

Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters

von Hans-Jürgen GLAESKE

(Eingegangen am 19 Juni, 1965)

(Verbessert am 14 März, 1966)

0. Einleitung:

In [3] wurde das Verhalten der von Maier in [12] eingeführten Halbgitterfunktion

$$(1) \quad H(\omega; s) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} (g + \omega h)^{-s}, \quad \text{Im}(\omega) > 0, \quad \sigma = \text{Re}(s) > 2$$

unter der speziellen Modultransformation $\omega' = -\omega^{-1}$ untersucht und durch Angabe einer *asymptotischen Funktionalgleichung* geklärt. Diese Funktion hat bekanntlich die reelle ω -Achse zur singulären Linie. Die analytische Fortsetzung bezüglich s gelingt durch Herleitung der für alle s konvergenten Lambertschen Reihe

$$(2) \quad H(\omega; s) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} \frac{e^{2\pi i k \omega}}{1 - e^{2\pi i k \omega}}, \quad \text{Im}(\omega) > 0.$$

In [3] war nur eine solche Lambertsche Reihe Gegenstand der Untersuchung:

$$(3) \quad L_{-s}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \frac{e^{2\pi i k \omega}}{1 - e^{2\pi i k \omega}}, \quad \text{Im}(\omega) > 0.$$

In Spezialfällen wurde die Lösung des Problems für die Funktion (3) schon bearbeitet. Für $s=0$ gab Wigert in [14] mit Hilfe der *Eulerschen Summenformel* eine asymptotische Funktionalgleichung an. In [11] gab Landau einen eleganten Beweis des Wigertschen Ergebnisses. In den Fällen $s \equiv 1(2)$ erhält man eine endliche Funktionalgleichung. Speziell ergibt sich für $s=1$ eine äquivalente Aussage zu der aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen bekannten *Transformationsformel*

$$(4) \quad \eta(-\omega^{-1}) = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \eta(\omega)$$

für die elliptische Modulfunktion $\eta(\omega)$. Einen kurzen Beweis von (4) gab Siegel in [13]. Die entsprechenden Formeln für $s \equiv 1(2)$ leitete Guinand in [5] mittels der *Fouriertransformation* her. Für $1 < s \equiv 1(2)$ gibt Apostol mit

einer Methode von Rademacher in [1] sogar das Ergebnis für die allgemeine Modultransformation an.

In Hinblick auf Anwendungen in der Theorie der Partitionen, etwa in Richtung der Ergebnisse von Iseki [7, 8, 9], ist eine Verallgemeinerung von (1) nötig. In dieser Arbeit soll die Halbgitterfunktion so verallgemeinert werden, daß die Ergebnisse von Iseki und eine Reihe anderer Resultate als Spezialfälle erscheinen. Zum anderen kann man, was hier nicht ausgeführt werden soll, s. etwa [4], mit den Ergebnissen dieser Arbeit die allgemeine Modultransformation von $H(\omega; s)$ leicht herleiten, wie das in [7] für Spezialfälle vorgezeichnet ist.

In § 1 werden wir die Halbgitterfunktion $H(\omega; s)$ so verallgemeinern, daß man nach Herleitung von Integraldarstellungen schließlich zu einer *verallgemeinerten Lambertschen Reihe* geführt wird, die in Analogie zu (3)

$$(5) \quad L_{-s}(\omega; \alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \frac{e^{2\pi i k(\alpha\omega + \beta)}}{1 - e^{2\pi i k\omega}}$$

für $\text{Im}(\omega) > 0$ und

$$(5') \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

und

$$\alpha = 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \sigma > 0$$

sowie

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, 1, \quad \sigma > 1$$

lautet.

In § 2 soll für diese Lambertschen Reihen eine *asymptotische Funktionalgleichung* hergeleitet werden. In Analogie zu dem Vorgehen in [3] wird als Beweisverfahren die von Siegel in [13] benutzte Methode auf mehrdeutige Integranden ausgedehnt.

Schließlich werden in den Paragraphen 3 und 4 durch Spezialisierung der Variablen in den Ergebnissen von § 2 eine Reihe bekannter und neuer *Reziprozitätsgesetze* für Reihen der Form (5) hergeleitet.

§ 1.

Wir betrachten die Funktion

$$(1) \quad H(\omega; s; \alpha, \beta) = \sum_{g=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [g + \beta + \omega(h + \alpha)]^{-s}$$

für

$$(1') \quad \text{Im}(\omega) > 0, \quad \sigma > 2, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta(1 - \beta) \neq 0$$

Speziell ist

$$H(\omega; s; 1, 0) = H(\omega; s)$$

Die Konvergenz ist unter den Bedingungen (1') absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Teilbereich der Halbene $\text{Im}(\omega) > 0$.

