SUR LA POSSIBILITÉ DE PLONGER UN ESPACE À CONNEXION CONFORME DONNÉ DANS UN ESPACE CONFORME*)

PAR

AKIRA ICHINOHE

1. A la suite des beaux m'moires de MM. JANET et CARTAN sur la possibilité de plonger un espace riemannien à n dimensions donné dans un espace euclidien à $n(n+1)/2$ dimensions[1], M.S.S.CHERN a montré que l'on peut plonger un espace à connexion projective sans torsion à n dimensions donné dans un espace projectif à $n(n+1)/2+(n-1)/2$ (n: impair) ou $n(n+1)/2+n/2$ (n: pair) dimensions[2]. Il est bien connu que l'on arrivera au même résultat pour un espace à connexion affine sans torsion. Nous allons traiter ici une question quelles conditions ou quelles dimensions il est nécessaire pour plonger un espace à connexion conforme donné dans un espace conforme. Considérons pour cela deux problèmes, soit de trouver un sous-espace $\overline{V}_n$ à n dimensions dans un espace conforme à N dimensions, qui, étant induit de dehors, est à la même connexion induite que celle de l'espace V_n donné, soit de trouver $\overline{V}_n$, qui, étant attachée la connexion normale construite de l'equation intrinsèque de MONGE $g_{ij}\,du^i\,du^j=0$, est à la même connexion normale intrinsèque que celle de V_n. Nous les appelons le premier problème du plongement et le second respectivement.

Etant attaché à chaque point A de l'espace V_n à connexion conforme donné un repère mobile rectangulaire de CARTAN $[A, A_i\, A_\infty]$ $(i=1, \dots, n)$ satisfaisant aux conditions

$$A_i^2 = AA \;\; = 1, \qquad (i=1, \dots, n)$$

---

*) Received May 30, 1950.

1) M. JANET. Ann. Soc. Pol. Math., t.5, 1926, p.38-43; E.CARTAN, Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien, Ann. Soc. Pol. Math., t. 6, 1927, p. 1-7.

2) S.S. CHERN. Sur la possibilité de plonger un espace à connexion projective donné dans un espace projectif, Bull. Soc. Math. France, t. 61, 1937, p. 234-243.

$$A^2 = A_\infty^2 = AA^i = A_\infty A_i = A_i A_j = 0, \qquad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j)^{3)}$$

la connexion est donnée par le système des équations de PFAFF

$$(1) \qquad \begin{cases} dA = \omega_0^0 A + \omega^i A^i, \\ dA_i = \omega_i^0 A + \omega_i^k A_k - \omega^i A_\infty, & (i, k = 1, \dots, n) \\ dA_\infty = \omega_\infty^k A_k - \omega_0^0 A_\infty, & (\omega_k^0 + \omega_\infty^k = 0) \end{cases}$$

et les équations de structure sont

$$(2) \qquad \begin{cases} d\omega_0^0 = [\omega^k \omega_k^0] - \frac{1}{2} A_{0jk}^0 [\omega^j \omega^k], \\ d\omega i = [\omega_0^0 \omega^i] + [\omega^k \omega_k^i] - \frac{1}{2} A_{0jk}^i [\omega^j \omega^k], \\ d\omega_i^j = [\omega^i \omega_j^0] - [\omega^j \omega_i^0] + [\omega_i^k \omega_k^j] - \frac{1}{2} A_{ihk}^j [\omega^h \omega^k], \\ d\omega_i^0 = [\omega_i^0 \omega_0^0] + [\omega_i^k \omega_k^0] - \frac{1}{2} A_{ijk}^0 [\omega^j \omega^k]. \end{cases} \qquad (i, j, k, h = 1, \dots n)$$

Attachons à chaque point de l'espace conforme E_N à N dimensions un repère mobile rectangulaire de CARTAN $[\overline{A}, \overline{A}_i, \overline{A}_\alpha, \overline{A}_\infty]$ ($i = 1, \dots, n$; $\alpha = n+1, \dots, N$), de manière que $\overline{A}_i$ sont normales à l'espace tangent en un point du sous-espace $\overline{V}_n$ et $\overline{A}_\alpha$ sont tangents à lui. Si les relations entre les repères sur $\overline{V}_n$ sont

