J. Math. Soc. Japan
Vol. 16, No. 2, 1964

Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif

Par Akira TAKEUCHI

(Reçu le 10 janv, 1964)

M. K. Oka [**6, 7**] a démontré l'inverse du théorème de Hartogs, disant que tout domaine pseudoconvexe, sans point critique intérieur, sur l'espace de n variables complexes est holomorphiquement convexe et qu'il est un domaine d'holomorphie. Dans son mémoire, il a introduit la notion de fonction pseudoconvexe et il a utilisé, d'une façon remarquable, une fonction pseudoconvexe obtenue dans un domaine pseudoconvexe à partir de la distance frontière euclidienne. D'autre part, de nombreux auteurs [par exemple **1**, **3**, **4**] ont étudié le problème de Levi, pour lequel on part de l'hypothèse de l'existence d'une fonction pseudoconvexe.

Dans le présent mémoire, nous allons construire, dans un domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, à partir de la distance à la frontière du domaine mesurée par la métrique projective, une fonction pseudoconvexe et montrer que la fonction pseudoconvexe ainsi construite possède des propriétés suffisantes pour résoudre le problème inverse de Hartogs. Ce dernier résultat a été obtenu par M^me^ Fujita [**2**], indépendamment. Mais, sa méthode était assez différente de la nôtre. Comme notre résultat montre une propriété intéressante de la métrique projective, il ne serait pas inutile de rédiger ce mémoire.

§ 1. Préliminaires.

Nous expliquons ici quelques propriétés de la métrique riemannienne dans l'espace projectif complexe. Désignons par $\boldsymbol{P}$ un espace projectif complexe à n dimensions, et prenons un système de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\boldsymbol{P}$. A chaque point de $\boldsymbol{P}$, il correspond, dans l'espace C^{n+1} de $n+1$ variables complexes $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, une droite complexe passant par l'origine. Sur une hypersphère K; $|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1$, il correspond, à chaque point A de $\boldsymbol{P}$, un cercle γ_A de rayon 1. En restreignant la métrique euclidienne de C^{n+1}, on aura une métrique riemannienne sur K. En vertu de cette métrique de K, nous définissons la distance $d(A, B)$ de deux points A et B de $\boldsymbol{P}$ par:

(Λ) $\quad d(A, B)=$ *la plus petite distance de* γ_A *et* γ_B, *mesurée sur* K;

où γ_A et γ_B sont les cercles sur K correspondant à A et B, respectivement. Pour les coordonnées inhomogènes $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$: $z_i = x_i/x_0$, l'élément linéaire de cette métrique Λ sera donné par

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{|dz_1|^2 + \cdots + |dz_n|^2}{1+\sum |z_i|^2} - \frac{\sum \bar{z}_i z_j dz_i d\bar{z}_j}{(1+\sum|z_i|^2)^2}, \qquad \begin{pmatrix} i=1, \cdots, n \\ j=1, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

C'est la métrique kählerienne bien connue.

La définition de cette métrique dépend naturellement du choix des coordonnées homogènes. Un autre système de coordonnées $(y_0, \cdots, y_n)$ de C^{n+1} induit sur $\boldsymbol{P}$ la même métrique si et seulement si $(y_0, \cdots, y_n)$ est obtenu par une transformation unitaire des $(x_0, \cdots, x_n)$. S'il en est ainsi, l'élément linéaire ds peut s'exprimer sous la même forme par rapport aux coordonnées inhomogènes $(z'_1, \cdots, z'_n)$: $z'_i = y_i/y_0$, correspondant à $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$. Désormais nous fixerons la métrique Λ sur $\boldsymbol{P}$ et nous prendrons toujours des systèmes de coordonnées qui ne changent pas la métrique ainsi fixée et que nous dirons admissibles. Cette restriction faite, nous pouvons énoncer aisément le

LEMME 1. *Pour toute suite décroissante* $L_{n-1} \supset L_{n-2} \supset \cdots \supset L_1 \supset L_0$ *de sous-variétés linéaires* L_i *dans* $\boldsymbol{P}$ *de dimension (complexe)* i, *on peut choisir un système admissible de coordonnées inhomogènes* $(z_1, \cdots, z_n)$ *pour lequel* L_i *est définie par les équations*

$$z_n = 0, \; z_{n-1} = 0, \; \cdots, \; z_{n-i+1} = 0.$$

A propos de la géodésique, on a, immédiatement de la définition, le

LEMME 2. *Pour tout couple de points* A *et* B *de* $\boldsymbol{P}$, *il existe une géodésique joignant* A *et* B. *De plus, elle se trouve sur la droite complexe passant par* A *et* B.

Ensuite, observons les géodésiques sur une droite complexe un peu en détail. Prenons la droite définie par les équations $z_2 = \cdots = z_n = 0$ par rapport à un système admissible de coordonnées et regardons-la comme sphère de Riemann de la variable $z = z_1$. Dans l'espace euclidien de trois variables réelles (ξ, η, ζ), on décrit une sphère de rayon $\frac{1}{2}$ tangente au plan $\zeta = 0$ à l'origine et, en considérant le plan $\zeta = 0$ comme plan de la variable complexe $z = \xi + i\eta$, on fait correspondre biunivoquement les points de cette sphère aux points de la sphère de Riemann au moyen de la projection stéréographique, où le pôle nord correspond au point à l'infini. La longueur du segment joignant deux points sur la sphère correspondant aux points $z = \alpha$ et β du z-plan est

$$(2) \qquad |\alpha - \beta| / \sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}.$$

La distance entre ces deux points mesurée le long du grand cercle passant par eux devient

$$\sin^{-1}\frac{|\alpha-\beta|}{\sqrt{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}}\,.$$

α étant fixé et $\beta=\alpha+dz$ étant infiniment voisin de α, l'élément linéaire ds sur la sphère correspondant à dz est donné par

$$ds^2=\frac{|dz|^2}{(1+|\alpha|^2)^2}\,.$$

Ce n'est pas autre chose que celui de (1) pour le cas où $n=1$. Compte tenu des faits que la courbe la plus courte entre deux points sur la sphère est un grand cercle et que l'équateur se projette sur le cercle $|z|=1$, nous avons le

LEMME 3. *Une géodésique joignant deux points $z=\alpha$ et β est l'arc du cercle qui passe par α et β et qui intersecte le cercle unité $|z|=1$ en deux extrémités d'un diamètre de ce cercle-ci. En particulier, les géodésiques passant par l'origine sont des droites radiantes issues de l'origine. Donc, la distance, mesurée par Λ, de l'origine à un point z sur le cercle $|z|=r$ est* $\tan^{-1} r$.

Maintenant, donnons des définitions et des théorèmes dont nous aurons besion dans la suite.

[a] Nous appellerons *domaine* sans point critique intérieur sur l'espace C^n de n variables complexes tout espace topologique séparé $\mathfrak{D}$, admettant une base dénombrable de topologie et possédant une application continue, dite projection et notée π, de $\mathfrak{D}$ dans C^n, qui est un homéomorphisme local. (Donc la notion de domaine contient à la fois l'espace et la projection. Mais, nous appellerons simplement domaine l'espace lui-même. Cela n'entraînera aucune confusion.) On peut définir, d'une façon évidente, une fonction holomorphe dans une partie ouverte d'un tel domaine $\mathfrak{D}$. Soit $\mathfrak{D}'$ un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}'$ est aussi un domaine sans point critique intérieur sur C^n (avec la même projection que celle de $\mathfrak{D}$). Lorsqu'un sous-ensemble E est relativement compact dans $\mathfrak{D}$, on écrira $E\Subset\mathfrak{D}$ et on appelle E sous-ensemble à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$.