Wegen

$$(a+b)^{-s} = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} a^{-u} b^{u-s} \Gamma(u) \Gamma(s-u) du,$$

$$\sigma > 0, \quad \left| \arg \frac{b}{a} \right| < \pi$$

wobei $\int_{(c)}$ Abkürzung für $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ sei, kann man für $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta < 1$ schreiben

$$H(\omega; s; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \varphi(u, \alpha) \Gamma(s-u) [\zeta(s-u, \beta) + e^{\pi i(u-s)} \zeta(s-u, 1-\beta)] \omega^{-u} du$$

Ebenso wird für $\beta = 0$ (oder $\beta = 1$) und $0 < \alpha \leq 1$

$$H(\omega; s; \alpha, 0) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \varphi(u, \alpha) \varphi(s-u) (1 + e^{\pi i(u-s)}) \omega^{-u} du + \omega^{-s} \zeta(s, \alpha).$$

Hier und im folgenden sei $\varphi(u) = \Gamma(u) \zeta(u)$ und $\varphi(u, \alpha) = \Gamma(u) \zeta(u, \alpha)$.

Wendet man die *Lerchsche Funktionalgleichung*

$$\zeta(s, a) = i(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) [e^{-\frac{\pi i s}{2}} l_{1-s}(e^{-2\pi i a}) - e^{\frac{\pi i s}{2}} l_{1-s}(e^{2\pi i a})], \quad 0 < a \leq 1$$

wobei

$$(2) \quad l_s(e^{2\pi i a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}, \quad \sigma > 1, a \text{ reell}$$

gesetzt werde und l_s bezüglich s in der bekannten Weise fortgesetzt gedacht wird, an, so ergibt sich nach Verschiebung des Integrationsweges nach $\sigma + \varepsilon (\varepsilon > 0)$

$$(3) \quad H(\omega; s; \alpha, \beta) = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(\sigma+\varepsilon)} (-2\pi i \omega)^{-u} \varphi(u, \alpha) l_{1+u-s}(e^{2\pi i \beta}) du,$$

$$\sigma > 1, \quad \text{Im}(\omega) > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

bzw. für $\alpha = 0$,

$$(4) \quad H(\omega; s; 0, \beta) = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(\sigma+\varepsilon)} (-2\pi i \omega)^{-u} \varphi(u) l_{1+u-s}(e^{2\pi i \beta}) du + \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} l_{1-s}(e^{2\pi i \beta}),$$

$$\sigma > 1, \quad \text{Im}(\omega) > 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Eine analytische Fortsetzung der Funktion H bezüglich s ist z. B. möglich, indem die Integraldarstellungen (3, 4) in für alle s konvergente Integrale umgewandelt werden. Das ist möglich durch eine Verlagerung des Integrationsweges nach $|\sigma| + 2$, wodurch erreicht wird, daß alle Polstellen links vom Wege liegen. Es bilden also

$$(3') \quad H(\omega; s; \alpha, \beta) = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(1, \sigma+2)} (-2\pi i \omega)^{-u} \varphi(u, \alpha) l_{1+u-s}(e^{2\pi i \beta}) du,$$

$$\operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

und für $\alpha = 0$

$$(4') \quad H(\omega; s; 0, \beta) = -\frac{(-2\pi i)^{s-1}}{\Gamma(s)} \int_{(1, \sigma+2)} (-2\pi i \omega)^{-u} \varphi(u) l_{1+u-s}(e^{2\pi i \beta}) du + \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} l_{1-s}(e^{2\pi i \beta}),$$

$$\operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 < \beta < 1$$

die *analytischen Fortsetzungen* von H für alle s .

Ersetzt man in diesen Darstellungen die l -Funktionen durch ihre Summen-
darstellung und beachtet, daß nach Mellin

$$\frac{e^{(1-\alpha)x}}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1, \varepsilon)} x^{-u} \varphi(u, \alpha) du, \quad \operatorname{Re}(x) > 0$$

gilt, so erhält man die Darstellung der Funktion H als *verallgemeinerte Lambertsche Reihe*

$$(5) \quad H(\omega; s; \alpha, \beta) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \frac{e^{2\pi i n(\alpha\omega + \beta)}}{1 - e^{2\pi i n\omega}}.$$

Diese Formel gilt für

$$(6) \quad \operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0, \quad 0 < \beta < 1, \quad \sigma < 1.$$

Man sieht, daß diese Reihe für $\sigma < 0$ auch noch für $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ (oder $\beta = 1$) einen Sinn hat. Diese Reihe wollen wir als Definition von $H(\omega; s; 0, 0)$ ansehen.