$$(3) \qquad \begin{cases} d\overline{A} = \pi_0^0 \overline{A} + \pi^i \overline{A}_i, \\ d\overline{A}_i = \pi_i^0 \overline{A} + \pi_i^k \overline{A}_k + \pi_i^\alpha \overline{A}_\alpha - \pi i \overline{A}_\infty, & (\pi_i^0 + \pi_\infty^i = 0) \\ d\overline{A}_\alpha = \pi_\alpha^0 \overline{A} + \pi_\alpha^k \overline{A}_k + \pi_\alpha^\beta \overline{A}_\beta, & (\pi_\alpha^0 + \pi_\infty^\alpha = 0) \\ d\overline{A}_\infty = \pi_\infty^i \overline{A}_i + \pi_\infty^\alpha \overline{A}_\alpha - \pi_0^0 \overline{A}_\infty, \\ \qquad (i, k = 1, \dots, n; \alpha, \beta = n+1, \dots, N), \end{cases}$$

la connexion de $\overline{V}_n$ induite de dehors est representée par (3) sans termes de A_α et les équations de structure sont

$$(4) \qquad \begin{cases} d\pi_0^0 = [\pi^k \pi_k^0], \\ d\pi^i = [\pi_0^0 \pi^i] + [\pi^k \pi_k^i], \\ d\pi_i^j = [\pi^j \pi_i^0] - [\pi^j \pi_i^0] + [\pi_i^k \pi_k^j] + [\pi_i^\alpha \pi_\alpha^j], \\ d\pi_i^0 = [\pi_i^0 \pi_0^0] + [\pi_i^k \pi_k^0] + [\pi_i^\alpha \pi_\alpha^0]. \end{cases}$$

2. Le premier problème est le suivant : peut-on choisir les repères de E_N

3) E. CARTAN, Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Pol. Math., t. 2, 1923, p. 171-221.

dédendants de $(N^2 + N + 2)/2$ paramètres de manière qu'on ait

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} \pi^\alpha = 0,\ \omega_0^0 = \pi_0^0\ \ \omega^i = \pi^i,\ \omega_i^j = \pi_i^j,\ \omega_i^0 = \pi_i^0, \\ (i, j = 1, \dots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N) \end{cases}
$$

sur $\overline{V}_n$ ou non?

Regardons $u^1, u^2, \dots, u^n$ comme les variables indépendentes dans le systeme des équations de PFAFF (I) à $n + N^2 + (N + N + {}^{\cdot})/2$ variables et cherchons les conditions d'existence de la solution générale. En différentiant extérieurment le système (I), on a

$$
\text{(II)} \qquad \begin{cases} [\omega^k \pi_k^\alpha] = 0, \\ [\pi_i^\alpha \pi_\alpha^0] + \frac{1}{2} A_{ihk}^0 [\omega^h \omega^k] = 0, \\ [\pi_i^\alpha \pi_\alpha^j] + \frac{1}{2} A_{ihk}^j [\omega^h \omega^k] = 0; \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i, j, k, h = 1, \dots, n; \\ \alpha = n+1, \dots, N \end{pmatrix}
$$

$$
\left.\begin{aligned} \Omega_0^0 &= -\frac{1}{2} A_{0jk}^0 [\omega^j \omega^k] = 0, \\ \Omega_i &= -\frac{1}{2} A_{0jk}^i [\omega^j \omega^k] = 0, \end{aligned}\right. \qquad (i, j, k = 1, \dots, n)
$$

et, de plus, en introduisant les $n+1$ dernières dans une partie des équations de conservation de la courbure

$$
(5) \qquad \begin{cases} d\Omega_0^0 + [\omega_k^0 \Omega^k] - [\omega^k \Omega_k^0] = 0, \\ d\Omega^i + [\omega^i \Omega_0^0] - [\omega_0^0 \Omega^i] + [\omega_k^i \Omega^k] - [\omega^k \Omega_k^i] = 0, \end{cases} \qquad (i, k = 1, \dots, n)
$$

on a

$$
(6) \qquad \begin{cases} A_{0jk}^0 = 0, \qquad A_{0ik}^i = 0, \\ A_{jhk}^i + A_{hkj}^i + A_{kjh}^i = 0, \\ A_{ihk}^0 + A_{hkj}^0 + A_{kjh}^0 = 0, \end{cases} \qquad (i, j, h, k = 1, \dots, n).
$$

où l'indice k dans la troisième ne signifie pas la sommation malgré sa répétition. Remarquons que, le repere mobile étant rectangulaire, le tenseur de courbure satisfait aussi aux équations suivantes:

$$
(6') \qquad A_{ikh}^j = A_{kij}^h. \qquad (i, j, k, h = 1, \cdots, n)
$$

Soit A un point dans l'espace considéré à $n + N + (N^2 + N + 2)/2$ dimensions. L'élément linéaire intégral ayant ce point pour origine est défini par la condition que ses parametres directeurs satisfassent aux équations (I), et alors déterminé par

$$\omega^i,\ \pi^0_\alpha,\ \pi^\alpha_i,\ \pi^\beta_\alpha, \qquad (i = 1, \ldots, n\,;\ \alpha,\ \beta = n+1, \ldots, N)$$

où les $(N-n)(N-n-1)/2$ derniers sont complètement arbitraires pour leur absence dans le système (II).

