Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 7, Supplement, December, 1955

Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe I.

Von Mikao MORIYA

(Received Nov. 1, 1955)

Im folgenden bezeichnet k durchweg einen diskret bewerteten perfekten (kommutativen) Körper und K eine endlich-separable Erweiterung über k. Die Hauptordnung von k bzw. K sei mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Ferner sei $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ und Π ein Primelement von $\mathfrak{P}$. Dann bezeichnen wir mit R_m den Restklassenring von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}^m$; dabei wollen wir auch $m=\infty$ zulassen, indem wir unter R_∞ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ selbst verstehen.

Nun sei f eine eindeutige Abbildung des Produktraumes $\mathfrak{O}\times\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{O}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X, Y)\equiv f(Y, X) \qquad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

2) Für beliebige Elemente X_i, Y_i $(i=1,2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X_1+X_2, Y_1+Y_2)\equiv \sum_{i,j=1}^{2} f(X_i, Y_j) \qquad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

3) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$Xf(Y, Z)+f(X, YZ)\equiv f(XY, Z)+Zf(X, Y) \quad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

4) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(x, X)\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

(Dabei soll für mod $\mathfrak{P}^\infty$ das Kongruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden.) Dann heißt f ein *normaler 2-Kozyklus* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m.

Eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{O}$ in sich heißt eine *normale 1-Kokette* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, wenn

1) für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ stets

$$g(x)\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^m,$$

2) für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$

$$g(xX) \equiv xg(X) \quad \bmod \mathfrak{P}^m$$

und

3) für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets

$$g(X+Y) \equiv g(X)+g(Y) \quad \bmod \mathfrak{P}^m$$

gilt. Definiert man hierbei den 2-Korand δg von g durch die Gleichung

$$\delta g(X, Y) = Yg(X)+Xg(Y)-g(XY) \qquad (X, Y \text{ aus } \mathfrak{O}),$$

so ist δg ersichtlich ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m. Ist insbesondere $\delta g(X, Y) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^m$, so heißt g ein normaler 1-Kozyklus oder eine *Derivation* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m.

Ein normaler 2-Kozyklus f' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m heißt wie üblich kohomolog zu einem normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, wenn es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m gibt, so daß

$$f' \equiv f+\delta g \quad \bmod \mathfrak{P}^m$$ [1]

ist; in Zeichen: $f \sim f'$ $(\mathfrak{P}^m)$. Insbesondere bedeutet

$$f \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m),$$

daß für eine geeignete, normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m $f \equiv \delta g \bmod \mathfrak{P}^m$ gilt.

Nun bildet die Gesamtheit B_m^2 aller zur Null kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m offenbar einen $\mathfrak{O}$-Untermodul des $\mathfrak{O}$-Moduls Z_m^2, der aus allen normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m besteht; der Faktormodul $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ von Z_m^2 nach B_m^2 ist offenbar ein $\mathfrak{O}$-Modul und die ***normale 2-Kohomologiegruppe*** von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m genannt. Dabei heißt jedes Element aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ eine normale 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m.

1. Kozyklenbasis. Ich habe schon an anderer Stelle die Struktur von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ bestimmt, wenn m hinreichend groß ist, und zwar gilt folgender

1) Dies bedeutet, daß für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets

$$f'(X, Y) = f(X, Y)+\delta g(X, Y) \quad \bmod \mathfrak{P}^m$$

gilt.

SATZ 1.[2] *Es existiert eine natürliche Zahl M von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geqq M$ die normale 2-Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ mit $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ $\mathfrak{O}$-isomorph ist. Wenn $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ kein Nullmodul ist, so besitzt es eine endliche $\mathfrak{O}$-Basis; d. h. es existieren endlich viele, von der Nullkohomologieklasse verschiedene 2-Kohomologieklassen $C_1, C_2, \cdots C_n$ aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ von der Art, daß jede 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ von der Form $\sum_{i=1}^{n} A_iC_i$ $(A_i \in \mathfrak{O}, i=1, 2, \cdots, n)$ ist, und daß aus einer beliebigen Relation $\sum_{i=1}^{n} A_iC_i =$ Nullkohomologieklasse stets $A_1C_1 = A_2C_2 = \cdots A_nC_n =$ Nullkohomologieklasse folgen. Ferner besitzt $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ diejenigen Kompositionsreihen von einer endlichen Länge d, die aus lauter $\mathfrak{O}$-Untermoduln bestehen. Dabei ist $\mathfrak{P}^d$ gleich der Differente von K/k.*

Die in Satz 1 genannte Kompositionslänge d von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ heißt die *$\mathfrak{O}$-Länge* von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$. Ist C eine beliebige 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, so besitzt der durch C erzeugte $\mathfrak{O}$-Modul offenbar eine endliche Kompositionslänge, welche ich die $\mathfrak{O}$-Länge von C nennen will.