Wegen der besseren Möglichkeiten zur Spezialisierung betrachten wir statt H die Funktion $L_{-s}(\omega; \alpha, \beta) = (-2\pi i)^{s-1} \Gamma(1-s) H(\omega; 1-s; \alpha, \beta)$; d. h. die durch (0, (5, 5')) erklärte verallgemeinerte Lambertsche Reihe. Wir bemerken noch, daß wegen (2)

$$L_{-s}(\omega; \alpha, \beta) = \sum_{m=0}^{\infty} l_s(e^{2\pi i [(m+\alpha)\omega + \beta]})$$

ist. Bezüglich des Verhaltens von H als Funktion von s schließt man aus (3', 4') und der aus (5) folgenden Identität

$$H(\omega; s; 0, 0) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \zeta(1-s) + H(\omega; s; 1, 0)$$

den

SATZ 1. $H(\omega; s; \alpha, \beta)$ ist für $\operatorname{Im}(\omega) > 0, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ eine ganze transzendenten Funktion von s .

Diese Betrachtungen lassen sich auf $L_{-s}(\omega; \alpha, \beta)$ übertragen. Aus (0, (5, 5')) entnimmt man

$$L_{-s}(\omega; 0, \beta) = l_s(e^{2\pi i \beta}) + L_{-s}(\omega; 1, \beta), \quad 0 < \beta < 1$$

und

$$L_{-s}(\omega; 0, 0) = \zeta(s) + L_{-s}(\omega; 1, 0)$$

Damit hat man den

SATZ 2. $L_{-s}(\omega; \alpha, \beta)$ ist für $\text{Im}(\omega) > 0$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta(1 - \beta) \neq 0$ eine ganze transzendente Funktion in s . $L_{-s}(\omega; 0, 0)$ und $L_{-s}(\omega; 0, 1)$ sind für $\text{Im}(\omega) > 0$ meromorphe Funktionen von s . Sie besitzen einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 bei $s = 1$.

§ 2.

Zur Herleitung einer asymptotischen Funktionalgleichung der Funktion $L_{-s}(\omega; \alpha, \beta)$ verwenden wir das schon in [3] benutzte Siegelsche Verfahren für mehrdeutige Integranden. Für

$$\text{Im}(\omega) > 0, \text{Re}(\omega) \neq 0, \nu = m + \frac{1}{2}, 0 < m \equiv 0(1), 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \sigma > 1$$

betrachten wir als residuenbildende Funktion

$$h_\nu(z) = z^{-s} \nu^{1-s} \frac{e^{2\pi\nu\beta z}}{1 - e^{2\pi\nu z}} \frac{e^{2\pi\nu\alpha\omega z}}{1 - e^{2\pi\nu\omega z}}.$$

Diese Funktion hat Polstellen für $z = \frac{ki}{\nu}$ und $z = \frac{ki}{\nu\omega}$ ($0 \neq k, k \equiv 0(1)$). Für die Berechnung der Residuen hat man den ersten und zweiten Quadranten der ω -Ebene zu unterscheiden.

$$(1_1) \quad \text{Res } h_\nu(z) \Big|_{z=\frac{ki}{\nu}} = \begin{cases} -\frac{e^{-\frac{\pi is}{2}}}{2\pi k^s} \frac{e^{2\pi ik(\alpha\omega + \beta)}}{1 - e^{2\pi ik\omega}} & \text{für } k > 0 \\ \frac{e^{\frac{\pi is}{2}}}{2\pi(-k)^s} \frac{e^{2\pi i(-k)[(1-\alpha)\omega + 1 - \beta]}}{1 - e^{2\pi i\omega(-k)}} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Für $0 < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$ ist

$$(1_2) \quad \text{Res } h_\nu(z) \Big|_{z=\frac{ki}{\nu\omega}} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\pi is}{2}} \omega^{s-1}}{2\pi k^s} \cdot \frac{e^{2\pi ik[(1-\beta)(-\frac{1}{\omega}) + \alpha]}}{1 - e^{\frac{2\pi ik}{\omega}}} & \text{für } k > 0 \\ -\frac{e^{\frac{\pi is}{2}} \omega^{s-1}}{2\pi(-k)^s} \frac{e^{2\pi i(-k)[\beta(-\frac{1}{\omega}) + 1 - \alpha]}}{1 - e^{-\frac{2\pi i(-k)}{\omega}}} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

und für $\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \pi$

$$(1_s) \quad \text{Res } h_\nu(z) \Big|_{z=\frac{ki}{\omega}} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}} \omega^{s-1}}{2\pi k^s} \frac{e^{2\pi i k[(1-\beta)(-\frac{1}{\omega})+1-\alpha]}}{1-e^{-\frac{2\pi i k}{\omega}}} & \text{für } k > 0 \\ -\frac{e^{-\frac{3\pi i s}{2}} \omega^{s-1}}{2\pi(-k)^s} \frac{e^{2\pi i(-k)[\beta(-\frac{1}{\omega})+1-\alpha]}}{1-e^{-\frac{2\pi i k}{\omega}}} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

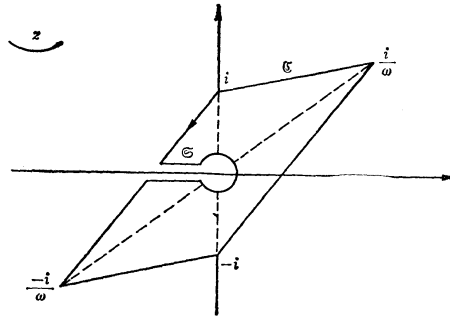


Abb. 1.

