}^{\chi,m}=\mathcal{H}^{\chi,m}\ominus \mathcal{H}^{\chi,m-1} \tag{4}$$

setzt, ist

$$\mathcal{H}^{\chi}=\mathcal{H}^{\chi,n}\oplus \mathcal{K}^{\chi,n+1}\oplus \cdots \oplus \mathcal{K}^{\chi,m}\oplus \cdots \tag{5}$$

BEWEIS. Das Integral

$$(\mathrm{P}^{\chi,m}f)(k)=\int_{\mathrm{Y}^m}\int_{\mathrm{U}} f(yuk)\overline{\chi(u)}d\mu(y)d\nu(u) \tag{6}$$

definiert offenbar den Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}^{\chi,m}$. Wir zeigen nun, dass eine zu allen $\mathcal{H}^{\chi,m}$, $m\geqq n$, orthogonale Funktion f gleich 0 ist. In der Tat ist dann für alle g in $\mathcal{H}$

$$(f\,|\,\mathrm{P}^{\chi,m}g)=(\mathrm{P}^{\chi,m}f\,|\,g)=0\,;$$

also ist

$$\int_{\mathrm{Y}^m}\int_{\mathrm{U}} f(yuk)\overline{\chi(u)}d\mu(y)d\nu(u)=\int_{\mathrm{Y}^m} f(yk)d\mu(y)=0\,;$$

wegen der Zerlegung $\mathrm{Y}^m=\mathrm{YZ}^m$ (vgl. Hilfssatz 2.2), gilt also

$$\int_{\mathrm{Z}^m} f(zk)d\mu(z)=0\,, \tag{7}$$

wobei $d\mu(z)$ das normierte invariante Mass in Z^m bezeichnen soll. Da die charakteristische Funktion φ_m von der offenen Untergruppe K^m stetig ist, ist die Funktion $f*\varphi_m$ auch stetig, konvergiert gegen f in $\mathcal{H}$; man kann folglich f als stetig annehmen; dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine ganze Zahl m, für welche

$$|f(k'k)-f(k)|<\varepsilon \qquad \text{für alle } k'\in K^m$$

gilt. Da $Z^m\subset K^m$ ist, folgt aus (7), dass $|f(k)|<\varepsilon$ ist, w. z. b. w.

Es sei jetzt bemerkt, dass die Darstellung $U(k)$ im Raum $\mathcal{H}^{\chi,m}$ eigentlich eine Darstellung der Faktorgruppe K/K^m ist; in der Tat, hat man für f in $\mathcal{H}^{\chi,m}$

$$f(k'kk'')=f(k'.\,kk''k^{-1}.\,k)=f(k) \qquad \text{für } k',\,k''\in K^m,$$

da K^m ein in Y^m enthaltener Normalteiler von K ist. Daraus ergibt sich, dass eine in $\mathcal{H}^{\chi,m}$ enthaltene irreduzible Darstellung nicht nur eine Darstellung der Klasse χ in bezug auf T ist, sondern eine Darstellung der Klasse χ *in bezug auf* T^m ist. Die entsprechende Kugelfunktion $\zeta(k)$ genügt also der Bedingung

$$\zeta(yuky'u')=\chi(u)\zeta(k)\chi(u') \qquad \text{für alle } y,\,y'\in Y^m,\ u,\,u'\in U\,, \tag{8}$$

und definiert also durch $\varphi\mapsto\zeta(\varphi)$ einen Charakter von der Unteralgebra $A^{\chi,m}$ von A^χ, die aus den Funktionen φ mit der Eigenschaft

$$\varphi(yuky'u')=\overline{\chi(u)}\varphi(k)\overline{\chi(u')} \qquad \text{für alle } y,\,y'\in Y^m,\ u,\,u'\in U$$

besteht.

Umgekehrt, sei ζ eine Kugelfunktion der Klasse χ in bezug auf T, die die Bedingung (8) erfüllt. Es ist dann leicht zu zeigen, dass der entsprechende irreduzible Unterraum in $\mathcal{H}^{\chi,m}$ enthalten ist.