[b] Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sans point critique intérieur sur l'espace C^n des variables complexes $z_1,\cdots,z_n$. $\mathfrak{D}$ est dit *pseudoconvexe* si les deux conditions suivantes sont satisfaites;

1°) Si $\mathfrak{D}$ possède un sous-domaine $\tilde{\Delta}$ isomorphe par la projection à la réunion $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ de deux ensembles ouverts Δ_1 et Δ_2 définis par

$$(\Delta_1)\qquad \rho'<|z_1-z_1^0|<\rho\,,\qquad |z_2-z_2^0|<r,\cdots,|z_n-z_n^0|<r\,,$$

$$(\Delta_2)\qquad |z_1-z_1^0|<\rho\,,\qquad |z_2-z_2^0|<r',\cdots,|z_n-z_n^0|<r'\,,$$

(où $(z_1^0, z_2^0,\cdots,z_n^0)$ est un point fixe et ρ, ρ', r et r' sont des constantes positives avec $\rho'<\rho$ et $r'<r$), alors il existe dans $\mathfrak{D}$ un sous-domaine contenant $\tilde{\Delta}$ et isomorphe par la projection au polycylindre C:

$$(C) \qquad |z_1-z_1^0|<\rho\,, \quad |z_2-z_2^0|<r, \cdots, |z_n-z_n^0|<r\,.$$

2°) Pour tout polycylindre Γ dans C^n:

$$(\Gamma) \qquad |z_1-z_1'|<a, \cdots, |z_n-z_n'|<a\,,$$

où $(z_1', \cdots, z_n')$ est un point fixe et a est un nombre positif, toutes les composantes connexes de $\pi^{-1}(\Gamma)$ possèdent la propriété 1°). De plus, cette condition reste encore vérifiée après une transformation biholomorphe du voisinage de Γ[1].

[c] Soient P un point d'un domaine $\mathfrak{D}$ et $(z^0)=(z_1^0, \cdots, z_n^0)=\pi(P)$. Pour un ensemble fermé E dans C^n défini par

$$(E) \qquad |z_1-z_1^0|\leqq r\,, \quad z_2=z_2^0, \cdots, z_n=z_n^0\,,$$

considérons, s'il en existe, un ensemble $\tilde{E}$ dans $\mathfrak{D}$ contenant P et isomorphe à E par la projection π. On appelle le *rayon de Hartogs* de $\mathfrak{D}$ en P par rapport à z_1 la borne supérieure $R_1(P)$ de r pour lequel il existe $\tilde{E}$ dans $\mathfrak{D}$. De la même manière, $R_2(P), \cdots, R_n(P)$ seront définis. Si on prend, au lieu de l'ensemble E ci-dessus, une hypersphère S de centre (z^0) et de rayon r:

$$(S) \qquad |z_1-z_1^0|^2+\cdots+|z_n-z_n^0|^2\leqq r\,,$$

on peut définir la *distance $d(P)$ de P à la frontière de* $\mathfrak{D}$ par la borne supérieure du rayon r pour lequel il existe un ensemble dans $\mathfrak{D}$ contenant P et isomorphe à S par π. Alors, $R_j(P)$ est une fonction semi-continue inférieurement et $d(P)$ une fonction continue dans $\mathfrak{D}$. Toutes les deux sont strictement positives dans $\mathfrak{D}$. (Voir [7], p. 117.)

[d] Une fonction $\varphi(P)$ définie dans un domaine $\mathfrak{D}$, à valeurs réelles, admettant $-\infty$ pour sa valeur, est dite *fonction pseudoconvexe* dans $\mathfrak{D}$, si les conditions suivantes sont satisfaites:

1°) $e^{\varphi(P)}$ est finie et semi-continue supérieurement dans $\mathfrak{D}$;

2°) Pour tout point P_0 de $\mathfrak{D}$ et pour toute droite complexe L passant par P_0, avec

$$\pi(L): \quad z_1=z_1^0+\lambda_1 t, \cdots, z_n=z_n^0+\lambda_n t\,,$$

la trace de φ sur L, considérée comme fonction de la variable complexe t, est sous-harmonique au voisinage de $t=0$.

Une fonction $\phi(t)$ d'une variable complexe t est dite sous-harmonique en $t=t_0$, si elle est semi-continue supérieurement au voisinage de t_0, et si, pour tout $r>0$ assez petit et pour toute fonction $u(t)$ harmonique et continue dans $|t-t_0|\leqq r$ avec $\phi(t)\leqq u(t)$ sur $|t-t_0|=r$, on a $\phi(t_0)\leqq u(t_0)$. Pour qu'une fonction $\phi(t)$, ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre

1) Cette définition de la pseudoconvexité est due à M. K. Oka; voir [7].

au voisinage de t_0, soit sous-harmonique en t_0, il faut et il suffit qu'on ait $\Delta\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\geqq 0$ $(t=x+iy)$ en t_0. D'où, on voit qu'une fonction $\varphi(P)$ admettant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre dans $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe si et seulement si la forme quadratique $W(\varphi\,;dz,d\bar{z})$ $=4\sum_{i,j}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}dz_i d\bar{z}_j$ est positive (semi-définie) en tout point de $\mathfrak{D}$.

M. K. Oka [**6, 7**] a indiqué le

THÉORÈME 1. *Dans un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$, soient $R_j(P)$ les rayons de Hartogs $(j=1,2,\cdots,n)$ et $d(P)$ la distance à la frontière de D. Alors $-\log R_j(P)$ et $-\log d(P)$ sont des fonctions pseudoconvexes dans $\mathfrak{D}$.*

[e] Une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$ est dite *holomorphiquement convexe* si, pour toute suite infinie discrète de points $P_1, P_2,\cdots$ de $\mathfrak{M}$, il existe une fonction $f(P)$ holomorphe dans $\mathfrak{M}$ telle qu'on ait $\sup|f(P_k)|=+\infty$. $\mathfrak{M}$ est dite *holomorphiquement complet*, si elle est holomorphiquement convexe et que, pour tout point P_0 de $\mathfrak{M}$, on peut trouver un nombre fini de fonctions $f_1, f_2,\cdots,f_m$ holomorphes dans $\mathfrak{M}$ telles que P_0 est un point isolé dans l'ensemble $\{P\in\mathfrak{M}\,;f_1(P)=f_1(P_0),\cdots,f_m(P)=f_m(P_0)\}$.

Dans une variété holomorphiquement complet, nous avons de nombreux théorèmes. De l'autre côté, M. K. Oka [**7**] a montré le

THÉORÈME 2. *Tout domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur sur l'espace fini C^n est holomorphiquement complet.*

La notion de fonction pseudoconvexe est invariante sous les transformations biholomorphes. Donc nous pouvons la définir sur une variété analytique complexe.

On a, d'après M. H. Grauert [**3**], le

THÉORÈME 3. *Un domaine relativement compact $\mathfrak{G}$ dans une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$ est holomorphiquement convexe, si, pour tout point frontière P de $\mathfrak{D}$, il existe un nombre fini de fonctions $\varphi_1, \varphi_2,\cdots,\varphi_l$, à valeurs réelles, définies et ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre dans un voisinage U de P, telles que les formes quadratiques $\sum\dfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}dz_i d\bar{z}_j$ soient (strictement) définies positives en tout point de U $(k=1,2,\cdots,l)$ et qu'on ait $\mathfrak{G}\cap U=\{P\in U\,;\varphi_1(P)<0,\cdots,\varphi_l(P)<0\}$[2]. Si, de plus, $\mathfrak{G}$ ne possède aucun sous-ensemble analytique compact de dimension $\geqq 1$, alors $\mathfrak{G}$ est holomorphiquement complet*[3].

2) M. Grauert y a ajouté la condition supplémentaire que $d\varphi_k\neq 0$ sur $\partial\mathfrak{G}\cap U$. Mais on peut supprimer cette condition. (Voir § 4.)

3) Voir aussi [**5**].

§ 2. Domaines sur l'espace projectif.

Un domaine $\mathfrak{D}$ sans point critique intérieur sur l'espace projectif $\boldsymbol{P}$ est défini de la même manière que dans [a] du § 1. Un tel domaine $\mathfrak{D}$ est dit pseudoconvexe si, pour tout système de coordonnées inhomogènes, la partie de $\mathfrak{D}$ où les coordonnées sont finies est pseudoconvexe dans le sens de [b]. Mais, nous en exclurons le cas où $\mathfrak{D}$ est compact, donc il se réduit à $\mathfrak{D}=\boldsymbol{P}$. La définition de fonction pseudoconvexe dans le présent cas est la même que sur les variétés dans [d].