Wir integrieren über das "Parallelogramm" Π der Abbildung 1. Wegen der Mehrdeutigkeit des Integranden haben wir den Schlitz \mathfrak{S} anzubringen, der so gewählt werde, daß keine Polstelle von $h_\nu(z)$ im Schlitzgebiet liegt. Die Polstellen liegen auf der Achse des Imaginären und auf der Verbindungsgeraden von $-\frac{i}{\omega}$ und $\frac{i}{\omega}$ und für $|k| \leq m$ im Inneren von Π .

Wir berechnen

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C} + \mathfrak{S}} h_\nu(z) dz$$

in zweifacher Weise und zwar durch Auswertung des Integrals über den Rand und durch Anwendung des Residuensatzes. Auf dem Teil \mathfrak{C} des Randes sind Integration und Limesbildung vertauschbar, da $h_\nu(z)$ dort gleichmäßig beschränkt in ν ist. Wegen $\sigma > 1$ gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} h_\nu(z) dz = 0$$

Zur Auswertung des Integrals über \mathfrak{S} beachten wir die folgende Mittag-Leffersche Partialbruchentwicklung:

$$\frac{e^{2\pi i \alpha t}}{e^{2\pi i} - 1} - \frac{1}{2\pi t} = \frac{1}{2\pi} \sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{t - im}; \quad 0 < \alpha < 1$$

sowie die Fourierentwicklung der $B_n(\alpha)$:

$$B_n(\alpha) = -n! \sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(2\pi i m)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

Hierbei bedeute $\sum'_m = \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty}$.

Durch Induktion nach k erhält man hieraus sofort

$$\frac{e^{2\pi\alpha t}}{e^{2\pi t}-1} - \sum_{n=0}^k \frac{B_n(\alpha)}{n!} (2\pi t)^{n-1} = \frac{t^k}{2\pi} \sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(im)^k (t-im)},$$

wobei

$$k \geq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad t \neq 0, \quad \pm i, \quad \pm 2i, \dots$$

gelte.

Mit dieser Entwicklung schreibt sich

$$h_\nu(z) = \sum_{n=0}^k \frac{B_n(\alpha)}{n!} (2\pi\omega)^{n-1} \frac{z^{n-s-1} \nu^{n-s} e^{2\pi\nu\beta z}}{e^{2\pi\nu z}-1} + \frac{\omega^k}{2\pi} \frac{z^{k-s} \nu^{k-s+1} e^{2\pi\nu\beta z}}{e^{2\pi\nu z}-1} \sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(im)^k (\nu\omega z-im)}.$$

Nun ist

$$I_{n,\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{E}} \frac{z^{n-s-1} \nu^{n-s} e^{2\pi\nu\beta z}}{1-e^{2\pi\nu z}} dz = \frac{(2\pi)^{s-n}}{2\pi i} \int_{\mathfrak{E}'} \frac{u^{n-s-1} e^{\beta u}}{1-e^u} du$$

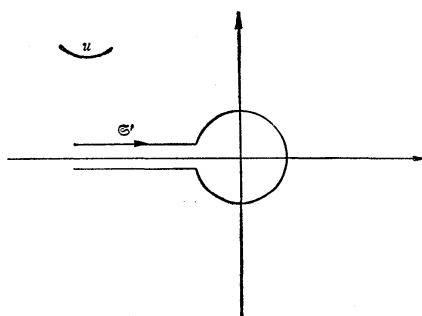


Abb. 2.

\mathfrak{E}' ist der Weg der Abbildung 2. Für $\nu \rightarrow \infty$ geht \mathfrak{E}' in die Schleife $(-\infty, 0^-)$ über und mit

$$\zeta(s, \alpha) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{s-1} e^{\alpha u}}{e^u - 1} du$$

wird

$$I_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} I_{n,\nu} = -\frac{(2\pi)^{s-n}}{\Gamma(1+s-n)} \zeta(n-s, \beta).$$

Zusammenfassend ist

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{E}} h_\nu(z) dz = (2\pi)^{s-1} \left[\sum_{n=0}^k \frac{B_n(\alpha)}{n!} \frac{\zeta(n-s, \beta)}{\Gamma(1+s-n)} \omega^{n-1} + r_k(\omega) \right]$$

mit

$$(3) \quad r_k(\omega) = \frac{\omega^k}{2\pi i} \int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{k-s} e^{\beta u}}{e^u - 1} \left(\sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(2\pi i m)^k (\omega u - 2\pi i m)} \right) du.$$