L'élément intégral à n dimensions ayant le point A pour origine est définit par deux systèmes des équations (I) et (II), et, de plus, spécialement par la condition qu'il soit composé de n éléments linéaires intégraux $(\varepsilon_1), \ldots, (\varepsilon_n)$, représentés par

$$(\varepsilon_i): \qquad \frac{\omega^j}{0} = \frac{\omega^i}{1} = \frac{\pi^\alpha_k}{\gamma^\alpha_{ki}} = \frac{\pi^0_\alpha}{\gamma^0_{0i}}$$

$$(j,\ k = 1, \ldots, n;\ j \neq i;\ \alpha = n+1, \ldots, N)$$

et que toutes les paires (ε_i) et (ε_j) satisfassent au système (II) (dans ce cas on les appelle paires "en involution" ou "associées"), car $\omega^1, \cdots, \omega^n$ ne dépendent que de u^i et du^i. En remplaçant les ω et π par leurs valeurs données au-dessus, on doit avoir les équations suivantes pour que (ε_i), (ε_j) soient en involution :

$$(7) \qquad \begin{cases} \gamma^\alpha_{ij} - \gamma^\alpha_{ji} = 0, \\ \gamma^\alpha_{kj}\,\gamma^0_{\alpha j} - \gamma^\alpha_{kj}\,\gamma^0_{\alpha i} + A^0_{kij} = 0, \\ \gamma^\alpha_{ki}\,\gamma^h_{\alpha j} - \gamma^\alpha_{kj}\,\gamma^h_{\alpha i} + A^h_{kij} = 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} (\gamma^k_{\alpha j} + \gamma^\alpha_{kj} = 0) \\ (k, h = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N) \end{matrix}$$

Considérons $\{\gamma^\alpha_{ij}\} = \vec{\gamma}_{ij}$ et $\{\gamma^0_{\alpha j}\} = \vec{\gamma}^0_j$ comme les vecteurs dans un espace euclidien à $N-n$ dimensions. En écrivant encore (7) d'après la notation de la multiplication scalaire, on a

$$(8) \qquad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ij} - \vec{\gamma}_{ji} = 0, & \text{(a)} \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{\gamma}^0_j - \vec{\gamma}_{kj}\,\vec{\gamma}^0_i + A^0_{kij} = 0, & \text{(b)} \\ -\vec{\gamma}_{ki}\,\vec{\gamma}_{hj} + \vec{\gamma}_{kj}\,\vec{\gamma}_{hi} + A^h_{kij} = 0. & \text{(c)} \end{cases} \qquad (i,\ j,\ k,\ h = 1, \cdots, n)$$

3. Le théorème de l'existence de CARTAN-KÄHLER du système différentiel extérieur exprime qu'étant donné un élément intégral ordinaire à n dimensions

4) E. CARTAN, Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, Ann. Ec. Norm. t. 18, 1901, p. 241-311; Les systèmes différentiells extérieurs et leurs applications géométriques (Actualités sc. ind., Exposés de Géométrie, XIV, Paris, Hermann), 1945, p. 67-75;
E. KAEHLER, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen (B.G. Teubner, Leipzig, Berlin), 1943, p. 26-32.

E_n, il existe au moins une variété intégrale analytique à n dimensions tangente à E_n, où toutes les équations du systeme de PFAFF donné sont analytiques au voisinage du point origine de E_n[4]. Le mot "*ordinaire*" signifie qu'il existe une chaîne régulière des éléments intégraux quelconques E_0, E_1, $\cdots$, E_n à zéro, un, $\cdots$, n dimensions dont le chacun est contenu dans le suivant et de la manière que pour tout E_p le nombre des équations indépendentes qui definient un élément intégral à $p+1$ dimensions contenant E_p est égal à celui pour l'élément intégral arbitraire E_p' suffisament voisin de E_p. Une variété intégral dont ce théoréme fondamental prouve son existence, au moins locale, est dite la solution générale. Cherchons le nombre N qui nous permet d'adopter ce théorème. Pour la raison précédente la généralité n'est pas perdue, si l'on considère E_p comme l'élément intégral composé de (ε_1), $\cdots$, (ε_p). Les équations pour que E_p contenant un élément intégral E_{p-1} soit intégral sont celles qui experiment que (ε_p) avec chacun de (ε_1), $\cdots$, (ε_{p-1}) est en involution, c'est-à-dire

$$(8_p)\qquad \begin{cases} \bar{\gamma}_{ip} - \bar{\gamma}_{pi} = 0, & \text{(a)} \\ \bar{\gamma}_{ki}\,\bar{\gamma}^0_p - \bar{\gamma}_{kp}\,\bar{\gamma}^0_i + A^0_{kip} = 0, & \text{(b)} \\ -\bar{\gamma}_{ki}\,\bar{\gamma}_{hp} + \bar{\gamma}_{kp}\,\bar{\gamma}_{hi} + A^h_{kip} = 0. & \text{(c)} \end{cases} \qquad (i=1,\cdots,p-1;\ k,\ h=1,\cdots,n)$$

