Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 8, No. 1, January, 1956

Remarques sur la théorie des centres aux dimensions supérieures.

Par Yasutaka SIBUYA

(Reçu le 4 déc., 1955)

I. Introduction. Nous avons étudié antérieurement[1] les courbes définies par les équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt}=f_j(x_1,\cdots,x_n)\qquad (j=1,\cdots,n) \tag{1.1}$$

autour de l'origine, en supposant (i) *que les f_j se développent en séries entières de x à coefficients réels* (ii) *que l'origine soit un point d'équilibre :*

$$f_j(0,\cdots,0)=0\qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{1.2}$$

et (iii) *qu'il existe un voisinage de l'origine dont tous les points, sauf points d'équilibre, appartiennent aux courbes fermées satisfaisant aux équations* (1.1).

Posons

$$f_j(x)=\sum_{k=1}^{n}c_{jk}x_k+[x]_2\qquad (j=1,\cdots,n)\,. \tag{1.3}$$

Si l'on a (iii), la solution

$$x_j=\varphi_j(t\,;\xi_1,\cdots,\xi_n)\qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{1.4}$$

telle que

$$x_j(0)=\xi_j\qquad (j=1,\cdots,n)\,,$$

admet une période $\omega(\xi)>0$ par rapport à t. Nous avons démontré que, si la période $\omega(\xi)$ est bornée dans un voisinage de l'origine et si la matrice $C=(c_{jk})$ n'est pas la matrice nulle, la solution (1.4)

1) M. Urabe and Y. Sibuya. On Center of Higher Dimensions. Jour. Sci., Hiroshima Univ., A, 19 (1955) 87-100.

admet une période $\tilde{\omega}(\xi)$ qui est holomorphe en ξ autour de l'origine. Démontrons maintenant les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Soit donné un système* (1.1) *satisfaisant aux conditions* (i), (ii) *et* (iii); *si* $C=O$ *et si la solution* (1.4) *admet une période* $\omega(\xi)>0$ *bornée dans un voisinage de l'origine, les* $f_j(x)$ *s'annulent identiquement autour de l'origine.*

THÉORÈME II. *Soit donné un système* (1.1) *satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii); *s'il existe une série entière formelle de* ξ *à coefficients réels:*

$$\omega(\xi)\approx\omega_0+\sum{}' \omega_{k_1\cdots k_n}\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n} \tag{1.5}$$

satisfaisant formellement aux relations

$$\xi_j\approx\varphi_j(\omega(\xi)\,;\,\xi) \qquad (j=1,\cdots,n)\,, \tag{1.6}$$

la série $\omega(\xi)$ *est nécessariement convergente pour les valeurs assez petites de* ξ.

Le théorème I complète nos résultats antérieurs pour le cas où la période de (1.4) est bornée dans un voisinage de l'origine. Le théorème II nous montre que l'on peut remplacer (iii) par l'existence de la série formelle (1.5) satisfaisant aux relations (1.6).

2. La démonstration du théorème I. Supposons que les développements des fonctions $f_j(x)$ commencent respectivement par les termes de degrés N_j; si $f_j(x)\equiv 0$, nous poserons $N_j=\infty$.

Il est à montrer une contradiction en supposant

$$N=\mathrm{Min}\{N_1,\cdots,N_n\} \tag{2.1}$$

fini.

Puisque $C=O$, on aura $N>1$. Supposons de plus que

$$N=N_1<\infty\,. \tag{2.2}$$

On aura alors

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=p(x_1,\cdots,x_n)+[x]_{N+1}\,, \tag{2.3}$$

où $p(x_1,\cdots,x_n)$ est un polynome homogène de degré N ne s'annulant pas identiquement.

Posons

$$\xi_j(\rho)=\rho\, l_j^0 \qquad (j=1, \cdots, n)\,, \tag{2.4}$$

où $l_1^0, \cdots, l_n^0$ sont des valeurs telles que

$$p(l_1^0, \cdots, l_n^0) \neq 0\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} (l_j^0)^2=1\,. \tag{2.5}$$

On a, par les hypothèses,

$$\omega(\xi(\rho)) > 0\,. \tag{2.6}$$

Puisque $\omega(\xi)$ est bornée dans un voisinage de l'origine, il existe un nombre positif M tel que

$$|\omega(\xi)| \leqq M \tag{2.7}$$

pour $|\xi_j|<\delta$, δ étant un nombre positif assez petit. D'autre part, $\varphi_1(t\,;\,\xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_1(t\,;\,\xi)=\xi_1+t f_1(\xi)+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k(\xi_1)\,, \tag{2.8}$$

où $X=\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi) \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$. On peut supposer que la série (2.8) converge pour $|t| \leqq M$, $|\xi_j|<\delta$ $(j=1, \cdots, n)$.

Cela posé, posons

$$\phi(t\,;\,\rho)=\rho^{-N}\{\varphi_1(t\,;\,\xi(\rho))-\xi_1(\rho)\}\,. \tag{2.9}$$

En vertu de (2.3) et de (2.8), on a

$$\phi(t\,;\,\rho)=t\{p(l_1^0, \cdots, l_n^0)+\psi(t\,;\,\rho)\}\,, \tag{2.10}$$

où $\psi(t\,;\,\rho)$ est holomorphe pour $|t| \leqq M$, $|\rho|<\delta$, et

$$\psi(t\,;\,0)=0\,. \tag{2.11}$$

Puisque $\omega(\xi)$ est une période de $\varphi_1(t\,;\,\xi)$, il faut que

$$\phi(\omega(\xi(\rho))\,;\,\rho)=0\,, \tag{2.12}$$

d'où, en vertu de (2.10), on a

(2.13) $$0=\omega(\xi(\rho))\{p(l_1^0, \cdots, l_n^0)+\psi(\omega(\xi(\rho))\,;\,\rho)\}\,.$$

Par conséquent, si $|\rho|$ est assez petit, on a

(2.14) $$\omega(\xi(\rho))=0\,,$$

ce qui est contradictoire avec (2.6), c. q. f. d.