Offensichtlich ist

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{r_k(\omega)}{\omega^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{k-1} e^{\beta u}}{e^u - 1} \left(-\sum'_m \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(2\pi i m)^{k+1}} \right) du = \frac{B_{k+1}(\alpha)}{(k+1)!} \frac{\zeta(k+1-s, \beta)}{\Gamma(s-k)}.$$

Damit haben wir die Größenordnung

$$(4) \quad r_k(\omega) = O(\omega^k), \quad \omega \rightarrow 0.$$

Nach (1₁₋₃) gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\sum_{z \in \Pi} \text{Res } h_\nu(z) \right) = -\frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{2\pi} \left\{ L_{-s}(\omega; \alpha, \beta) - e^{\pi i s} L_{-s}(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \right. \\ \left. - \omega^{s-1} [L_{-s}(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) - e^{\pm \pi i s} L_{-s}(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] \right\}$$

wobei das “+”-Zeichen im ersten, das “-”-Zeichen im zweiten Quadranten der ω -Ebene gilt. Wenn man beachtet, daß man sich vermöge analytischer Fortsetzung bezüglich s von der Einschränkung $\sigma > 1$ befreien kann, so erhält man den

SATZ. Für jedes k ($0 < k \equiv 0(1)$) und

$$(5) \quad (0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1), s \neq 1 \\ (0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta < 1 \text{ oder } 0 < \alpha < 1, \beta = 1) \text{ und } s = 1$$

gilt die asymptotische Funktionalgleichung

$$(6) \quad L_{-s}(\omega; \alpha, \beta) - e^{\pi i s} L_{-s}(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \\ - \omega^{s-1} [L_{-s}(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) - e^{\pm \pi i s} L_{-s}(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] \\ = -(2\pi i)^s \sum_{n=0}^k \frac{B_n(\alpha) \zeta(n-s, \beta)}{\Gamma(1+s-n) n!} \omega^{n-1} + R_k(\omega)$$

mit

$$(3') \quad R_k(\omega) = -(2\pi i)^s r_k(\omega) = O(\omega^k) \quad \text{für } \omega \rightarrow 0$$

wobei $r_k(\omega)$ gemäß (3, 4) definiert ist. In (6) gilt das “+”-Zeichen im Falle $0 < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$, das “-”-Zeichen im Falle $\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \pi$.

Die Richtigkeit dieses Satzes unter den Bedingungen (5) ersieht man sofort durch Betrachtung der analytischen Fortsetzung beider Seiten von (6) bezüglich s .

ZUSATZBEMERKUNGEN.

- 1) Für $s \equiv 0(1)$ gilt nach (3.3') $R_k(\omega) = 0$ für $k \geq s+1$, und Satz 1 gilt auch noch für $\arg \omega = \frac{\pi}{2}$.
- 2) Für $s \neq 0(1)$ stellt die rechte Seite von (6) für $k \rightarrow \infty$ eine asymptotische Entwicklung der durch die linke Seite definierten Funktion dar.

Die Übertragung des Satzes auf die Halbgitterfunktion H macht keine Schwierigkeiten. Man erhält für

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1$$

die Funktionalgleichung

$$(7) \quad H(\omega; s; \alpha, \beta) + e^{-\pi i s} H(\omega; s; 1-\alpha, 1-\beta) \\ - \omega^{-s} [H(-\omega^{-1}; s; 1-\beta, \alpha) + e^{\pi i s} H(-\omega^{-1}; s; \beta, 1-\alpha)] \\ = -\frac{2\pi i e^{\pi i s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\alpha) \zeta(n+s-1, \beta)}{\Gamma(2-s-n) n!} \omega^{n-1} + O(\omega^k)$$

wobei das “+”-Zeichen im zweiten. Quadranten der ω -Ebene, das “-”-Zeichen im ersten Quadranten gilt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß der für Spezialfälle interessante Fall $\beta=0$ auch erfaßt werden kann, indem man die Rechnungen mit $1-\alpha$ und $1-\beta$ statt α und β durchführt. Das soll nicht gesondert aufgeführt werden.

§ 3.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung eines wichtigen Spezialfalles von (§ 2 (6)) zu, dem Fall $\alpha=0, \beta=1$. In diesem Falle erhält man nach leichter Rechnung für $s \neq 0(2)$ die in [3] behandelte asymptotische Funktionalgleichung für (0.3) und alle ihre Spezialfälle. Man hat also den

SATZ. Für jedes natürliche $k, (s \neq 0, 1, 2, 4, 6, \dots \text{ und } 0 < \arg \omega < \frac{\pi}{2} \text{ (\"+\"-Zeichen)}, \frac{\pi}{2} < \arg \omega < \pi \text{ (\"-\"-Zeichen)}, \text{ gilt}$

$$(1) \quad L_{-s}(\omega) - (\pm \omega)^{s-1} L_{-s}(-\omega^{-1}) = -\frac{1}{2\pi i \omega} \zeta(s+1) \\ + (-2\pi i \omega)^{s-1} \varphi(1-s) - \frac{1}{2} \zeta(s) \\ + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^k \zeta(2n) \zeta(s+1-2n) \omega^{2n-1} + O(\omega^{2k+1}).$$

Für ungerade s gilt diese Beziehung auch noch für $\arg \omega = \frac{\pi}{2}$.