Dans un domaine $\mathfrak{D}$ sur $\boldsymbol{P}$, définissons la *distance frontière* mesurée par la métrique Λ de $\boldsymbol{P}$. D'abord, pour un point A de $\boldsymbol{P}$ et pour un nombre réel positif $\rho \leqq \frac{\pi}{2}$, désignons par $S(A, \rho)$ la *sphère géodésique* de centre A et de rayon ρ:

$$S(A, \rho)=\{B \in \boldsymbol{P};\, d(A, B)<\rho\}\,.$$

Autour d'un point P de $\mathfrak{D}$, traçons, s'il est possible, un sous-domaine de $\mathfrak{D}$ contenant P et isomorphe à $S(\pi(P), \rho)$ par la projection π. Comme dans [c] du § 1, appelons distance de P à la frontière de $\mathfrak{D}$ ou simplement distance frontière de P la borne supérieure du rayon ρ pour lequel on peut tracer un tel sous-domaine, et désignons-la par $d(P)$. (D'une façon plus précise, on doit la désigner par $d_\Lambda(P)$ dans la crainte de la confondre avec la distance frontière euclidienne $d(P)$ introduite dans le § 1. Mais, on n'emploiera jamais dans la suite la distance euclidienne.) En vertu de la propriété de la métrique Λ, $d(P)$ est une fonction continue dans $\mathfrak{D}$ et elle vérifie $0<d(P) \leqq \frac{\pi}{2}$. Si $d(P)=\frac{\pi}{2}$ en un point de $\mathfrak{D}$, alors $\mathfrak{D}$ est univalent et isomorphe à l'espace C^n tout entier et, de plus, P est l'origine pour ces coordonnées inhomogènes.

Le but principal du présent mémoire est d'étudier des propriétés de la distance $d(P)$. Pour ceci, considérons tout d'abord un cas spécial.

LEMME 4. *Dans la sphère de Riemann de la variable z, la fonction*

$$\varphi(z)=-\log \sin^{-1} \frac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}$$

est sous-harmonique sauf en $z=\alpha$.

DÉMONSTRATION. $\sin^{-1} \frac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}$ est, d'après une remarque faite avant le lemme 3, la distance de z à la frontière du domaine $\mathfrak{D}$ qu'on obtient en enlevant le seul point α à la sphère de Riemann. Par suite, la fonction $\varphi(z)$ est différentiable sauf au point α et au point antipodal $-1/\bar{\alpha}$ (par rapport à la représentation sphérique). Or, puisque la fonction $\varphi(z)$ prend la valeur minimum en $-1/\bar{\alpha}$, $\varphi(z)$ est nécessairement sous-harmonique en $-1/\bar{\alpha}$. Il suffit donc de montrer $\Delta\varphi \geqq 0$. Pour ceci, nous allons calculer[4]

$$\frac{1}{4}\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\,.$$

Posons

$$f(z) = \frac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}\,.$$

Alors $\varphi(z) = -\log\sin^{-1} f(z)$, et

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{1}{(\sin^{-1}f)^2}\frac{1}{(1-f^2)}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \frac{1}{\sin^{-1}f}\frac{1}{(1-f^2)^{3/2}}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \frac{1}{\sin^{-1}f}\frac{1}{(1-f^2)^{1/2}}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}\,.$$

Donc on a

$$\text{(2)}\qquad \Delta\varphi = \frac{1}{\sin^{-1}f}\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\left[\frac{1}{\sin^{-1}f} - \frac{|1-\alpha\bar{z}|}{|z-\alpha|} + \frac{|z-\alpha|}{|1+\alpha\bar{z}|}\right].$$

Dans le crochet [ ] de la formule (2), le troisième terme est positif quand $z \neq \alpha$, $-1/\bar{\alpha}$ et le deuxième terme se met sous la forme

$$\frac{|1+\alpha\bar{z}|}{|z-\alpha|} = \frac{|z-(-1/\bar{\alpha})|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|-1/\bar{\alpha}|^2)}}\bigg/\frac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}\,.$$

D'après ce qu'on a dit en (2) avant le lemme 3 dans § 1, le dénominateur (resp. le numérateur) du second membre est la longueur du segment joignant les points de la sphère correspondant à z et α (resp. celle correspondant à z et $-1/\bar{\alpha}$). Ceci montre que, si $\theta = \sin^{-1} f$, la fraction est égale à $(\tan\theta)^{-1}$. Comme $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on voit que

$$\text{(3)}\qquad \frac{1}{\sin^{-1}f} - \frac{|1+\alpha\bar{z}|}{|z-\alpha|} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tan\theta} > 0\,.$$

Donc, on a $\Delta\varphi > 0$ sauf en $z = \alpha$ et $-1/\bar{\alpha}$, et la fonction $\varphi(z)$ est sous-harmonique sauf au point $z = \alpha$. c. q. f. d.

Ce lemme montre que, lorsque $\mathfrak{D}$ est le plan tout entier à distance finie d'une variable complexe, la fonction $-\log d(P)$ est sous-harmonique. En général, on obtiendra le

THÉORÈME I. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sans point critique intérieur sur un espace projectif complexe de dimension quelconque et soit $d(P)$ la distance de P à la frontière de $\mathfrak{D}$. Si $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe, alors la fonction $-\log d(P)$ est pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$.*

DÉMONSTRATION. Prenons un point quelconque P dans $\mathfrak{D}$ et une droite complexe quelconque L passant par $\pi(P)$. Il suffit de montrer que la trace

4) Pour montrer seulement que φ est sous-harmonique, il n'est pas nécessaire de faire un tel calcul. Mais nous en aurons besoin plus tard.

de $-\log d(P)$ sur $\pi^{-1}(L)$ est une fonction sous-harmonique sur $\pi^{-1}(L)$ en P. D'après la définition de $d(P)$, on peut décrire dans $\mathfrak{D}$ une sphère géodésique S autour de P, qui est isomorphe par π à la sphère $S(\pi(P), d(P))$. Sur la frontière de $S(\pi(P), d(P))$, il existe au moins un point A qui n'appartient pas à $\pi(\bar{S})$. (C'est-à-dire, A est *l'image sur* $\boldsymbol{P}$ d'un des points frontières de $\mathfrak{D}$ le plus voisins de P.) Soit $B=\pi(P)$. Suivant la position de A relative à L, deux cas se présentent.

(α) *Cas où* $A \in L$.

On peut choisir un système admissible de coordonnées inhomogènes $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de façon que L soit donnée par les équations

$$z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$$

et que $B=\pi(P)$ soit l'origine de ces coordonnées. z_1 étant un paramètre sur L, décrivons sur L un cercle $\gamma: |z_1| = r$ ayant son centre à l'origine et son rayon r assez petit pour qu'on puisse décrire dans $\mathfrak{D}$ un cercle γ_1, ayant son centre en P et correspondant par π biunivoquement à γ. Soient P' un point variable sur γ_1 et $B'=\pi(P')$ celui sur γ correspondant à P'. Alors, on a

$$d(P') \leqq d(A, B') .$$

z' étant la z_1-coordonnée de B' sur L et α celle de A, on aura

$$d(A, B') = \sin^{-1} \frac{|z'-\alpha|}{\sqrt{(1+|z'|^2)(1+|\alpha|^2)}}$$

qu'on désignera par $d_1(z')$. Considérons maintenant une fonction $u(z)$, harmonique à l'intérieur du cercle γ et continue aussi sur γ, telle que, sur la circonférence γ, on ait partout l'égalité

$$-\log d(P') = u(z') . \tag{4}$$

On a alors, sur γ, l'inégalité

$$-\log d_1(z') \leqq u(z') .$$

Comme $-\log d_1(z')$ est, d'après le lemme 4, une fonction sous-harmonique, on aura, à l'origine $z=0$, l'inégalité

$$-\log d_1(0) \leqq u(0) .$$

D'autre part, $d_1(0) = d(A, B) = d(P)$ entraîne

$$-\log d(P) \leqq u(0) . \tag{5}$$

De (4) et (5), il résulte que $-\log d(P)$ est sous-harmonique en P.

(β) *Cas où* A *ne se trouve pas sur* L.