Celui-ci est le systeme des équation linéaires pour les $(N-n)(n+1)$ variables $\bar{\gamma}^0_p$, $\bar{\gamma}_{1p}$, $\cdots$, $\bar{\gamma}_{np}$.

Pour composer une chaîne régulière à partir de E_0 nous devons chercher successivement les solutions particulières de la chaîne des équations

$$(8_2),\ (8_3),\ \cdots,\ (8_n),$$

où, pour résondre (8_p) après avoir résolu (8_2), $\cdots$, (8_{p-1}), il faut mettre de côte quelques équations dépendantes des précédentes. Dans le cas $k<p$ on peut supposer $i \leqq k$ pour $(8_p)_b$ et $(8_p)_c$. Les équation suivantes, en effet, contenues dans $(8_p)_b$ et $(8_i)_b$

$$\bar{\gamma}_{ki}\,\bar{\gamma}_{0p} - \bar{\gamma}_{kp}\,\bar{\gamma}^0_i + A^0_{kip} = 0,$$

$$\bar{\gamma}_{ik}\,\bar{\gamma}_{0p} - \bar{\gamma}_{ip}\,\bar{\gamma}^0_k + A^0_{ikp} = 0,$$

$$\bar{\gamma}_{ik}\,\bar{\gamma}_{0p} - \bar{\gamma}_{pi}\,\bar{\gamma}^0_k + A^0_{pki} = 0,$$

sont linéairement dépendantes entre eux d'après les équations (6) et les suivantes contenues dans $(8_p)_a$ et $(8_i)_a$ ou $(8_k)_a$

$$\bar{\gamma}_{pi} - \bar{\gamma}_{ip} = 0, \qquad \bar{\gamma}_{pk} - \bar{\gamma}_{pk} = 0, \qquad \bar{\gamma}_{ik} - \bar{\gamma}_{jk} = 0.$$

Il en est ainsi de $(8_p)_c$. On peut supposer tout de suite $k < h$, et de plus $h \geqq p$ aussi, car dans le cas $h < p$ les équations $(8_p)_c$ sont identiques aux

$$(8_h)_c \qquad - \vec{\gamma}_{ik}\vec{\gamma}_{ph} + \vec{\gamma}_{ih}\vec{\gamma}_{pk} + A^p_{ikh} = 0$$

d'après (6′) et les suivantes contenues dans $(8_p)_a$, $(8_i)_a$, ou $(8_h)_a$ et $(8_k)_a$

$$\vec{\gamma}_{kp} - \vec{\gamma}_{pk} = 0, \qquad \vec{\gamma}_{hi} - \vec{\gamma}_{hi} = 0, \qquad \vec{\gamma}_{ki} - \vec{\gamma}_{ik} = 0.$$

On a alors au lieu de (8_p) les équations

$$(8_p') \qquad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ip} - \vec{\gamma}_{pi} = 0, & \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{\gamma}^0_p - \vec{\gamma}_{kp}\vec{\gamma}^0_i + A^0_{kip} = 0, & (i=1,\cdots,p-1;\ i\leqq k<h;\ h=p,\cdots,n) \\ - \vec{\gamma}_{ki}\vec{\gamma}_{hp} + \vec{\gamma}_{kp}\vec{\gamma}_{hi} + A^h_{kip} = 0. & \end{cases}$$

Nous allons ensuite examiner l'indépendance du système des équations $(8_p')$ avec le nombre N convenablement choisi. Dans $(8_p')$ les $p-1$ $\vec{\gamma}_{ip}$ $(i=1, \cdots, p-1)$ sont tout de suite déterminés et les premiers membres de $(8_p')$ ont le type suivant aux variables restantes $\vec{\gamma}_{hp}$, $\vec{\gamma}^0_p$:

$$(9_p) \qquad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}^0, & \\ & (i\leqq k=1, \cdots, p-1;\ h=p, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}_h; & \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}^0 - \vec{\gamma}^0_i\vec{x}_k, & \\ & (i=1, \cdots, p-1;\ k<h=p, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hi}\vec{x}_k. & \end{cases}$$