Die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Komponenten in $\mathcal{H}^{\chi,m}$ ist deshalb gleich zu der Anzahl der verschiedenen Kugelfunktionen der Klasse χ in bezug auf T^m, oder zur Anzahl der verschiedenen Charaktere der kommutativen involutiven Banachalgebra $A^{\chi,m}$; die verallgemeinerte Plancherelsche Umkehrformel (1.10) für diese (endlich-dimensionale) Algebra zeigt, dass diese Anzahl gleich zur Dimension $N^{\chi,m}=\dim_{\mathbf{C}}(A^{\chi,m})$ des Vektorraumes $A^{\chi,m}$ über $\mathbf{C}$ ist.

Der Automorphismus J von K definiert durch

$$(\mathrm{J}f)(k)=f(\mathrm{J}^{-1}(k))\,, \qquad \text{für } k\in K\,,$$

eine Isometrie von $\mathcal{H}$ in sich selbst; da $\mathrm{J}(Y^m)\subset Y^m$ und $\mathrm{J}u=u$, für $u\in U$, ist, gilt

$$\mathrm{J}\mathcal{H}^{\chi,m}\subset\mathcal{H}^{\chi,m}\,;$$

ferner ist für $k\in K$

$$U(k)\mathrm{J}=\mathrm{J}U(\mathrm{J}^{-1}(k))\,.$$

HILFSSATZ 1. *Es sei $\mathcal{E}$ ein irreduzibler Unterraum von $\mathcal{H}^\chi$. Wir bezeichnen* *mit* $\xi_{\mathcal{E}}$ *den kanonischen* χ-*Vektor in* $\mathcal{E}_0$. *Dann ist* $\mathrm{J}\mathcal{E}$ *auch ein irreduzibler Teilraum von* $\mathcal{H}^{\chi}$ *und der kanonische* χ-*Vektor in* $\mathrm{J}\mathcal{E}$ *ist gleich* $\mathrm{J}\xi_{\mathcal{E}}$, *d.h.* $\xi_{\mathrm{J}\mathcal{E}}=\mathrm{J}\xi_{\mathcal{E}}$; *ferner gilt*

$$\mathrm{J}\mathcal{E}=\mathcal{E} \Longleftrightarrow \mathrm{J}\xi_{\mathcal{E}}=\xi_{\mathcal{E}}\,; \tag{9}$$

$$\mathrm{J}\mathcal{E}\cap\mathcal{E}=\{0\} \Longleftrightarrow (\mathrm{J}\xi_{\mathcal{E}}\,|\,\xi_{\mathcal{E}})=0\,. \tag{10}$$

Beweis klar.

HILFSSATZ 2. *Sei* χ *ein* $\mathrm{mod}\,p^n$ *definierter komplexer Charakter von* U. *Dann ist für jede Kugelfunktion* ζ *der Klasse* χ *in bezug auf* T

$$\zeta(e_-)=0,\quad \zeta(e_j)=\zeta(e_{-j})=0 \qquad \text{für } j=1,2,\cdots,n-1\,. \tag{11}$$

BEWEIS. Für e_- ist dies schon bekannt (siehe (3.4)). Für $1\leqq j\leqq n-1$, ist, wegen der Funktionalgleichung (1.8) und wegen $\zeta(k^{-1})=\overline{\zeta(k)}$,

$$|\zeta(e_j)|^2=\zeta(e_j)\zeta(e_j^{-1})=\int_{\mathrm{T}}\zeta(e_jhe_j^{-1}h^{-1})dh$$

$$=\int_{\mathrm{Y}}\int_{\mathrm{U}}\zeta(e_jyue_j^{-1}u^{-1})d\mu(y)d\nu(u)\,,$$

da

$$\zeta(e_jyue_j^{-1}(yu)^{-1})=\zeta(e_jyue_j^{-1}u^{-1}y^{-1})=\zeta(e_jyue_j^{-1}u^{-1})$$

ist; dieses Integral ist gleich 0, wegen (3.11), für $1\leqq j\leqq n-1$.