3. La démonstration du théorème II. Passons à la démonstration du théorème II. Si $\omega_0=0$, en vertu de relations formelles

(3.1) $$\xi_j=\xi_j+\omega(\xi)\,f_j(\xi)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\omega(\xi)^k}{k\,!}\,X^k(\xi_j) \qquad (j=1, \cdots, n)\,,$$

on obtient immédiatement $\omega(\xi)=0$. Et puis, si $\omega_0 \neq 0$ et si $C=O$, en vertu de (3.1), on a $f_j(\xi)\equiv 0$ $(j=1, \cdots, n)$. Par suite, il suffit de considérer seulement le cas où $\omega_0 \neq 0$, $C \neq O$.

Remarquons d'abord

(3.2) $$\exp C\,\omega_0=E \qquad (E\text{: la matrice-unité})\,,$$

ce qui sera démontré facilement. Par conséquent, la forme canonique de C est de la forme diagonale. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs caractéristiques de C. Alors, les λ_j sont purement imaginaires. Si, donc, on pose,

(3.3) $$\lambda_j=i\theta_j \qquad (j=1, \cdots, n)\,,$$

on a

(3.4) $$\theta_1=-\theta_2=\theta>0\,,$$

car C est une matrice réelle, différente de O. De plus, on a

(3.5) $$\theta\omega_0\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)\,.$$

On peut supposer, sans perdre la généralité, que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soient de la forme

(3.6) $$f_1(x)=-\theta x_2+[x]_2\,, \qquad f_2(x)=\theta\,x_1+[x]_2\,.$$

On aura alors

(3.7) $$\varphi_1(t\,;\,\xi)=\xi_1\cos(\theta t)-\xi_2\sin(\theta t)+[\xi\,;\,t]_2\,.$$

Le développement (3.7) converge pour $|t-\omega_0|\leqq M$, $|\xi_j|<\delta$ $(j=1,\cdots,n)$, pourvu que, M étant une constante positive quelconque, $\delta>0$ soit assez petit.

Cela posé, posons

$$\phi(t\,;\,\rho,l)=\rho^{-1}\{\varphi_1(t\,;\,\rho l_1,\cdots,\rho l_n)-\rho l_1\}\tag{3.8}$$
$$=l_1\{\cos(\theta t)-1\}-l_2\sin(\theta t)+\psi(t\,;\,\rho,l)\,,$$

où $\psi(t\,;\,\rho,l)$ est holomorphe pour $|t-\omega_0|\leqq M$, $|\rho|<\delta$, $|l_j|\leqq 1$ $(j=1,\cdots,n)$, et

$$\psi(t\,;\,0,l)=0\,.\tag{3.9}$$

On a d'abord

$$\phi(\omega_0\,;\,0,l)=0\,,\tag{3.10}$$

et

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-l_2 \qquad \text{pour} \quad t=\omega_0\,,\quad \rho=0\,.\tag{3.11}$$

Par conséquent, l'équation en $\tilde{\omega}$:

$$\phi(\tilde{\omega}\,;\,\rho,l)=0\tag{3.12}$$

admet une racine $\tilde{\omega}(\rho,l_1,\cdots,l_n)$ telle que

$$\tilde{\omega}(0,l)=\omega_0\,.\tag{3.13}$$

Elle est holomorphe et uniforme pour

$$\begin{cases} |\rho|<\delta', \\ \sigma\leqq|l_2|\leqq 1\,, \qquad |l_j|\leqq 1 \qquad (j\neq 2)\,, \end{cases}\tag{3.14}$$

pourvu que δ' soit assez petit, $\sigma>0$ pouvant être aussi petit que l'on veut.

$\omega(\rho,l)$ peut s'écrire sous la forme

$$\omega(\rho,l)=\omega_0+\sum_{k=1}^{\infty}p_k(l)\,\rho^k\,,\tag{3.15}$$

où les $p_k(l)$ sont holomorphes et uniformes pour

$$\sigma \leqq |l_2| \leqq 1\,, \qquad |l_j| \leqq 1 \qquad (j \neq 2)\,. \tag{3.16}$$

D'autre part, en posant $\xi_j = \rho l_j$ $(j=1, \cdots, n)$ dans (1.5), on obtient une racine formelle $\tilde{\omega} = \omega(\rho l)$ de (3.12):

$$\omega(\rho l) \approx \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(l)\, \rho^k\,, \tag{3.17}$$

où les $q_k(l)$ sont des polynomes de $l_1, \cdots, l_n$.

On a donc, en vertu de (3.12) et de (3.11),

$$p_k(l) = q_k(l) \qquad (k=1, 2, \cdots) \tag{3.18}$$

pour (3.16). Les coefficients $q_k(l)$ étant des polynomes, la convergence de (3.15) entraîne celle de la série (3.17) pour

$$|\rho| < \delta'\,, \qquad |l_j| \leqq 1 \qquad (j=1, \cdots, n)\,. \tag{3.19}$$

On en conclut que la série formelle (1.5) converge pour $|\xi_j| < \delta'$ $(j=1, \cdots, n)$, c. q. f. d.

Ce mémoire a été préparé sous les auspices de ≪Scientific Research Fund of the Department of Education≫.

Université de Tokyo.