Nous appelons le système (9_p) sans les termes de $\vec{x}_p$ le système $(9_p')$ et comparaissons deux systèmes $(9_p')$ et (9_{p+1}):

$$(9_{p+1}) \qquad \begin{cases} (9_p') \begin{cases} \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}^0, & (i=1,\cdots,p-1;\ i\leqq k;\ k=1,\cdots,p;\ h=p+1,\cdots,n) \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}_h; & \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}^0 - \vec{\gamma}^0_i\vec{x}_k, & (i=1,\cdots,p-1;\ k<h=p+1,\cdots,n) \\ \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hi}\vec{x}_k; & \end{cases} \\ \vec{\gamma}_{pp}\vec{x}^0, & \\ & (h=p+1, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{pp}\vec{x}_h; & \\ \vec{\gamma}_{pk}\vec{x}^0 - \vec{\gamma}^0_p\vec{x}_k, & \\ & (k<h=p+1, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{kp}\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hp}\vec{x}_k. & \end{cases}$$

Cette relation est écrite de la manière suivante: $(9_{p+1}) \supset (9_p')$. Appelons le systeme $(9_p')$ enlevé les termes de $\vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_{p+s}$, le système $(9_p^{(s+1)})$, alors nous avons la relation $(9_{p+1}^{(s)}) \supset (9_p^{(s+1)})$, d'où il établit les relations:

$$(9_n) \supset (9_{n-1}) \supset \cdots \supset (9_2^{(n-2)}).$$

L'indépendance du système (9_n) conduit l'indépendance du système $(9'_{n-1})$ et encore celle du système $(9_{n-2}^{(2)})$, etc., celle du système $(9_2^{(n-2)})$; ensuite l'indépendance du système $(9_p^{(n-p)})$ conduit celle du système (9_p). Pour le démontrer il suffit de s'assurer que l'indépendance du système $(9_p^{(s+1)})$ conduit celle du système $(9_p^{(s)})$ en comparissant ces deux systèmes:

$$(9_p^{s+1}) \quad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}^0; & \\ & (i=1,\cdots,p-1);\ i\leqq k;\ k=1,\cdots,p+s;\ h=p+s+1,\cdots,n) \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_h; & \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}^0 - \vec{\gamma}_i^0\,\vec{x}_k, & \\ & (i=1,\cdots,p-1;\ k<h;\ k,\ h=p+s+1,\cdots,n); \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hi}\,\vec{x}_k; & \end{cases}$$

$$(\ {}^s_p) \quad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}^0, & \\ \vec{\gamma}_{p+s_i}\,\vec{x}^o - \vec{\gamma}_i^0\,\vec{x}_{p+s}, & \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_h, & (i=1,\cdots,p-1;\ i\leqq k;\ k=1,\cdots,p+s-1; \\ & \qquad h=p+s+1,\cdots,n); \\ \vec{\gamma}_{p+s_i}\,\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hi}\vec{x}_{p+s}, & \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_{p+s}; & \\ & \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}^0 - \vec{\gamma}_i^0\,\vec{x}_k, & \\ & (i=1,\cdots,p-1;\ k<h;\ k,\ h=p+s+l,\cdots,n). \\ \vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_h - \vec{\gamma}_{hi}\,\vec{x}_k. & \end{cases}$$

Dans $(9_p^{(s)})$ la variable $\vec{x}_{p+s}$ se présente isolément à un groupe

$$\vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}_{p+s}, \qquad (i=1,\ \cdots,\ p-1;\ i<k;\ k=1,\ \cdots,\ p+s-1)$$

qui est composé des membres indépendants; cette indépedance est conduite de celle des membres $\vec{\gamma}_{ki}\,\vec{x}^o$, par example, dans $(9_p^{(s+1)})$. Quant à l'indépendance des autres membres dans $(9_p^{(s)})$, elle devient claire immédiatement de celle du système $(9_p^{(s+1)})$. On a alors un résultat que l'indépendance du système (9_n) conduit celle du système (9_{n-1}) et encore celle du système (9_{n-2}), etc., celle du système (9_2).

En calculant les nombres des variables $v(p)$ et des membres $e(p)$ dans (9_p), on a

$$\begin{aligned} v(p) &= (N-n)\,(n-p+2), \\ e(p) &= (n-p+2)\,p\,(p-1)/2 + \{(n-p+1)+(n-p+1)(n-p)/2\}\,(p-1) \\ &= (p-1)\,(n+1)\,(n-p+2)/2, \\ v(n) - e(n) &= 2N - (n^2+2n-1). \end{aligned}$$

Dans le cas le plus général on doit choisir le nombre N de la manière suivante:

$$N = \frac{1}{2}\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}\,(n - \ ) + \begin{cases} 0, & (n\text{: impair}) \\ \frac{1}{2} & (n\text{: pair}), \end{cases} \tag{10}$$

pour soutenir l'indépendance du systeme (9_n).