Nun sei $C_1, C_2, \cdots, C_n$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ und e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ die $\mathfrak{O}$-Länge von C_i. Dann greifen wir aus jedem C_i $(1 \leqq i \leqq n)$ einen beliebigen 2-Kozyklus f_i heraus, und wir nennen $f_1, f_2, \cdots, f_n$ eine *Kozyklenbasis* von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$. Berücksichtigt man dabei, daß die C_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ bilden, so sieht man sofort ein, daß 1) für jeden normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m stets

$$f \sim \sum_{i=1}^{n} A_i f_i \qquad (\mathfrak{P}^m) \qquad (A_i \in \mathfrak{O},\ i=1, 2, \cdots, n)$$

gilt und 2) eine Kohomologierelation

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m) \qquad (A_i \in \mathfrak{O},\ i=1, 2, \cdots, A)$$

dann und nur dann besteht, wenn die Kongruenzen

$$A_i \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^{e_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

2) M. Moriya, Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 5 (1955), Satz 5.

erfüllt sind. Man nennt die $\mathfrak{O}$-Länge e_i von C_i $(1 \leqq i \leqq n)$ auch die *$\mathfrak{O}$-Länge* von f_i in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Als Vorbereitungen unserer weiteren Untersuchungen wollen wir hier zwei Hilfssätze voranschicken.

HILFSSATZ 1. *Es sei g eine normale* 1-*Kokette von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* R_∞. *Gilt dann* $\delta g=0$, *so ist* $g=0$.

BEWEIS. Ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ genügt offenbar einer irreduziblen Gleichung $\varphi(\Xi)$ in $\mathfrak{o}$. Berücksichtigt man nun, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ und $\delta g=0$ ist, so schließt man ohne Schwierigkeit:

$$\varphi'(X)g(X)=0\,,$$

wo $\varphi'(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi(\Xi)$ nach Ξ bedeutet. Da K über k separabel ist, so ist $\varphi'(X)\neq 0$, woraus $g(X)=0$ folgt, w. z. b. w.

Im folgenden legen wir eine bliebige Kozyklenbasis $f_1, f_2, \cdots, f_n$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ fest; die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ soll wieder mit e_i bezeichnet werden. Wir verstehen ferner unter Π^∞ das Nullelement aus $\mathfrak{O}$ und definieren $-(-\infty)=\infty$ und $a+\infty=\infty$, wenn a eine ganze rationale Zahl ist.

HILFSSATZ 2. *Es gelte für eine normale* 1-*Kokette g von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* R_∞ *eine Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i f_i=\delta g \qquad (X_i \in \mathfrak{O}, \quad i=1, 2, \cdots, n)\,.$$

Setzt man dann $X_i = \Pi^{e_i+u_i}\, Y_i$ *mit* $Y_i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$[3] *und* $u=\mathrm{Min}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, *so gibt es ein Element* A_0 *aus* $\mathfrak{O}$, *für das* $g(A_0)$ *genau durch* $\mathfrak{P}^u$ *teilbar ist.*

ZUSATZ. Wenn zunächst $X_1=X_2=\cdots=0$ sind, so ist einerseits nach Verabredung $u=\infty$ und anderseits $\delta g=0$; aus Hilfssatz 1 folgt also $g=0$. Dies besagt aber, daß für jedes X aus $\mathfrak{O}$ stets $g(X)\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^\infty$ gilt; daher ist die Behauptung des Satzes für $X_1=X_2=\cdots=X_n=0$ richtig. Nun nehmen wir an, daß es unter den X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ mindestens ein von Null verschiedenes Element gibt. Weil

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi^{e_i+u_i}\, Y_i f_i=\sum_{i=1}^{n} X_i f_i=\delta g$$

3) Wenn $X_i=0$ ist, so soll man $u_i=\infty$ setzen.

ist und $f_1, f_2, \cdots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_\infty)$ bilden, so muß für jeden Index i $(1 \leqq i \leqq n)$ $u_i \geqq 0$ sein; also ist $u = \mathrm{Min}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ eine nicht-negative ganze rationale Zahl. Betrachtet man dann den normalen 2-Kozyklus

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi^{-u} X_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \Pi^{e_i+u_i-u} Y_i f_i ,$$

so ist dieser Kozyklus der 2-Korand einer normalen 1-Kokette h von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞:

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi^{e_i+u_i-u} Y_i f_i = \delta h .$$