Dans ce cas, considérons dans $\boldsymbol{P}$ le plan, à deux dimensions complexes, contenant A et L et choisissons un système admissible de coordonnées inhomogènes $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de $\boldsymbol{P}$ de manière que le plan soit donné par $z_3 = z_4$

$= \cdots = z_n = 0$ et la droite L par $z_2 = 0$ dans ce plan et, de plus, que la droite passant A et B soit définie par $z_1 = \beta$ (constante $\neq \infty$) dans ce plan, ce qui est possible. z_1 étant le paramètre sur L, B s'exprime par $z_1 = \beta$ sur L. Pour chaque point B' $(z_1 = z')$ sur L, voisin de B, décrivons une droite $L_{z'}$ passant par B' de la forme $\{z_1 = z', z_2 :$ quelconque, $z_3 = z_4 = \cdots = z_n = 0\}$. Considérons l'ensemble $\pi^{-1}(L_{z'})$ dans $\mathfrak{D}$. En vertu des propriétés de l'espace projectif et de la pseudoconvexité de $\mathfrak{D}$, on ne peut trouver aucune droite compacte dans $\mathfrak{D}$. Donc, $\pi^{-1}(L_{z'})$ n'est pas compact. Donc sur $L_{z'}$ se projette au moins un point frontières de $\mathfrak{D}$. Soit A' la projection d'un des points frontières de $\mathfrak{D}$ au-dessus de $L_{z'}$, le plus voisins de B'. Posons $d_2(z') = d(A', B')$. $\mathfrak{D}_1$ étant la partie de $\mathfrak{D}$ à distance finie par rapport à $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, la distance euclidienne entre A' et B' n'est pas autre chose que le rayon de Hartogs R_2 de $\mathfrak{D}_1$ par rapport à z_2, considéré le long de L. (Voir [c] du § 1.) Comparons $d_2(z')$ avec $R_2(z')$. La géodésique joignant A' et B' se trouve sur $L_{z'}$ et sa longueur peut être calculée, à l'aide de la formule

$$ds^2 = \frac{(1+|z'|^2)|dz_2|^2}{(1+|z'|^2+|z_2|^2)^2},$$

obtenue de (1) dans le § 1, puisqu'on a, sur $L_{z'}$, $dz_1 = 0$, $dz_3 = 0, \cdots, dz_n = 0$. En employant, au lieu de z_2, pour le paramètre sur $L_{z'}$,

$$z_2' = \frac{z_2}{\sqrt{1+|z'|^2}},$$

on peut exprimer ds sous la forme suivante:

$$ds^2 = \frac{|dz_2'|^2}{(1+|z_2'|^2)^2}.$$

Ceci montre que la variable z_2' est un paramètre de $L_{z'}$ admissible pour la métrique Λ au cas où $n=1$. D'après ce qu'on a étudié dans le § 1, on voit que la géodésique dans $L_{z'}$ passant par $B' : z_2' = 0$ est une droite linéaire et que la distance $d(A', B')$ est égale à

$$d_2(z') = \int ds = \int_0^\delta \frac{|dz_2'|}{1+|z_2'|^2} = \tan^{-1}\delta, \qquad \text{où} \quad \delta = \frac{R_2(z')}{\sqrt{1+|z'|^2}}.$$

A propos des d_2 et d, comme la distance d_2 est mesurée dans une direction particuliére, on aura, en général, $d_2(z') \geqq d(P')$. En particulier, quand P' se réduit à P, on obtiendra $d_2(\beta) = d(P)$. Décrivons maintenant dans L un petit cercle γ autour de β et considérons une fonction $u(z')$, harmonique à l'intérieur du cercle γ et continue aussi sur la circonférence γ, qui coïncide avec $-\log d(P')$ en tout point de la circonférence γ. Alors nous voyons sur la circonférence

$$e^{-u(z')} = d(P') \leqq d_2(z') = \tan^{-1}\frac{R_2(z')}{\sqrt{1+|z'|^2}}$$

et

$$R_2(z') \geqq \sqrt{1+|z'|^2} \tan e^{-u(z')}$$

d'où nous aurons

(7) $$-\log R_2(z') \leqq -\frac{1}{2} \log(1+|z'|^2) - \log \tan e^{-u(z')} .$$

D'après le théorème 1 du § 1, on sait que le premier membre est sous-harmonique. De l'autre côté, on verra, par un calcul facile, que le deuxième membre de (7) est sur-harmonique. Par conséquent, nous aurons, au centre $z_1 = \beta$ du cercle γ, l'inégalité

(8) $$-\log R_2(\beta) \leqq -\frac{1}{2} \log(1+|\beta|^2) - \log \tan e^{-u(\beta)}$$

ou

$$\tan^{-1} \frac{R_2(\beta)}{\sqrt{1+|\beta|^2}} \geqq e^{-u(\beta)} .$$

Le premier membre de cette dernière inégalité est égal à $d_2(\beta) = d(A, B) = d(P)$. Nous avons ainsi

(9) $$-\log d(P) \leqq u(\beta)\ ^{5)}.$$

Or, le rayon r du cercle γ est arbitraire, pourvu qu'il soit suffisamment petit. (8) et (9) montrent que $-\log d(P)$ est, sur $\pi^{-1}(L)$, une fonction sous-harmonique en P. Donc, nous avons établi le théorème. c. q. f. d.

De ce théorème, on peut voir que le domaine $\mathfrak{D}_\alpha = \{P \in \mathfrak{D} ; -\log d(P) < \alpha\}$, où α est un nombre réel quelconque, est pseudoconvexe.

§ 3. Fonctions fortement pseudoconvexes.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que, dans un domaine pseudoconvexe $\mathfrak{D}$, il existe une fonction pseudoconvexe continue dans $\mathfrak{D}$ qui croît indéfiniment quand le point tend vers la frontière de $\mathfrak{D}$. Mais, lorsqu'on utilise de telles fonctions, on devera en exiger des propriétés plus fortes. Les propriétés exigées sont les suivantes:

1°) la fonction envisagée admet des dérivées partielles continues jusqu'au deuxiéme ordre;

2°) elle est fortement pseudoconvexe;

3°) pour toute suite infinie de points $P_1, P_2 \cdots$ n'ayant aucun point d'accumulation à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, la valeur $\varphi(P_k)$ tend vers l'infinie $+\infty$ avec k.

(On dit qu'une fonction φ ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre est *fortement pseudoconvexe* si la forme quadratique

---

5) Il s'agira plus tard de l'ordre de la différence des deux membres de (5) et de celui de (9) par rapport à r^2.

$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j$ est (strictement) définie positive.) Lorsqu'on régularise globalement la fonction φ afin de la faire jouir de la propriété 1° et qu'on se propose de démontrer que la fonction régularisée reste encore pseudoconvexe, on aura des difficultés à évaluer l'ordre, parce que le calcul devient malheureusement compliqué. Pour éviter de telles difficultés, nous allons tout d'abord définir la pseudoconvexité forte pour les fonctions non-nécessairement différentiables.

Soit $\varphi(z)$ une fonction continue, à valeurs réelles, définie au voisinage du point $z=a$ sur le plan d'une variable complexe z. Désignons sa valeur moyenne sur la circonférence $|z-a|=r$ de centre a et de rayon r, par

$$\mu_{r,a}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a+re^{i\theta})d\theta \,.$$

Nous avons alors le

LEMME 5. *Si $\varphi(z)$ possède des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, on a*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)}{r^2} = \frac{1}{4}\Delta\varphi(a)\,.$$

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la notation, supposons que $a=0$. La fonction φ peut se développer au voisinage de l'origine sous la forme:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(0)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 z+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)_0 \bar{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_0 z^2 \\ &\quad+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)_0 z\bar{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}\right)_0 \bar{z}^2+o(|z|^2) \\ &= \varphi(0)+2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_0 z^2\right] \\ &\quad+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)_0 z\bar{z}+o(|z|^2)\end{aligned}$$

où $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0$ signifie la valeur de $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ prise à l'origine etc., et $o(|z|^2)$ est une quantité infiniment petit avec un ordre plus élevé que $|z|^2$. Le deuxième terme du dernier membre est harmonique, car il est la partie réelle d'une fonction holomorphe. Par passage à la moyenne sur la circonférence $|z|=r$, on aura

$$\mu_{r,0}(\varphi) = \varphi(0)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)_0 r^2+o(r^2)$$

d'où

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mu_{r,0}(\varphi)-\varphi(0)}{r^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)_0 = \frac{1}{4}\Delta\varphi(0)\,. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Lorsque la fonction φ n'est pas différentiable, la limite du premier membre n'existe pas nécessairement, mais sa limite inférieure existe si l'on admet $\pm\infty$ comme limite.

LEMME 6. *Soit φ une fonction, à valeurs réelles, définie et continue dans un cercle $|z|<R$. Si l'on a en tout point a dans ce cercle*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)}{r^2} \geqq k$$

où k est une constante indépendante de a, alors, à l'intérieur complet du cercle $|z|<R$, φ peut être approchée par des fonctions ψ ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et vérifiant l'inégalité $\Delta\psi \geqq 4k$.