Apres avoir déterminé ainsi le nombre N montrons l'existence d'une chaîne réguliere des éléments intégraux. Nous adoptons d'abord $n+1$ vecteurs quelconques $\vec{\gamma}_1^0$, $\vec{\gamma}_{k1}$ $(k=1, \cdots, n)$ qui assurent l'indépendance du système $(9_2^{(n-2)})$ et par conséquent celle de (9_2); $\vec{\gamma}_1^0$, $\vec{\gamma}_{k1}$ étant fixés, nous adoptons ensuite, en résolvant $(8_2')$, n vecteur $\vec{\gamma}_2^0$, $\vec{\gamma}_{k2}(k=2, \cdots, n)$ qui assurent l'indépendance des membres du systeme $(9_3^{(n-3)})$ ou (9_3); si, en déterminant ainsi les vecteurs $\vec{\gamma}_1^0$, $\vec{\gamma}_{k1}$, $\vec{\gamma}_2$, $\vec{\gamma}_{k2}$, $\cdots$ successivement, nous arrivions jusqu'aux vecteurs $\vec{\gamma}_n^0$, $\vec{\gamma}_{nn}$, nous obtiendriont une chaîne réguliere. Si, au contraire, les membres du systeme $(9_p^{(n-p)})$ ou (9_p) n'étaient points indépendants pour n'importe quelle chaîne des vecteurs $\vec{\gamma}_1^0$, $\vec{\gamma}_{11}$, $\vec{\gamma}_{21}$, $\cdots$, $\vec{\gamma}_{n1}$; $\vec{\gamma}_2^0$, $\vec{\gamma}_{22}$; $\cdots$, $\vec{\gamma}_{n2}$; $\cdots$, $\vec{\gamma}_{np-1}$, nous pourrions enlever quelques équations dans le systeme $(8_p')$, et il en est ainsi d'ailleurs pour le systeme $(8_n')$; par conséquent, nous pouvons choisir le nombre N plus petit que précédent et pouvons, de plus, montrer l'existence d'une chaîne réguliere des éléments intégraux aussi. Quant à cette circonstance nous ne faisons ici aucune démonstration[5]. Enfin nous pouvons affirmer la solution générale du système (I).

La conclusion pour le premier problème du plongement est la suivante:

Pour qu'un espace à connexion conforme donné à n dimensions soit regardé comme un sous-espace plongé dans un espace conforme à N dimensions, et à connexion conforme induite de dehors, il est nécessaire que le tenseur de torsion soit nul; dans ce cas, le plongement considéré serait réalisé, si le nombre N était au moins

$$\frac{1}{2}\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}\,n \qquad (n\text{: pair})$$

5) E. CARTAN, ibid. (4) le 2$^{\text{ème}}$, p. 69-72.

ou $$\frac{1}{2}\, n\,(n+1) + \frac{1}{2}\,(n-1) \qquad (n\text{: } impair).$$

4. Passons au second problème. La connexion donnée est normale et le tenseur de courbure satisfait donc aux relations

$$\Omega_0^0 = 0, \qquad \Omega^i = 0, \qquad A^k_{ijk} = 0, \qquad (i,\, j,\, k = 1, \cdots, n)^{6)} \tag{11}$$

d'où on a

$$\begin{cases} A^0_{0jk} = 0; \quad A^i_{0jk} = 0, \quad A^i_{khi} - A^i_{hki} = 0, \\ A^i_{jkh} + A^i_{khj} + A^i_{hjk} = 0, \end{cases} \qquad (i,\, j,\, k,\, h = 1, \cdots, n) \tag{12}$$

où l'indice k dans la troisième ne signifie pas la sommation malgré sa répétition. Attachons à chaque point de l'espace conforme E_N à N dimensions un repère mobile rectangulaire de CARTAN $[\vec{A}, \vec{A}_i, \vec{A}_\alpha, \vec{A}_x]$ $(i = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N$, de la même manière que la précédente. Puisque la connexion normale intrinsèque est celle qui a mêmes π^0_0, π^i, π^j_i $(i, j = 1, \cdots, n)$ et satisfait aux conditions (II), le second problème est le suivant: peut-on choisir les repères de E_N dépendants de $(N^2 + N + 2)/2$ paramètres de la manière qu'il satisfasse à la relation

$$\pi^\alpha = 0, \quad \omega^0_0 = \pi^0_0, \quad \omega^i = \pi^i, \quad \omega^j_i = \pi^j_i, \qquad (i, j = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N) \tag{III}$$

sur $\bar{V}_n$ ou non?