Bei der Spezialisierung von (§ 2, (6)) auf (1) hat man durch $(1-e^{\pi i s})$ zu dividieren. Deshalb hat man die Abschätzung des Restes für $s \equiv 0(2)$ gesondert vorzunehmen: Für $\alpha=0, \beta=1$ ergibt sich aus (§ 2, (3.3')) für $N \leq k$, ganz

$$R_{2k+1}(\omega) = -(2\pi i)^{s-1} \omega^{2k+1} \int_{(-\infty, 0^+)} \frac{u^{2k+1-s} - u^{2k+1-2N}}{e^u - 1} e^u \left(\sum'_m \frac{1}{(2\pi i)^{2k+1} (\omega u - 2\pi i m)} \right) du$$

denn

$$\int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{2k+1-2N}}{e^u - 1} e^u \left(\sum'_m \right) du = 0.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} (2) \quad R_k^*(\omega) &= \lim_{s \rightarrow 2N} \frac{R_{2k+1}(\omega)}{1 - e^{\pi i s}} = -(2\pi i)^{2N-1} \frac{\omega^{2k+1}}{\pi i} \int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{2k+1-2N}}{e^u - 1} e^u \lim_{s \rightarrow 2N} \frac{u^{2N-s} - 1}{1 - e^{\pi i s}} \left(\sum'_m \right) du \\ &= -(2\pi i)^{2N-1} \frac{\omega^{2k+1}}{\pi i} \int_{(-\infty, 0^-)} \frac{u^{2k+1-2N}}{1 - e^{-u}} \log u \left(\sum'_m \right) du. \end{aligned}$$

Substituiert man hier $u = -v$ und führt man das Schleifenintegral auf das Integral längs der Achse des positiv-Reellen zurück, so erhält man wegen $\log(-ve^{2\pi i}) = \log(-v) + 2\pi i$ schließlich

$$R_k^*(\omega) = \frac{(2\pi i)^{2N}}{\pi i} \omega^{2k+1} \int_0^\infty \frac{v^{2k-2N+1}}{e^v - 1} \left(\sum'_m \frac{1}{(2\pi i m)^{2k+1} (2\pi i m + \omega v)} \right) dv.$$

Mit der bekannten *Integraldarstellung der Riemannsches Zetafunktion* wird also

$$(3) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{R_k^*(\omega)}{\omega^{2k+1}} = \frac{1}{\pi i} \zeta(2k+2) \zeta(2N-2k-1)$$

d. h.

$$R_k^*(\omega) = O(\omega^{2k+1}), \quad \omega \rightarrow 0.$$

Dieser Satz seinerseits ist zur Herleitung bekannter Grenz- und Spezialfälle geeignet. Nach leichter Rechnung findet man für

a) $s \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} L_0(\omega) \mp \omega^{-1} L_0(-\omega^{-1}) \\ = \frac{\Gamma'(1) + \log(-2\pi i \omega)}{2\pi i \omega} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^k \zeta(2n) \zeta(1-2n) \omega^{2n-1} + O(\omega^{2k+1}), \end{aligned}$$

wobei das “-”-Zeichen im ersten Quadranten, das “+”-Zeichen im zweiten Quadranten zu nehmen ist. Die Abschätzung des Restgliedes erfolgt in gleicher Weise wie eben für $s \rightarrow 2N$ angegeben. An die Stelle von (3) tritt die entsprechende Formel für $N=0$. Das ist die *asymptotische Funktionalgleichung von Wigert* [14]. Sie wurde in [11] von Landau einfach bewiesen. Diese Funktionalgleichung fand durch Atkinson Anwendung zur Berechnung des *Hardyschen Grenzwertes* und von Bellman wurde mit ihrer Hilfe der *biquadratische Mittelwert der Riemannsches Zetafunktion* berechnet.

b) $s \rightarrow 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_1(e^{2\pi i k \omega}) - \sum_{k=1}^{\infty} l_1(e^{-\frac{2\pi i k}{\omega}}) = \frac{\pi i}{12} (\omega + \omega^{-1}) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\omega}{i}\right).$$

Diese Aussage ist äquivalent mit der *Transformationsformel* (0.(4)) der *Dedekindschen Funktion* $\eta(\omega)$.

c) $s = -1$:

$$L_1(\omega) - \omega^{-2}L_1(-\omega^{-1}) = -\frac{1}{24\omega^2} + \frac{1}{4\pi i\omega} + \frac{1}{24}.$$