DÉMONSTRATION. Désignons la moyenne arithmétique de φ à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ par

$$A_\rho\varphi(z) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{|t|<\rho} \varphi(z+t)d\sigma$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire sur le plan de la variable complexe t. Posons $\varphi_1(z) = A_\rho\varphi(z)$. $\varphi_1(z)$ est alors une fonction définie et continûment différentiable dans le cercle $|z|<R-\rho$. Nous y avons

$$\frac{\mu_{r,a}(\varphi_1)-\varphi_1(a)}{r^2} = A_\rho\Big[\frac{\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)}{r^2}\Big].$$

En vertu du lemme de Fatou, le passage à la limite inférieure nous amène à

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi_1)-\varphi_1(a)}{r^2} \geqq A_\rho\Big[\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)}{r^2}\Big] \geqq k.$$

Prenons ensuite $\varphi_2 = A_\rho\varphi_1$, qui possède des dérivées continues jusqu'au deuxième ordre dans $|z|<R-2\rho$; nous avons

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a}(\varphi_2)-\varphi_2(a)}{r^2} = \frac{1}{4}\Delta\varphi_2 \geqq k.$$

Quand ρ tend vers 0, $\varphi_2(z)$ converge, à l'intéreur complet du cercle $|z|<R$, uniformément vers $\varphi(z)$. c. q. f. d.

Si $\varphi(z)$ est sous-harmonique en $z=a$, on a $\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a) \geqq 0$, d'où $\liminf\,[\mu_{r,a}(\varphi)-\varphi(a)]/r^2 \geqq 0$. Réciproquement, si cette inégalité-ci est vérifiée en tout point d'un voisinage de $z=a$, alors φ peut être approchée, d'après le lemme que nous venons d'obtenir, par des fonctions différentiables ψ avec $\Delta\psi \geqq 0$. Ces ψ sont donc sous-harmoniques ; par suite, φ l'est aussi, puisque toute limite uniforme de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique. Nous avons ainsi montré le

LEMME 7. *Pour qu'une fonction continue $\varphi(z)$ soit sous-harmonique au voisinage d'un point $z=a$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse en tout point a' d'un voisinage de a à la condition*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a'}(\varphi)-\varphi(a')}{r^2} \geqq 0\,.$$

D'ailleurs, pour k général, compte tenu de l'égalité: $\Delta(|z|^2)=4$, le même raisonnement pour la fonction $\varphi(z)-k|z|^2$ nous amène au

LEMME 8. *Soit $\phi_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots)$ une suite de fonctions continues au voisinage de $z=a$. Supposons que chaque fonction satisfait, en tout point a' assez voisin de a, à la condition*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a'}(\phi_i)-\phi_i(a')}{r^2} \geqq k$$

où k est une constante indépendante de a' et de i. Si $\phi_i(z)$ converge vers $\varphi(z)$ uniformément au voisinage de a, alors, $\varphi(z)$ est continue et elle satisfait, au voisinage de a, à

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,a'}(\varphi)-\varphi(a')}{r^2} \geqq k\,.$$

Sur la base de ces faits, reconsidérons la définition de fonction pseudoconvexe.

Soit $\varphi(P)$ une fonction, à valeurs réelles, continue au voisinage d'un point $P_0=(a_1, \cdots, a_n)$ dans l'espace $C^n: (z_1, \cdots, z_n)$. A chaque droite complexe L, passant par P_0 et paramétrée par t:

$$(L) \qquad z_1=a_1+\lambda_1 t, \cdots, z_n=a_n+\lambda_n t$$

avec $|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2=1$, correspond une fonction continue

$$\Phi_{P_0,L}(t)=\varphi(a_1+\lambda_1 t, \cdots, a_n+\lambda_n t)$$

de t au voisinage de $t=0$. Posons

$$W\varphi(P_0)=4\inf_L \liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,0}(\Phi_{P_0,L})-\Phi_{P_0,L}(0)}{r^2}\ ^{6)},$$

où $\inf_L$ signifie la borne inférieure prise quand L parcourt l'ensemble des droites complexes passant par P_0. Alors, $W\varphi(P)$ est une fonction de P à valeurs réelles, admettant $\pm\infty$ pour sa valeur.

Enonçons les propriétés de $W\varphi$, qu'on voit immédiatement de la définition.

1°. Pour qu'une fonction continue $\varphi(P)$ soit pseudoconvexe, il faut et il

---

6) M. Oka a introduite dans son IX^e mémoire la notation

$$W(\varphi\,;\alpha,\beta)=4\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar z_j}\lambda_i\bar\lambda_j \qquad (\lambda_i=\alpha_i+\sqrt{-1}\beta_i)$$
$$=4\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\bar t}=\Delta\Phi(0)$$

pour une fonction différentiable φ. Nous aurons

$$W\varphi=\min W(\varphi\,;\alpha,\beta) \qquad (\sum\alpha_i^2+\beta_i^2=1)\,.$$

suffit qu'on ait $W\varphi(P)\geqq 0$.

2°. Si $W\varphi\geqq k$, k étant une constante, et que c est une constante positive, alors $W(c\varphi)\geqq ck$. Si $W\varphi\geqq h$ et $W\psi\geqq k$, h et k étant des constantes, alors $W(\varphi+\psi)\geqq h+k$ et $W[\max(\varphi,\psi)]\geqq \max(h,k)$.

3°. Si $\psi_1,\psi_2,\cdots$ est une suite de fonctions continues avec $W\psi_m\geqq k$, k étant une constante indépendante de m, et que, pour $m\to\infty$, ψ_m converge uniformément vers une fonction φ, alors $W\varphi\geqq k$.

4°. Si $W\varphi\geqq k$ dans un domaine, alors, à l'intérieur complet du domaine, φ peut être approchée uniformément par des fonctions ψ admettant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et vérifiant $W\psi\geqq k$.

DÉFINITION. Nous dirons qu'une fonction $\varphi(P)$, à valeurs réelles, définie et continue dans un domaine $\mathfrak{D}$ (sans point critique intérieur sur l'espace C^n) est fortement pseudoconvexe, si, pour tout point de $\mathfrak{D}$, on peut trouver un voisinage de ce point et une constante positive k, de telle sorte qu'on ait $W\varphi(P)\geqq k$ dans ce voisinage, où k peut varier suivant le voisinage.

Si φ possède des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, dire que φ est fortement pseudoconvexe n'est pas autre chose que dire que $W\varphi>0$. Nous donnons ici la définition sous cette forme, parce que la fonction $W\varphi$ n'est pas en géneral continue.

Lorsqu'on effectue une transformation biholomorphe des variables

$$z_i=z_i(t_1,\cdots,t_n)\qquad (i=1,\cdots,n)\tag{1}$$

à une fonction φ ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre et vérifiant $W_z\varphi\geqq 0$, alors la fonction $W_t\varphi$ relative aux variables (t) deviendra

$$\begin{aligned}W_t\varphi &=\min\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_i\partial\bar t_j}\lambda_i\bar\lambda_j\qquad (\sum|\lambda_i|^2=1)\\ &=\min\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_k\partial\bar z_l}\frac{\partial z_k}{\partial t_i}\frac{\partial\bar z_l}{\partial\bar t_j}\lambda_i\bar\lambda_j\\ &=\min\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_k\partial\bar z_l}\mu_k\bar\mu_l\qquad\Big(\mu_k=\sum\frac{\partial z_k}{\partial t_i}\lambda_i\Big)\\ &=\min\big(\sum_j|\mu_j|^2\big)\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_k\partial\bar z_l}\frac{\mu_k}{\sqrt{\sum|\mu_j|^2}}\frac{\bar\mu_l}{\sqrt{\sum|\mu_j|^2}}\\ &\geqq cW_z\varphi,\end{aligned}$$

où c est une constante positive qui ne dépend que de la transformation (1) et qui ne dépend pas de la fonction φ. Il en résulte que, si $W_z\varphi>0$, on peut trouver deux constantes positives c_1 et c_2 indépendantes de φ telles qu'on ait

$$c_1>\frac{W_t\varphi}{W_z\varphi}>c_2.\tag{2}$$

On voit également, en vertu des propriétés 3° et 4°, qu'une fonction fortement pseudoconvexe (non nécessairement différentiable) reste encore fortement pseudoconvexe après une transformation des variables. D'après ce que nous venons de dire, nous pouvons définir la pseudoconvexité forte d'une fonction continue dans un domaine sur l'espace projectif.

La définition faite, nous pouvons énocer la propriété de la fonction $-\log d(P)$:

THÉORÈME II. *Si un domaine* $\mathfrak{D}$ *sans point critique intérieur sur un espace projectif est pseudoconvexe, alors* $-\log d(P)$ *est une fonction fortement pseudoconvexe.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que, pour un système admissible de coordonnées inhomogènes tel que l'image $\pi(P)$ tombe à l'origine, on a l'inégalité $W(-\log d(P)) \geqq k(d(P))$, où $k(d(P))$ est une quantité positive ne dépendant que de la valeur de $d(P)$. Si nous supposons que ce fait est démontré, nous pouvons dire qu'on a l'inégalité $W(-\log d(P')) \geqq \frac{k(d(P'))}{2}$ pour tout point P' suffisament voisin de P, par rapport au même système de coordonnées. Car, pour une transformation de coordonnées suffisamment voisine de la transformation identique, on peut prendre les constantes c_1 et c_2 de (2) assez voisines de l'unité.

Soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$ et L une droite complexe quelconque passant par l'image $\pi(P)$ de P. Choisissons un système admissible de coordonnées inhomogènes $z_1, \cdots, z_n$ pour lequel L est donnée par $z_2 = \cdots = z_n = 0$ et $\pi(P)$ est l'origine. Alors, on peut regarder z_1 comme paramètre sur L. Il suffira de montrer l'inégalité:

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d)+\log d(P)}{r^2} \geqq \frac{k}{4},$$

la moyenne $\mu_{r,0}$ étant prise sur la droite L. L'étude étant locale, pour simplifier la notation, considérons le point P comme point de l'espace $\boldsymbol{P}$. La démonstration se fera parallèlement à celle du théorème I. Prenons d'abords l'image A d'un des points frontières de $\mathfrak{D}$, les plus voisins de P. Distinguons deux cas, suivant la position de A par rapport à L.

(α) *Cas où* $A \in L$.

La variable sur L étant celle dans (α) de la démonstration du théorème I, décrivons sur L un petit cercle $\gamma: |z| = r$. α étant la coordonnée du point A, reprenons

$$d_1(z) = \frac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}.$$

On a alors $d_1 \geqq d$ sur la circonférence γ et $d_1(0) = d(P)$ au centre. Par suite, on a

$$\frac{\mu_{r,0}(-\log d)+\log d(P)}{r^2} \geqq \frac{\mu_{r,0}(-\log d_1)+\log d_1(0)}{r^2}.$$

Puisque $-\log d_1$ est différentiable, le second membre converge vers $\frac{1}{4}\Delta(-\log d_1(0))$ quand r tend vers 0. D'autre part, en vertu de la formule (2) dans le lemme 4, on voit

$$\Delta(-\log d_1(z)) \geqq \frac{1}{\sin^{-1} f}\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\frac{|z-\alpha|}{|1+\alpha\bar{z}|},$$

où $f=\dfrac{|z-\alpha|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|\alpha|^2)}}$. Donc,

$$\Delta(-\log d_1(0)) \geqq |\alpha| \Big/ \sin^{-1}\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+|\alpha|^2}} > 1.$$

Il en résulte que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d)+\log d(P)}{r^2} \geqq \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Le calcul précédent n'est plus valable dans le cas où $\alpha=\infty$. Or, pour ce cas, un calcul facile nous conduira directement au résultat: $\liminf=\infty$.

(β) *Cas où A ne se trouve pas sur L.*

Par rapport au système admissible de coordonnées, pris dans (β) du théorème I, la droite L admet z' pour son paramètre et le point P est donné par $z'=\beta$. Prenons, de nouveau, une coordonnée z sur L, compatible avec la métrique, telle que le point P tombe à l'origine. Comme ces deux systèmes de coordonnée sur L sont admissibles, la transformation linéaire entre eux est de la forme

$$z'=\tau(z)=e^{i\theta}\frac{z+\beta}{1-\bar{\beta}z}.$$

Comme nous pouvons choisir θ arbitrairement, réduisons θ à 0. A un cercle γ autour de l'origine dans le z-plan, correspond γ', un des cercles de Poncelet attachés aux points $z'=\beta$ et $-1/\bar{\beta}$ dans le z'-plan. Prenons une fonction $u(z')$, harmonique à l'intérieur de γ' et aussi continue sur la circonférence γ', qui coïncide sur la circonférence avec $-\log d(P')$. Le même calcul entraîne

$$-\log R_2(z') \leqq -\frac{1}{2}\log(1+|z'|^2)-\log\tan e^{-u(z')}, \qquad (z'\in\gamma). \tag{3}$$

Les deux membres étant considérés comme fonctions de z, l'inégalité (3) devient

$$-\log R_2(\tau(z)) \leqq -\frac{1}{2}\log(1+|\tau(z)|^2)-\log\tan e^{-u(\tau(z))}. \tag{4}$$

On voit immédiatement que le premier membre de (4) est sous-harmonique. Au centre $z=0$ de γ, on aura l'inégalité

$$-\log R_2(\beta) \leqq \frac{1}{2}\log(1+|\beta|^2)-\log\tan e^{-u(\beta)}.$$

Pour évaluer plus précisément la différence entre ces deux membres, remplaçons la valeur en 0 du premier terme du second membre par la moyenne de ses valeurs sur la circonférence γ:

$$\Delta \log (1+|\tau(z)|^2) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}.$$

Donc,

$$\mu_{r,0}(\log (1+|\tau(z)|^2)) = \log (1+|\beta|^2)+r^2+o(r^2).$$

On trouve

$$-\log R_2(\beta) \leqq -\frac{1}{2} \log (1+|\beta|^2) - \frac{r^2}{2} + o(r^2) - \log \tan e^{-u(\beta)}$$

et

$$-\log \tan^{-1}\left[e^{-\frac{r^2}{2}+o(r^2)} \frac{R_2(\beta)}{\sqrt{1+|\beta|^2}}\right] \leqq u(\beta).$$

En posant $\delta = \dfrac{R_2(\beta)}{\sqrt{1+|\beta|^2}}$ $(=\tan d_2(\beta))$, on aura

$$-\log \tan^{-1}\delta + \frac{r^2}{2}\frac{\delta}{(1+\delta^2)\tan^{-1}\delta} + o(r^2) \leqq u(\beta).$$

Comme

$$-\log d(P) = -\log d_2(\beta) = -\log \tan^{-1} \frac{R_2(\beta)}{\sqrt{1+|\beta|^2}},$$

on a

$$u(\beta)+\log d(P) \geqq k\frac{r^2}{2} + o(r^2),$$

où

$$k = \frac{\delta}{(1+\delta^2)\tan^{-1}\delta}.$$

D'autre part, comme la valeur moyenne prise sur γ se réduit à

$$\mu_{r,0}(-\log d) = u(\beta),$$

la relation

$$\mu_{r,0}(-\log d)+\log d(P) = u(\beta)+\log d(P) \geqq k\frac{r^2}{2}+o(r^2)$$

entraîne, par passage à la limite,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu_{r,0}(-\log d)+\log d(P)}{r^2} \geqq \frac{k}{2}.$$

Or, on a $0<k<1$. Il suit de (α) et (β) que

$$W(-\log d(P)) \geqq \min(1, 2k) > k. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

A cause du besoin ultérieur, nous allons établir un

LEMME 9. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème II, il existe une fonction $\varphi(P)$ pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$, telle qu'on ait*

$$W(\varphi(P)) \geqq 1 \qquad \textit{pour tout} \quad P \in \mathfrak{D}.$$

DÉMONSTRATION. $k = \delta/(1+\delta^2)\tan^{-1}\delta$ est une fonction décroissante de δ, ayant des limites

$$\lim_{\delta\to 0} k = 1\,, \qquad \lim_{\delta\to +\infty} k = 0\,.$$

On pourra trouver une valeur δ_0 de δ pour laquelle $k = \frac{1}{2}$. Il est facile de voir $\delta_0 > 1$. Donc, la valeur $\beta_0 = \tan^{-1}\delta_0$ surpasse $\frac{\pi}{4}$. En un point $P \in \mathfrak{D}$ où $d(P) \leqq \beta_0$, on aura $W(-\log d(P)) \geqq 1$. D'autre part, prenons le domaine $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}^{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ formé des points dont la distance à la frontière de $\mathfrak{D}$ dépasse $\frac{\pi}{4}$. La distance $d_1(P)$ d'un tel point P à la frontière de $\mathfrak{D}_1$ satisfait à l'inégalité $W(-\log d_1(P)) \geqq 1$. Donc, on peut trouver deux constantes A et B, de telle manière qu'on ait

$$-A\log d(P) + B \leqq -\log d_1(P) \quad \text{pour } P \in \mathfrak{D} \text{ tel que } d(P) \geqq \beta_0$$

$$-A\log d(P) + B > -\log d_1(P) \quad \text{pour } P \in \mathfrak{D} \text{ tel que } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\beta_0 - \frac{\pi}{4}\right) < d(P) < \beta_0\,.$$

Définissons maintenant une fonction $\varphi(P)$ dans $\mathfrak{D}$ par

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= -A\log d(P) + B && \text{quand} \quad d(P) < \beta_0\,, \\ &= -\log d_1(P) && \text{quand} \quad d(P) \geqq \beta_0\,. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi(P)$ ainsi définie vérifie manifestement la condition du présent lemme. Ceci achève la démonstration. c. q. f. d.