Regardons $u^1, u^2, \cdots, u^n$ comme variables indépendantes et cherchons les conditions d'existence de la solution générale. En différentiant extérieurement le système (III), on a

$$\begin{cases} [\omega^k (\omega^0_k - \pi^0_k)] = 0, \\ [\omega^k \pi^\alpha_k] = 0, \\ [\omega i\, (\omega^0_j - \pi^0_j)] - [\omega\ (\omega^0_i - \pi^0_i)] - [\pi^\alpha_i \pi^j_\alpha] - \frac{1}{2} A^j_{ihk}] [\omega^h \omega^k] = 0; \\ \qquad (i, j, k, h = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N). \end{cases} \tag{IV}$$

En un point dans l'espace à $n + N + (N^2 + N + 2)/2$ dimensions les paramètres directeurs de l'élément intégral sont déterminés par

$$\omega^i, \ \pi^0_i, \ \pi^\alpha_i, \ \pi^0_\alpha, \ \pi^\beta_\alpha, \qquad (i = 1, \cdots, n;\ \alpha, \beta = n+1, \cdots, N),$$

6) E. CARTAN, ibid. (3), p.191-195.

où les $(N-n)(N-n+1)/2$ derniers sont complètement arbitraires pour leur absence dans le système (IV). Sans perdre la généralité on peut considérer E_n, un élément intégral, composé de n éléments linéaires intégraux

$$(\varepsilon_i) \qquad \frac{\omega^j}{0} = \frac{\omega}{1} = \frac{\pi_k^0}{\gamma_{ki}^0} = \frac{\pi_k^\alpha}{\gamma_{ki}^\alpha} \qquad (i, j, k = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N),$$

et E_p, qui est util pour s'assurer l'existence de la solution générale de (III), composé de $(\varepsilon_1), \cdots, (\varepsilon_p)$. En introduisant Γ_{ik}^0, définis par

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}^0\, \omega^k \qquad (i, j, k = 1, \cdots, n),$$

on peut écrire ci-dessous le systeme des équations qui indique que E_{p-1} étant intégral, E_p l'est aussi:

$$(13_p) \qquad \begin{cases} (\Gamma_{pi}^0 - \gamma_{pi}^0) - \Gamma_{ip}^0 - \gamma_{ip}^0) = 0, \\ \gamma_{pi}^\alpha - \gamma_{ip}^\alpha = 0, \\ -\delta_p^j(\Gamma_{ki}^0 - \gamma_{ki}^0) + \delta_i^j(\Gamma_{kp}^0 - \gamma_{kp}^0) + \delta_p^k(\Gamma_{ji}^0 - \gamma_{ji}^0) \\ \qquad - \delta_i^k(\Gamma_{jp}^0 - \gamma_{ip}^0) + \gamma_{jp}^\alpha \gamma_{\alpha i}^k - \gamma_{kp}^\alpha \gamma_{\alpha i}^j - A_{jip}^k = 0; \\ \qquad (j, k = 1, \cdots, n;\ \alpha = n+1, \cdots, N;\ i = 1, \cdots, p-1), \end{cases}$$

ou δ_j^i sont deltas de KRONECKER.

En posant

$$\{\Gamma_{jk}^0 - \gamma_{jk}^0\} = \vec{\gamma}_k^j,\ \{\gamma_{jk}^\alpha\} = \vec{\gamma}_{jk}$$

et en employant la notation de la multiplication scalaire, on peut écrire ce système brièvement de la manière suivante:

$$(14_p) \qquad \begin{cases} \vec{\gamma}_{ip} - \vec{\gamma}_{pi} = 0, & \text{(a)} \\ \vec{\gamma}_{ip} - \vec{\gamma}_{pi} = 0, & \text{(b)} \\ \delta_i^j\, \vec{\gamma}_{kp} - \delta_i^k\, \vec{\gamma}_{jp} - \delta_p^j\, \vec{\gamma}_{ki} + \delta_p^k\, \vec{\gamma}_{ji} + \vec{\gamma}_{ji}\, \vec{\gamma}_{kp} - \vec{\gamma}_{ki}\, \vec{\gamma}_{jp} - A_{jip}^k = 0. & \text{(c)} \end{cases}$$

