Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 5, No. 1 April, 1953.

Sur un analogue du théorème de Gauss-Bonnet en géométrie projective différentielle.

Par Makoto KIMPARA

(Reçu Nov. 24, 1952)

1. Supposons que les coordonnées d'un point courant x d'une surface non réglée S soient exprimées en fonction de paramètres asymptotiques u, v. Les équations fondamentales pour x peuvent alors s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} x_{uu}=\theta_u x_u+\beta x_v+p_{11}x\,, \\ x_{vv}=\gamma x_u+\theta_v x_v+p_{22}x\,. \end{cases}$$

Attachons au point x un repère ayant pour sommets les points

$$x\,,\quad x_1=x_u+\alpha_1 x\,,\quad x_2=x_v+\alpha_2 x\,,$$
$$x_3=x_{uv}+\alpha_2 x_u+\alpha_1 x_v+\rho x\,,$$

où

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}+\theta_u\right),\quad \alpha_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_v}{\beta}+\theta_v\right),$$
$$\alpha_1\alpha_2-\rho=\frac{1}{2}(\beta\gamma+\theta_{uv})\,.$$

Alors la droite xx_3 est la directrice de la première espèce, la droite x_1x_2 celle de la deuxième espèce, et le point x_3 est situé sur la quadrique de Lie. D'ailleurs, le sommet du faisceau canonique de la deuxième espèce est donné par

$$(2)\qquad (\log\beta^2\gamma)_v x_1-(\log\beta\gamma^2)_u x_2\,.$$

Lorsque le point x se déplace sur S, le point x_3 engendre une surface que nous appellerons la *surface* Σ.

Si l'on désigne par ξ_α $(\alpha=0,1,2,3)$ les coordonnées homogènes d'un point par rapport au repère considéré, la quadrique de Lie est donnée par

$$\xi_0\xi_3=\xi_1\xi_2, \tag{3}$$

tandis que l'équation

$$\xi_0\xi_3=\xi_1\xi_2-\beta\gamma\xi_3^2 \tag{4}$$

définit l'une des quadriques de Darboux.

2. Posons maintenant

$$L=\theta_{uu}-\frac{1}{2}\theta_u^2-\beta\theta_v-\beta_v-2p_{11},$$

$$M=\theta_{vv}-\frac{1}{2}\theta_v^2-\gamma\theta_u-\gamma_u-2p_{22},$$

$$\lambda=-\frac{1}{2}L-\frac{1}{2}(\log\gamma)_{uu}-\frac{1}{4}(\log\gamma)_u^2,$$

$$\mu=-\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}(\log\beta)_{vv}-\frac{1}{4}(\log\beta)_v^2.$$

Selon les équations fondamentales (1), nous avons pour le déplacement infinitésimal du repère mentionné au-dessus

$$dx_\alpha=\sum_{\beta=0}^{3}\omega_{\alpha\beta}x_\beta\quad(\alpha=0,1,2,3;\ x_0\equiv x), \tag{5}$$

où

$$\omega_{00}=\frac{1}{2}\{(\log\gamma)_u+\theta_u\}du+\frac{1}{2}\{(\log\beta)_v+\theta_v\}dv,$$

$$\omega_{01}=\omega_{23}=du,\ \omega_{02}=\omega_{13}=dv,\ \omega_{03}=0,$$

$$\omega_{10}=\omega_{32}=\lambda\, du-\frac{1}{2}\{(\log\gamma)_{uv}-\beta\gamma\}dv,$$

$$\omega_{11}=-\frac{1}{2}\{(\log\gamma)_u-\theta_u\}du+\frac{1}{2}\{(\log\beta)_v+\theta_v\}dv,$$

$$\omega_{12}=\beta\, du\,,$$

$$\omega_{20}=\omega_{31}=-\frac{1}{2}\{(\log\beta)_{uv}-\beta\gamma\}du+\mu\, dv\,,$$

$$\omega_{21}=\gamma\, dv\,,$$

$$\omega_{22}=\frac{1}{2}\{(\log\gamma)_u+\theta_u\}du-\frac{1}{2}\{(\log\beta)_v-\theta_v\}dv\,,$$

$$\omega_{30}=\beta\mu\, du+\gamma\lambda\, dv\,,$$

$$\omega_{33}=-\frac{1}{2}\{(\log\gamma)_u-\theta_u\}du-\frac{1}{2}\{(\log\beta)_v-\theta_v\}dv\,.$$