§ 4. Problème inverse de Hartogs.

Pour résoudre le problème inverse de Hartogs, les résultats précédents ne sont pas encore suffisants. Il faudra construire une fonction pseudoconvexe jouissant de la propriété 3° indiquée dans le paragraphe précédent. Ceci est indispensable surtout dans le cas où le domaine dont il s'agit possède une infinité de feuillets. Nous allons brièvement expliquer comment la construction d'une telle fonction peut se faire à l'aide du lemme 9, suivant la méthode due à M. Oka, utilisée dans son IX^e mémoire. (Voir [7], 128∼133.)

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sans point critique intérieur sur l'espace projectif $\boldsymbol{P}$. Soient P et Q deux points quelconques de $\mathfrak{D}$. Désignons par $d(P, Q)$ la borne inférieure de la longueur des chemins rectifiables dans $\mathfrak{D}$ joignant P et Q, la longueur étant mesurée par la métrique projective définie dans le § 1. Prenons un point quelconque O dans $\mathfrak{D}$ et fixons-le une fois pour toute. Pour chaque point P de $\mathfrak{D}$, désignons $d(O, P)$ par $\lambda(P)$. La distance euclidienne entre deux points relative à un système admissible de coordonnées inhomogènes z_1, z_2,

$\cdots, z_n$ est plus longue que celle mesurée par Λ. Donc, pour deux points $P:(z)$ et $Q:(z')$ dans $\mathfrak{D}$ suffisamment voisins, on a

$$|\lambda(P)-\lambda(Q)| \leqq d(P, Q) \leqq |z_1-z_1'|+\cdots+|z_n-z_n'| . \tag{1}$$

Pour une fonction continue $\varphi(P)$, désignons la moyenne de φ à l'intérieur de la sphère géodésique de centre P et de rayon ρ par

$$A_\rho'(\varphi(P)) = \frac{1}{V}\int_{Q\in S(P,\rho)} \varphi(Q)dv ,$$

où dv est l'élément de volume déterminé par la métrique Λ et V est la volume de la sphère $S(P, \rho)$ mesurée par Λ. De la fonction $\lambda(P)$, définie et continue dans $\mathfrak{D}$, se déduit une fonction $\lambda_1(P)=A_\rho'(\lambda(P))$. La fonction $\lambda_1(P)$ est bien définie et continue ainsi que ses premières dérivées partielles dans le domaine $\mathfrak{D}^{(\rho)}$ formé des points de $\mathfrak{D}$ dont la distance à la frontière de $\mathfrak{D}$ surpasse ρ. On aura, en vertu de la relation (1), les inégalités

$$\left|\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_i}\right| \leqq 1 , \qquad \left|\frac{\partial\lambda_1}{\partial \bar{z}_i}\right| \leqq 1 \qquad\qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

en tout point dont les coordonnées inhomogènes sont finies. Ensuite, on voit que la fonction $\lambda_2(P)=A_\rho'(\lambda_1(P))$ est continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre dans $\mathfrak{D}^{(2\rho)}$ et que ses dérivées vérifient

$$\left|\frac{\partial^2\lambda_2(P)}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\right| \leqq K, \qquad i, j=1, 2, \cdots, n ,$$

en tout point $P\in\mathfrak{D}^{(2\rho)}$, où K est une constante déterminée par ρ seul mais elle ne dépend ni de P ni du choix des coordonnées.

Supposons maintenant que $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe. D'après ce que nous avons vu dans le §3 et à l'aide de la fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ qu'on a construite dans le lemme 9, nous aurons dans $\mathfrak{D}$ une fonction fortement pseudoconvexe

$$\chi(P)=\lambda_2(P)+M\varphi(P) ,$$

pourvu que M soit choisi suffisamment grand. Au lieu de $\mathfrak{D}$, nous partons de nouveau de $\mathfrak{D}^{(\rho)}$. Soient $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots$ les composantes connexes de $\mathfrak{D}^{(\rho)}$. Pour chaque composante $\mathfrak{D}_m$, nous avons une fonction χ_m qui équivaut à la fonction χ précédemment construite pour le domaine $\mathfrak{D}$. En posant

$$\Phi_\rho(P)=\chi_m(P)+m ,$$

nous obtenons ainsi une fonction définie et continue dans $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$, qui jouit des propriétés suivantes:

1°. elle est fortement pseudoconvexe;

2°. le domaine $\Delta_\alpha: \{P\in\mathfrak{D}^{(3\rho)}; \Phi_\rho(P)<\alpha\}$ se trouve à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$ quelque soit le nombre réel α.

(Pour la démonstration de 2°, voir [7], p. 129.)

Suivant le même mode de construction que dans [7], nous obtiendrons le

THÉORÈME III. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine sans point critique intérieur sur l'espace projectif. Si $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe, alors on peut trouver une fonction $\Phi(P)$ continue dans $\mathfrak{D}$, possédant les propriétés suivantes:*

1°. *elle est fortement pseudoconvexe;*

2°. *l'ensemble des points de $\mathfrak{D}$ où $\varphi(P) < \alpha$ se trouve à l'intérieur complet de $\mathfrak{D}$ pour tout nombre réel α*[7].

Pour le besoin ultérieur, il suffit de construire une fonction définie et possédant les propriétés 1° et 2° dans un plus petit domaine. Si $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe, $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$ l'est aussi. $d'(P)$ étant la distance de P à la frontière de $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$, $-\log d'(P)$ est une fonction pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$, qui croît indéfiniment quand le point tend vers la frontière de $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$. A l'aide de la fonction $\Phi_\rho(P)$ fortement pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$, en posant

$$\Phi'(P) = \Phi_\rho(P) - \log d'(P),$$

on voit que la fonction $\Phi'(P)$ possède les propriétés 1° et 2° pour le domaine $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$. Cette construction étant faite, supposons démontré le

LEMME 10. *Si un domaine $\mathfrak{D}$ admet une fonction $\Phi(P)$ dans $\mathfrak{D}$ jouissant des propriétés* 1° *et* 2°, *alors $\mathfrak{D}$ est holomorphiquement complet.*

Sous cette supposition, le domaine $\mathfrak{D}^{(3\rho)}$ sera holomorphiquement complet. Il en résultera par suite que le domaine $\mathfrak{D}$, comme limite de la suite croissante de domaines holomorphiquement complets, est lui-même holomorphiquement complet.

Rappelons encore le théorème dû à Grauert, énoncé dans le § 1, dans lequel on considère un domaine $\mathfrak{G}$ à l'intérieur complet dans une variété analytique complexe $\mathfrak{M}$ tel que, dans un voisinage U de tout point frontière P de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ puisse s'exprimer par

$$\mathfrak{G} \cap U = \{Q \in U,\ \varphi_1(Q) < a_1, \cdots, \varphi_l(Q) < a_l\}$$

à l'aide d'un nombre fini de fonctions $\varphi_1, \cdots, \varphi_l$, admettant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre dans U et vérifiant $W\varphi_i > 0$. En nous amenant à cette situation où le théorème de Grauert est applicable, nous allons montrer le lemme 10.

DÉMONSTRATION DU LEMME 10. Posons $\mathfrak{D}_\alpha = \{P \in \mathfrak{D}; \Phi(P) < \alpha\}$ pour un nombre réel α. D'après la condition 2°, on a $\mathfrak{D}_\alpha \Subset \mathfrak{D}$. Tout point frontière P de $\mathfrak{D}_\alpha$ possède un voisinage U de telle façon que:

1°. U admette un système admissible de coordonnées $z_1, \cdots, z_n$ pour lequel on ait $W\Phi \geqq k > 0$ dans U;

---

7) M[me] Fujita a construit une telle fonction selon une autre méthode. (Voir [2].)

2°. il existe une fonction $h(z)$ continue dans U, satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $|Wh|<\frac{k}{2}$ et $2\varepsilon>h(z)\geqq 0$ dans U;

(ii) on puisse trouver deux voisinages V et U' de P tels que $P\in V\Subset U'\Subset U$, que $h(z)$ s'annule à l'extérieur de U' et qu'on ait $h(z)>\varepsilon$ dans V, où ε est un nombre positif assez petit, choisi à l'avance indépendamment de P.