Pour composer une chaîne régulière des éléments intégraux réguliers nous devons trouver successivement les solutions particulières des système des équations

$$(14_2),\ (14_3),\ \cdots,\ (14_n)$$

où les membres quelconques dépendants de ceux dans les systèmes précédents doivent être enlevés. En exécutant cette enlèvement d'après la même méthode que celle de n° 3, on peut remplacer (14_p) par

$$(14'_p)\quad \begin{cases} \overline{\gamma}_{ip} - \overline{\gamma}_{pi} = 0, \\ \vec{\gamma}_{ip} - \vec{\gamma}_{pi} = 0, \\ \delta^j_i \overline{\gamma}_{kp} + \vec{\gamma}_{ji}\vec{\gamma}_{kp} - \vec{\gamma}_{ki}\vec{\gamma}_{jp} + \delta^k_p \vec{\gamma}_{ji} - \delta^j_p \vec{\gamma}_{ki} - A^k_{jip} = 0; \\ \qquad (i = 1, \cdots, p-1;\ i \leqq j < k;\ k = p, \cdots n). \end{cases}$$

Examinons l'indépendance du système $(14_p')$. Dans $(14_p')$ $2(p-1)$ $\overline{\gamma}_{ip}$, $\vec{\gamma}_{ip}$ $(i = 1, \cdots, p-1)$ sont tout de suite déterminés et les premiers membres de $(14_p')$ ont le type suivant aux variables restantes $\overline{\gamma}_{kp}$, $\vec{\gamma}_{kp}$:

$$(15_p)\quad \begin{cases} \delta^j_i \vec{x}_k + \vec{\gamma}_{ji}\vec{x}_k = 0, & (i \leqq j = 1, \cdots, p-1;\ k = p, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{ji}\vec{x}_k - \vec{\gamma}_{ki}\vec{x}_j = 0. & (i = 1, \cdots, p-1;\ j < k;\ j,\ k = p, \cdots, n) \end{cases}$$

Nous appelons le système (15_p) sans termes de x_p, $\vec{x}_p$ le système $(15_p')$ et comparaisons deux systèmes :

$$(15_{p+1})\quad \begin{cases} (15_p')\begin{cases} \delta^j_i x_k + \vec{\gamma}_{ji}\vec{x}_k, & (i \leqq j = 1, \cdots, p-1;\ k = p+1; \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{pi}\vec{x}_k, & (i = 1, \cdots, p-1;\ k = p+1, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{ji}\vec{x}_k - \vec{\gamma}_{ki}\vec{\gamma}_j, & (i = 1, \cdots, p-1;\ j < k;\ j, k = p+1, \cdots, n) \end{cases} \\ x_k + \vec{\gamma}_{pp}\vec{x}_k, \qquad (k = p+1, \cdots, n) \\ \vec{\gamma}_{jp}\vec{x}_k - \vec{\gamma}_{kp}\vec{x}_j. \qquad (j < k;\ j,\ k = p+1, \cdots, n) \end{cases}$$

Considérons les deux systemes, sans termes de $x_{p+1}, \cdots, x_{p+s}$; $\vec{x}_{p+1}, \cdots, \vec{x}_{p+s}$, lesquels nous appelons $(15^{(s)}_{p+1})$ et $(15^{(s+1)}_p)$. D'après la notation de n° 3

$$(15_n) \supset (15'_{n-1}) \supset \cdots \supset (15^{(n-2)}_2).$$

Dans ce cas on a, d'après la méthode analogue à celle de n° 3, le résultat, que l'indépendance du système (15_n) conduit celle du système (15_{n-1}), etc., celle du système (15_2).

En calculant les nombres des variables $v'(p)$ et des membres $e'(p)$ dans (15_p), on a

$$\begin{aligned} v'(p) &= (N - n + 1)(n - p + 1), \\ e'(p) &= (n - n + 1)p(p-1)/2 + (p-1)(n - p + 1)(n - p)/2 \\ &= (n - p + 1)n(p-1)/2; \end{aligned}$$

$$v'(n) - e'(n) = \{2N - (n^2 + n - 2)\}/2.$$

Dans le cas le plus général on doit choisir le nombre N de la manière suivante :

$$N = \frac{1}{2} n(n+1) - 1, \tag{16}$$

pour soutenir l'indépendance du systeme (15_n).

D'aprés le même raisonnement que le précédent on s'assure l'existence de la solution générale du système (III).

La conclusion pour le second problème du plongement est donc la suivante :

Un espace à connexion conforme normale arbitrairement donné à n dimensions est susceptible d'un sous-espace plongé dans un espace conforme à N dimensions convenablement grandes et à connexion normale intrinsèque; et le plongement considéré serait réalisé, si le nombre N était au moins

$$\frac{1}{2} n(n+1) - 1.$$

La méthode précédente permet de résoudre le probleme du plongement pour chaque espace particulier avec un calcul fidele, et on pourra choisir le nombre N plus petit que celui de (10) ou de (16) soit à cause du raisonnement exposé en fin du n° 3, soit à cause de l'existence d'une solution singulière du systeme des équations de Pfaff, considérédée au début; mais la vérification un à un est tres difficile.

La Succursale de Hamamatsu de L'université de shizuoka