Gilt dabei für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ stets die Kongruenz $h(X) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$, so setze man

$$h(X) = \Pi\, h'(X) .$$

Dann überzeugt man sich leicht, daß h' eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ ist. Da die Zahlen $e_i + u_i - u - 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ alle nicht negativ sind, so gilt sicher

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi^{e_i+u_i-u-1}\; Y_i f_i = \delta h' ;$$

dies ist aber ein Widerspruch, weil $\mathrm{Min}\,(u_1 - u - 1,\ u_2 - u - 1, \cdots, u_n - u - 1) < 0$ ist. Daher existiert ein Element A_0 aus $\mathfrak{O}$ mit $h(A_0) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$. Ferner folgt aus der Relation $\sum^{n} X_i f_i = \delta(\Pi^u h)$

$$\delta(g - \Pi^u h) = 0 ;$$

gemäß Hilfssatz 1 gilt:

$$g = \Pi^u h .$$

Also ist $g(A_0)$ genau durch $\mathfrak{P}^u$ teilbar, wenn $h(A_0) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$ ist.

Mit Hilfe von Hilfssatz 2 kann man leicht folgenden Zusatz beweisen:

ZUSATZ. *Es seien* $\Pi^{e_i} f_i = \delta g_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, *wo die* g_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ *geeignete normale* 1-*Koketten von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* R_∞ *bezeichnen. Ist dann* $\mathfrak{P}^u (u < \infty)$ *der größte gemeinsame Teiler der Elemente* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *aus*

$\mathfrak{O}$, so existiert ein Element A_0 aus $\mathfrak{O}$ derart, daß $(\sum_{i=1}^{n} X_i g_i)(A_0)$ genau durch $\mathfrak{P}^u$ teilbar ist.

2. Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. Es sei $f_1, f_2, \cdots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ und die $e_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ $\mathfrak{O}$-Länge von f_i. Dann gelten die Gleichungen:

$$\Pi^{e_i} f_i = \delta g_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)\,,$$

wo die g_i $(i=1,2,\cdots,n)$ geeignete normale 1-Kodetten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ sind. Für eine beliebige natürliche Zahl $m \geqq \mathrm{Max}\,(e_1, e_2, \cdots e_n)$ bestehen also:

$$\delta\,(\,\Pi^{m-e_i} g_i) = \Pi^m f_i \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m \quad (i=1,2,\cdots,n)\,;$$

d. h. $D_i = \Pi^{m-e_i} g_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ sind Derivation von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m. Betrachtet man nun den Derivationsmodul $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ aller Derivationen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, so ist das annullierende Ideal von D_i in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ gleich $\mathfrak{P}^{e_i}$, weil nach Zusatz zu Hilfssatz 2 für ein geeignetes Element A_i aus $\mathfrak{O}$ $D_i(A_i) = \Pi^{m-e_i} g_i(A_i)$ genau durch $\mathfrak{P}^{m-e_i}$ teilbar ist; d. h. die $\mathfrak{O}$-Länge von D_i $(1 \leqq i \leqq n)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ ist gleich e_i.

Nun sei $\sum_{i=1}^{n} X_i D_i$ gleich der Nullderivation von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, wo die X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Dann gilt für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i D_i(X) = (\sum_{i=1}^{n} X_i D_i)(X) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \ \mathfrak{P}^m.$$

Ferner setze man

$$(\sum_{i=1}^{n} X_i D_i)(X) = \Pi^m g(X)\,.$$

Wegen $\Pi^m g(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \Pi^{m-e_i} g_i(X)$ bestätigt man dann leicht, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ ist. Außerdem gilt für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$;

$$(\prod^m \delta g)(X, Y) = (\sum_{i=1}^{n} X_i \prod^m f_i)(X, Y) ;$$

hieraus schließt man sofort:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i f_i = \delta g .$$

Da $f_1, f_2, \cdots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_\infty)$ ist, so müssen

$$X_i \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^{e_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

sein; d. h. die Derivationen D_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sind in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ $\mathfrak{O}$-unabhangig, und folglich besitzt der durch die D_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ erzeugte $\mathfrak{O}$-Untermodul $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ die $\mathfrak{O}$-Länge $\sum_{i=1}^{n} e_i = d$ ($\mathfrak{O}$-Länge von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_\infty)$). Da die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ nicht größer ist als d, so muß $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ mit $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ übereinstimmen.[4)]