On peut vérifier facilement que la forme de Pfaff

$$\sigma=\frac{\mu}{\gamma}du+\frac{\lambda}{\beta}dv \tag{6}$$

est invariante (pour une homographie ou pour une corrélation) et intrinsèque. La différentielle extérieure de σ peut s'écrire

$$\Omega=\left\{\frac{\mu}{\gamma}(\log\beta^2\gamma)_v-\frac{\lambda}{\beta}(\log\beta\gamma^2)_u\right\}[du\, dv]\,, \tag{7}$$

en vertu de la relation

$$(\gamma L)_u+L\gamma_u+\gamma_{uuu}=(\beta M)_v+M\beta_v+\beta_{vvv}$$

provenante des conditions d'intégrabilité de (1). La forme différentielle extérieure Ω est aussi invariante et intrinsèque. Nous avons ainsi un analogue du théorème de Gauss-Bonnet:

THÉOREME 1. *Considérons sur la surface S un domaine simplement connexe D limité par un contour simple fermé C. Supposons que toute ligne asymptotique n'ait pas le point d'inflexion dans D ni sur C. Nous avons alors*

$$\int_C\sigma=\iint_D\Omega\,. \tag{8}$$

3. Nous allons considérer ce que signifient géométriquement ces formes différentielles. Désignons par P le point x sur la surface S, par I un point sur la surface Σ, infiniment voisin du point x_3 qui correspond à x. Un point de la droite PI est donné par

$$mx+n(x_3+dx_3+\cdots)\,.$$

Soient L le point d'intersection de la droite PI avec la quadrique de Lie (3) différent de P, D l'intersection de PI avec la quadrique de Darboux (4) différent de P. Nous pouvons alors énoncer en tenant compte des équations (5), le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *La forme de Pfaff σ est la partie principale du rapport anharmonique* ($PIDL$).

Se rapportant au repère considéré, quatre sommets de la quadrilatère de Demoulin sur la quadrique de Lie en le point x sont donnés par

$$(\varepsilon\varepsilon_1\sqrt{\lambda\mu}\,,\ \varepsilon\sqrt{\mu}\,,\ \varepsilon_1\sqrt{\lambda}\,,\ 1)\ (\varepsilon, \varepsilon_1=\pm 1)\,.$$

On en déduit la proposition suivante :

THÉORÈME 3. *Pour que la forme de Pfaff σ s'annule identiquement, il faut et il suffit que la quadrilatère de Demoulin se réduise à un seul point, c'est-à-dire les quadriques de Lie n'aient que deux points caractéristiques.*

Supposons que d'ores et déjà σ ne s'annule pas indentiquement. Alors $\sigma=0$ définit une direction issue du point x et nous avons immédiatement :

THÉORÈME 4. *Pour qu'une direction asymptotique en le point x soit la direction définie par $\sigma=0$, il faut et il suffit que la quadrilatère de Demoulin se réduise à une portion de droite, c'est-à-dire les quadriques de Lie n'aient que trois points caractéristiques.*

Désignons par l la droite d'intersection du plan tangent à la surface Σ en le point x_3 avec le plan tangent à la quadrique de Lie en le même point. C'est la droite joignant le point x_3 au point donné par

$$\left[\beta\mu^2+\frac{1}{2}\gamma\lambda\left\{(\log\beta)_{uv}-\beta\gamma\right\}\right]x_1$$
$$-\left[\gamma\lambda^2+\frac{1}{2}\beta\mu\left\{(\log\gamma)_{uv}-\beta\gamma\right\}\right]x_2\,.$$

Soit t la tangente à la surface S en le point x, ayant la direction définie par $\sigma=0$. Puisqu'on a $\omega_{30}=0$ pour $\sigma=0$, la droite l issue de x_3 correspond t issue de x. Pour que ces deux droites correspondantes soient situées dans un même plan, il faut et il suffit qu'on ait

$$\gamma\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^3-\beta\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^3+\frac{\lambda\mu}{2\beta\gamma}\left(\log\frac{\beta}{\gamma}\right)_{uv}=0\,.$$

Il en résulte que:

THÉORÈME 5. *La tangente t à S en x, ayant la direction donnée par $\sigma=0$, et la tangente correspondante l à Σ en x_3 sont situées dans un même plan, seulement si t est une tangente de Darboux, à condition que S soit une surface de Fubini.*

En tenant compte de (2), nous pouvons déduire de plus le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *La condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle extérieure Ω soit identiquement nulle est que la tangente t à S en x, ayant la direction donnée par $\sigma=0$, passe par le sommet du faisceau canonique de la deuxième espèce.*

Faculté des Sciences de l'Ingénieur,
Université de Kyûchû.

Référence

[1] G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931.