Diese Formel, sowie die folgenden zwei Spezialfälle, leitete Guinand in [5] mit Hilfe der *Summenformel von Voronoi* und Ergebnissen der Theorie der *Fouriertransformation* her.

d) $s = 2p+1, 0 < p \equiv 0(1)$:

$$L_{-2p-1}(\omega) - \omega^{2p}L_{-2p-1}(-\omega^{-1}) = \frac{1}{2}\zeta(2p+1)(\omega^{2p}-1) - \frac{1}{2\pi i}\zeta(2p+2)(\omega^{-1} + \omega^{2p+1}) + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^p \zeta(2n)\zeta(2p+2-2n)\omega^{2n-1}.$$

e) $s = -2p-1, 0 < p \equiv 0(1)$:

$$L_{2p+1}(\omega) - \omega^{-2p-2}L_{2p+1}(-\omega^{-1}) = \frac{1}{2}\zeta(-1-2p)[\omega^{-2p-2}-1].$$

Dieser Fall kann auch sofort mit der Definition (0.(1)) von $H(\omega; s)$ als Gittersumme bewiesen werden. Die Formel wurde schon von Ramanujan angegeben und von Hardy in [6] bewiesen.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man für $s \equiv 0(2)$ nur asymptotische Formeln erhält. Wir wollen diese nicht gesondert aufschreiben.

§ 4.

Jetzt sollen aus (§ 2, (6)) durch Spezialisierung von s auf ganzzahlige Werte (s. Satz § 2, Zusatzbemerkung 1) eine Reihe endlicher Funktionalgleichungen hergeleitet werden. Wir betrachten zuerst den Fall

1) $s = 1$:

Nach leichter Rechnung erhält man aus (§ 2, (6)) die *endliche Funktionalgleichung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{l_1(e^{2\pi i[(m+\alpha)\omega+\beta]} + l_1(e^{2\pi i[(m+1-\alpha)\omega+1-\beta]})\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{l_1(e^{2\pi i[-(m+1-\beta)\frac{1}{\omega}+\alpha]} + l_1(e^{2\pi i[-(m+\beta)\frac{1}{\omega}+1-\alpha]})\} + R_{-1}$$

mit

$$R_{-1} = \pi i \left[\frac{1}{\omega} \left(\beta^2 - \beta + \frac{1}{6} \right) + \omega \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6} \right) + 2 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Nach dem Satz des § 2 ist das sicher gültig für $\text{Im}(\omega) > 0$ und $0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta < 1$. Wegen der Symmetrie dieser Funktionalgleichung in α und β gilt diese sogar für $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta) \neq 0$. Dieses Ergebnis wurde in [7] auf andere Art von Iseki hergeleitet.

Speziell gilt für

a) $\alpha = 0, \beta = v$:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [l_1(e^{2\pi i[(m+1)\omega+1-v]}) + l_1(e^{2\pi i[m\omega+v]})] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [l_1(e^{-\frac{2\pi i(m+v)}{\omega}}) + l_1(e^{-\frac{2\pi i(m+1-v)}{\omega}})] \\ & \quad + \pi i \left[\frac{v^2}{\omega} - v \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{6} \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man sofort die in der Theorie der \mathcal{G} -Funktion

$$\mathcal{G}_1(v|\omega) = 2\gamma(\omega)q^{\frac{1}{12}} \sin \pi v \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l e^{2\pi i v})(1 - q^l e^{-2\pi i v}), \quad q = e^{2\pi i \omega}, \quad \text{Im}(\omega) > 0$$

bekannte Transformationsformel

$$\mathcal{G}_1\left(-\frac{v}{\omega} \middle| -\frac{1}{\omega}\right) = i \sqrt{\frac{\omega}{i}} e^{\pi i \frac{v^2}{\omega}} \mathcal{G}_1(v|\omega).$$

2) $s = 2p+1, 0 < p \equiv 0(1)$:

Auch in diesem Falle erhält man eine *endliche Funktionalgleichung*, nämlich das in [7] von Iseki bewiesene Ergebnis

$$\begin{aligned} & L_{-2p-1}(\omega; \alpha, \beta) + L_{-2p-1}(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \\ &= \omega^{2p} [L_{-2p-1}(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) + L_{-2p-1}(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] + R_{-2p-1} \end{aligned}$$

mit

$$R_{-2p-1} = \frac{(2\pi i)^{2p+1}}{(2p+2)!} \sum_{n=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{n} B_n(\alpha) B_{2p+2-n}(\beta) \omega^{n-1}.$$

Nach (§ 2, (5)) gilt dies für $\text{Im}(\omega) > 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$. Ersetzt man in dieser Funktionalgleichung jedoch α durch $1-\alpha$ und β durch $1-\beta$ so bleibt diese wegen

$$B_n(\alpha) = (-1)^n B_n(1-\alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

erhalten und man erhält die Gültigkeit sogar für $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Neuerdings wurde dieses Ergebnis in [2] von Apostol mit einem Verfahren von Rademacher noch einmal bewiesen.