Es sei f ein beliebiger normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ und a die $\mathfrak{O}$-Länge von f in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_\infty)$. Dann gilt für eine geeignete normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞:

$$\prod^a f = \delta g ,$$

und $\prod^{m-a} g$ ist eine Derivation von der $\mathfrak{O}$-Länge a aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$, soweit $m \geqq \operatorname{Max}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ ist. Setzt man nun

$$\Phi(f) = \prod^{m-a} g ,$$

so sind alle normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ durch Φ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ abgebildet. Nach Definition sind alle und nur alle zur Null kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ durch Φ auf die Nullderivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_m)$ abgebildet. Ist nun f' auch ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ und a' die $\mathfrak{O}$-Länge von f' in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_\infty)$, so existiert eine normale 1-Kokette g' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ mit $\prod^{a'} f' = \delta g'$. Wenn b die $\mathfrak{O}$-Länge von $f + f'$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o} ; R_\infty)$ bezeichnet, so gilt für eine geeignete normale 1-Kokette h von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞:

4) M. Moriya, Theorie der Derivationen und Körperdifferenten, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 2 (1953), Satz 5.

$$\prod^b (f+f') = \delta h\,.$$

Wir erhalten dann:

$$\Phi(f+f') = \prod^{m-b} h \quad \text{und} \quad \Phi(f)+\Phi(f') = \prod^{m-a} g + \prod^{m-a'} g'\,.$$

Wegen $\delta(\prod^{m-b} h) = \prod^m (f+f') = \delta(\prod^{m-a} g) + \delta(\prod^{m-a'} g')$ gilt $\delta(\prod^{m-b} h - \prod^{m-a} g - \prod^{m-a'} g') = 0$; aus Hilfssatz 1 folgt also:

$$\prod^{m-b} h = \prod^{m-a} g + \prod^{m-a'} g'\,,$$

was aber $\Phi(f+f') = \Phi(f)+\Phi(f')$ bedeutet. Ferner kann man ohne Schwierigkeit beweisen, daß für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ stets $\Phi(Xf) \equiv X\Phi(f)$ mod $\mathfrak{P}^m$ gilt. Der $\mathfrak{O}$-Modul Z^2 aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ ist also durch Φ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_m)$ $\mathfrak{O}$-homomorph abgebildet. Nun sei D eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_m)$. Dann ist D von der Form:

$$D \equiv \sum^n A_i D_i = \sum^n A_i \Phi(f_i) = \Phi(\sum^n A_i f_i) \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m\,,$$

wo die $A_i (i=1, 2, \cdots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ sind; d. h. der normale 2-Kozyklus $\sum_{i=1}^n A_i f_i$ geht durch Φ in die Derivation D über, also induziert Φ einen $\mathfrak{O}$-Isomorphismus von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_\infty)$ auf $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_m)$.

Alles zusammenfassend erhalten wir folgenden

SATZ 2. *Es sei $f_1, f_2, \cdots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_\infty)$ und $e_1, e_2, \cdots, e_n$ seien bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge von $f_1, f_2, \cdots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_\infty)$. Ferner sei m eine natürliche Zahl mit $m \geqq \mathrm{Max}\,(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Setzt man dann $\prod^{e_i} f_i = \delta g_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, so bilden die $\prod^{m-e_i} g_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis des Derivationsmoduls $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_m)$. Dabei bezeichnen die g_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ normale 1-Koketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞. Ordnet man nun einem beliebigen normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ von der $\mathfrak{O}$-Länge a die Derivation $\prod^{m-a} g$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m zu, so ergibt diese Zuordnung einen $\mathfrak{O}$-Isomorphismus von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_\infty)$ auf $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; R_m)$, wo g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ mit $\prod^a f = \delta g$ bedeutet.*

Unter Berücksichtigung von Satz 1 schließt man aus Satz 2:

SATZ 3.[5] *Es existiert eine nicht-negative, ganze rationale Zahl* M_1 *derart, daß für jede natürliche Zahl* m *mit* $m \geqq M_1$ *die normale* 2-*-Kohomologiegruppe* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ *zum Derivationsmodul* $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ $\mathfrak{O}$-*-isomorph ist.*

BEMERKUNG. In Wirklichkeit gilt die $\mathfrak{O}$-Isomorphie

$$H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m) \cong H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$$

für jede nicht-negative, ganze rationale Zahl m. Zum Beweis dafür muß man die Struktur von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ und $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ eingehend untersuchen. Darauf will ich aber noch an anderer Stelle zurückkommen.

Mathematisches Institut,
Universität Okayama.

5) Beim Internationalen Mathematischen Symposium über die algebraische Zahlentheorie, welches vom 8. bis 13. Sept., 1955 in Tokyo und Nikko stattfand, meldete ich, daß ich damals Satz 3 nur für die Hauptordnungen $\mathfrak{O}$ mit spezieller Struktur über $\mathfrak{o}$ beweisen konnte. Es gelang mir aber einige Wochen später, den Satz für die allgemeinen Hauptordnungen $\mathfrak{O}$ zu beweisen.