Comme $\mathfrak{D}_\alpha\Subset\mathfrak{D}$, la frontière de $\mathfrak{D}_\alpha$ peut être recouverte d'un nombre fini de tels voisinages V, soient $V_1, \cdots, V_l$. Soient $U_1, \cdots, U_l$ les voisinages U et $h_1, \cdots, h_l$ les fonctions h correspondantes respectivement. La fonction

$$\varphi_i'(P)=\Phi(P)+h_i(P),$$

définie dans U_i, est, en vertu de (i), fortement pseudoconvexe. Et, de plus, étant $\Delta_j=(U_j\cap\{\varphi_j'<\alpha\})\cup(\mathfrak{D}_\alpha-U_j)$, l'intersection $\Delta=\bigcap_{j=1}^{l}\Delta_j$ est un domaine pseudoconvexe. De la condition (ii), il s'ensuit que $\mathfrak{D}_{\alpha-2\varepsilon}\subset\Delta\subset\mathfrak{D}_\alpha$. Prenons une fonction φ_i, fortement pseudoconvexe, suffisamment voisine de φ_i' dans U_i, et, d'ailleurs, ayant des dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre. Formons ensuite, de la même façon, l'intersection $\mathfrak{G}$ pour les φ_i au lieu de l'intersection Δ pour les φ_i'. Alors, la frontière de $\mathfrak{G}$ vérifie la condition du théorème de Grauert. Donc, $\mathfrak{G}$ est un domaine holomorphiquement convexe. Le domaine $\mathfrak{G}$ admettant la fonction fortement pseudoconvexe $\Phi(P)$ ne peut jamais posséder d'ensemble analytique compact de dimension $\geqq 1$. Il en résulte que $\mathfrak{G}$ est un domaine holomorphiquement complet. D'autre part, on peut construire le domaine $\mathfrak{G}$ arbitrairement voisin de $\mathfrak{D}_\alpha$. Par suite, le domaine $\mathfrak{D}_\alpha$, étant limite d'une suite croissante de domaines holomorphiquement complets, est lui-même holomorphiquement complet, et, pour la même raison, $\mathfrak{D}$ l'est aussi. Ceci achève la démonstration du lemme 10. c. q. f. d.

Comme nous l'avons dit dans le § 1, (le théorème de) Grauert impose aux fonctions φ_i une condition supplémentaire $d\varphi_i\neq 0$, c'est-à-dire, au moins une des dérivées $\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_j}$ $(j=1, \cdots, n)$ de φ_i n'est pas nulle. Il semble que cette condition lui était nécessaire pour utiliser directement son théorème concernant les variétés de Stein. En realité, elle n'est pas nécessaire. Bien qu'il soit possible de faire φ_i jouir de la propriété $d\varphi_i\neq 0$, nous allons expliquer la validité du théorème sans cette condition, pour raison de l'utilité ultérieure d'une telle remarque.

Cela s'appuie sur le

LEMME 11. *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans l'espace de n variables complexes $z_1, \cdots, z_n$ et soit $\varphi(z)$ une fonction, à valeurs réelles, continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre. Si $W\varphi>0$ dans $\mathfrak{D}$, alors, pour* *tout point* (z_0) *de* $\mathfrak{D}$, *il existe, dans un voisinage* U *de* z_0, *une famille de surfaces caractéristiques* $\{\sigma_t\,;\, 0 \leqq t \leqq 1\}$, *à un paramètre réel* t, *de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites*[8]:

1°. σ_t *varie continûment avec le paramètre réel* t $(0 \leqq t \leqq 1)$; *d'une façon plus précise*, σ_t *est définie par* $f(z, t)=0$, *où* $f(z, t)$ *est une fonction, holomorphe en* $(z) \in U$ *et continue en* t $(0 \leqq t \leqq 1)$, *ne s'annulant pas identiquement dans* U *pour tout* t *fixe.*

2°. $\mathfrak{D}_1$ *étant l'ensemble des points* $(z) \in \mathfrak{D}$ *où* $\varphi(z) < \varphi(z_0)$, *l'intersection* $\mathfrak{D}_1 \cap \sigma_0$ *se réduit au point* (z_0) *et* σ_t *ne rencontre pas* $\mathfrak{D}_1$ *pour* $0 < t \leqq 1$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la notation, supposons que le point (z_0) est l'origine. $\varphi(z)$ peut se développer à l'origine en une série:

$$\varphi(z)=\varphi(0)+\sum\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\Big)_0 z_i+\sum\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z_i}\Big)_0 \bar z_i+\frac{1}{2}\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}\Big) z_i z_j$$
$$+\frac{1}{2}\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar z_i\partial \bar z_j}\Big)_0 \bar z_i \bar z_j+\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial \bar z_j}\Big) z_i \bar z_j+o(r^2),$$

où $r^2=\sum |z_i|^2$. Nous avons ici

$$\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial \bar z_j}\Big)_0 z_i \bar z_j \geqq \frac{r^2}{4} W\varphi\,.$$

Comme φ a des valeurs réelles, nous voyons ensuite

$$\varphi(z) \geqq \varphi(0)+2\,\mathrm{Re}\Big[\sum\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\Big)_0 z_i+\frac{1}{2}\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}\Big)_0 z_i z_j\Big] \tag{2}$$
$$+\frac{r^2}{4} W\varphi+o(r^2)\,.$$

En posant

$$f(z)=\sum\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\Big)_0 z_i+\frac{1}{2}\sum\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial z_j}\Big) z_i z_j\,,$$

nous avons une fonction holomorphe $f(z)$. Considérons une famille de surfaces caractéristiques définies par l'équation

$$f(z)-t=0 \qquad (t \geqq 0)\,. \tag{σ_t}$$

Si $t>0$, alors le second membre de (2) se réduit sur σ_t à

$$\varphi(0)+2t+\frac{r^2}{4} W\varphi+o(r^2)\,.$$

Comme $W\varphi>0$, on a $\frac{r^2}{4} W\varphi+o(r^2)>0$ pourvu que r soit suffisamment petit.

---

8) Une telle famille (σ_t) a été utilisé souvent par M. Oka avec succès. Dans son IX$^{\text{e}}$ mémoire, il a montré l'existence d'une telle famille sous l'hypothèse que la frontière de $\mathfrak{D}_1: \varphi(z)=\varphi(z_0)$ admette un hyperplan tangent. Par ailleurs, dans le cas de deux variables, il l'a montrée sans cette hypothèse dans son VI$^{\text{e}}$ mémoire.

Donc, on a $\varphi(\sigma_t) > \varphi(0)$ quand $t > 0$. Ceci montre que σ_t se trouve en dehors de $\mathfrak{D}_1$ quand $t > 0$. Et, pour $t = 0$, nous voyons également que l'intersection $\sigma_0 \cap \mathfrak{D}_1$ se réduit à l'origine au voisinage de l'origine. c. q. f. d.

M. Grauert s'est servi de deux faits suivants : premièrement, le fait classique dû à Levi, disant que, (si $d\varphi_i \neq 0$,) z_0 admet un voisinage convenable V tel que $V \cap \mathfrak{D}_1$ soit un domaine d'holomorphie, et, deuxièmement, le fait que $\sigma_0 \cap V$ est une variété de Stein. Dans notre cas où l'on n'impose à $d\varphi_i$ aucune condition, nous pouvons, comme d'habitude, déduire du lemme 11 le premier point. Bien que σ_0 ne soit pas nécessairement une variété, $\sigma_0 \cap V$ devient un espace analytique complexe, holomorphiquement complet quand on choisit un voisinage V convenablement. Une fois établis les points sur lesquels M. Grauert s'est appuyé (concernant les fonctions pseudoconvexes), nous pouvons appliquer son raisonnement à notre cas.

Finalement, du théorème III et du lemme 10 s'ensuit le

THÉORÈME IV. *Tout domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur sur l'espace projectif est holomorphiquement complet.*

Bibliographie

[1] F. Docquier et H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., **140** (1960), 94-123.

[2] R. Fujita, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 443-473.

[3] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. of Math., **68** (1958), 460-472.

[4] R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces, Math. Ann., **142** (1961), 355-365.

[5] T. Nishino, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 247-254.

[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI, Domaines pseudoconvexes, Tohoku Math. J., **49** (1942), 119-132.

[7] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX, Domaines finis sans point critique intérieur, Japan. J. Math., **23** (1953), 97-155.