3) $s = -1$:

$$\begin{aligned} & L_1(\omega; \alpha, \beta) + L_1(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) = \omega^{-2} [L_1(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) \\ & \quad + L_1(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] + \frac{1}{2\pi i \omega}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt für $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \text{Im}(\omega) > 0$.

4) $s = 0$:

$$L_0(\omega; \alpha, \beta) - L_0(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \\ = \omega^{-1} [L_0(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) - L_0(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] + \frac{1}{\omega} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) + \alpha - \frac{1}{2}, \\ \operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

5) $s = 2p$, $0 < p \equiv 0(1)$:

$$L_{-2p}(\omega; \alpha, \beta) - L_{-2p}(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \\ = \omega^{2p-1} [L_{-2p}(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) - L_{-2p}(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] + R_{-2p}$$

mit

$$R_{-2p} = \frac{(2\pi i)^{2p}}{(2p+1)!} \sum_{n=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{n} B_n(\alpha) B_{2p+1-n}(\beta) \omega^{n-1} \\ \operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Man beachte, daß es nicht möglich ist, hieraus durch Spezialisierung eine endliche Funktionalgleichung für $L_{-2p}(\omega)$ zu erhalten. Für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ heben sich alle Terme weg.

6) $s = -p$, $1 < p \equiv 0(1)$:

$$L_p(\omega; \alpha, \beta) + (-1)^{p+1} L_p(\omega; 1-\alpha, 1-\beta) \\ = \omega^{-p-1} [L_p(-\omega^{-1}; 1-\beta, \alpha) + (-1)^{p+1} L_p(-\omega^{-1}; \beta, 1-\alpha)] \\ \operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

SCHLUßBEMERKUNGEN.

Durch die Betrachtungen von § 3, 4 sind alle in dieser Richtung bekannten *Reziprozitätsgesetze* als Spezial- bzw. Grenzfälle unserer asymptotischen Funktionalgleichung (§ 2, (6)) erkannt. Unsere Ergebnisse können auch verallgemeinert werden auf die für $\sigma > 2$ durch

$$H^{(\lambda)}(\omega; s; \alpha, \beta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} [g + \beta + \omega(h + \alpha)^\lambda]^{-s}$$

mit

$$\operatorname{Im}(\omega) > 0, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta(1-\beta) \neq 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots$$

definierten Funktionen. Nach analytischer Fortsetzung bezüglich s erhält man für $s = 0$ eine von Iseki in [10] untersuchte Funktion. Zur Herleitung einer asymptotischen Funktionalgleichung für $H^{(\lambda)}(\omega; s; \alpha, \beta)$ eignet sich unsere *Verallgemeinerung des Siegelsche Verfahrens* nicht. Man greift vielmehr zweckmäßig auf eine von Landau in [11] verwendete Methode zurück. Die Darstellung dieser Resultate soll Gegenstand einer anderen Arbeit sein.

Literatur

- [1] T. M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, *Duke Math. J.*, 17 (1950), 147-157.
- [2] T. M. Apostol, A short proof of Shô Iseki's functional equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964), 618-622.
- [3] H. J. Glaeske, Zur Herleitung einer asymptotischen Funktionalgleichung gewisser Lambertscher Reihen, *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena*, 11 (1962), 111-113.
- [4] H. J. Glaeske, Über die Modultransformation einer Halbgytterfunktion, *Arch. Math.*, 1966, (im Druck).
- [5] A. P. Guinand, Functional equations and self-reciprocal functions connected with Lambert series, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 15 (1944), 11-23.
- [6] G. H. Hardy, A formula of Ramanujan, *J. London Math. Soc.*, 3 (1928), 238-240.
- [7] Shô Iseki, The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations, *Duke Math. J.* 24 (1957), 653-662.
- [8] Shô Iseki, Some transformation equations in the theory of partitions, *Proc. Japan Acad.*, 34 (1958), 131-135.
- [9] Shô Iseki, A partition function with some congruence condition, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 939-961.
- [10] Shô Iseki, A generalization of a functional equation related to the theory of partitions, *Duke Math. J.*, 27 (1960), 95-110.
- [11] E. Landau, Über die Wigertsche asymptotische Funktionalgleichung für die Lambertsche Reihe, *Arch. Math. Physik*, 27 (1918), 144-146.
- [12] W. Maier, Gitterfunktionen der Zahlenebene, *Math. Ann.*, 113 (1937), 363-379.
- [13] C. L. Siegel, A simple proof of $\eta(-\tau^{-1}) = \sqrt{\tau/i} \eta(\tau)$, *Mathematika*, 1 (1954), 4.
- [14] S. Wigert, Sur la série de Lambert et son applications à la théorie des nombres, *Acta Math.*, 41 (1911), 197-218.