HILFSSATZ 3. *Es sei* χ *ein* $\mathrm{mod}\,p^n$ *definierter Charakter von* U. *Es sei* $h, h'\in\mathrm{T}^m$ *mit* $m\geqq n$ *und* $|j|\geqq n+1$. *Es gilt dann:*

$$hk_j=k_jh' \Rightarrow \chi(h)=\chi(h')\,. \tag{12}$$

Falls ferner χ *reell ist, ist dann* (12) *auch für* $j=-1$ *gültig.*

BEWEIS. Zuerst bemerken wir, dass $\chi(h)=\chi(d)$ ist, wenn $h=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{T}^m$ ist. In der Tat ist dann $h=\begin{pmatrix} ad & b/d\\ cd & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} ad & b/d\\ cd & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{Y}^m$.

Wenn $h=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $h'=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ sind, ergibt sich aus $hk_j=k_jh'$

$$d=d'+b'\alpha p^{|j|-1}\,,$$

mit $\alpha=1$ für $j>0$, $\alpha=\nu$ für $j<0$; daher ist $\chi(d)=\chi(d')$, wegen $|j|-1\geqq n$.

Sei nun χ ein reeller Charakter von U. Wenn man für h, h' (wie oben in T^m)

$$he_-=e_-h'$$

hat, ist dann

$$d=a'\,;$$

da aber χ reell ist, ist

$$\chi(h)=\chi(d)=\chi(a')=\chi(d')=\chi(h')\,,$$

wegen $a'd' \equiv 1 \bmod p^m$.

SATZ 2. *Es sei* χ *ein* $\bmod p^n$ *definierter Charakter von* U. *Dann ist für alle* $m \geqq n$

$$N^{\chi,m} = \begin{cases} 2m & \text{wenn } \chi \text{ reell ist,} \\ 2(m-n)+1 & \text{wenn } \chi \text{ komplex ist.} \end{cases} \tag{13}$$

BEWEIS. Eine Funktion φ in $A^{\chi,m}$ ist offenbar durch die $2m$ Werte $\varphi(k_j)$, $1 \leqq |j| \leqq m$, vollständig bestimmt. Für $|j| > n$ kann man durch

$$\varphi(hk_jh') = \overline{\chi(h)}\varphi(k_j)\overline{\chi(h')}$$

eindeutig φ auf $T^m k_j T^m$ definieren (Hilfssatz 3). Nach dem Hilfssatz 2, ist aber $\varphi(k_j) = 0$ für $j = -1, \pm 2, \cdots, \pm n$; daraus ergibt sich (13) für die komplexen Charaktere. Für die reellen Charaktere kann man noch durch

$$\varphi(he_-h') = \chi(h)\varphi(e_-)\chi(h')$$

eindeutig φ auf $T^m e_- T^m$ definieren; daraus folgt (13) in diesem Falle.

Die tatsächliche Zerlegung der Darstellung $\operatorname*{ind}_{T\uparrow K}\chi$ geschieht im 2. Teil dieser Arbeit, auf Grund der vorangehenden Ergebnisse.

University of Tokyo

Literatur

[1] J. Dixmier, Les C^*-algèbres et leurs représentations, Paris, 1964.

[2] R. Godement, A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), 496–556.

[3] R. Godement, Introduction aux travaux de A. Selberg, Séminaire Bourbaki, 9 (1956–57), n° 144.

[4] J. A. Shalika, Representations of the two by two unimodular group over local fields, Seminar on Representations of Lie Groups, Princeton.

[5] T. Shintani, Construction of irreducible representations of binary modular congruence groups mod p^n (unpublished).

[6] S. Tanaka, On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order, I, II, Osaka J. Math., **3** (1966), 217–242.

[7] S. Tanaka, Construction and classification of irreducible representations of special linear group of the second order over a finite field, Osaka J. Math., **4** (1967), 65–84.

[8] M. Tommasini, Sur la théorie des fonctions sphériques, Thèse, Nancy, 1966.