SUR LES ESPACES À CONNEXION PROJECTIVE DONT LE GROUPE D'HOLONOMIE FIXE UNE QUADRIQUE

G. VRĂNCEANU

(Received May 6, 1952)

Dans un travail recent[1] M. M. Sasaki et Yano ont montré qu'un espace P_n à connexion projective normale, dont le groupe d'holonomie fixe une quadrique dans chaque espace local d'un point P, est projectif à un espace E_n d'Einstein à courbure scalaire constante.

Je veux donner de ce fait une démonstration très simple à l'aide de congruences orthogonales, qu'on peut associer au problème. De même, je considère les conditions pour qu'un espace soit conforme à un espace d'Einstein et je montre que dans le cas où la quadrique passe par P, on peut associer à l'espace une hypersurface non holonome V_n^{n-1} conforme et un espace C_{n-1} a connexion conforme et je retrouve les résultats de M. Sasaki, relatifs aux connexions conformes normales qui conservent une hypersphère.

Etant donné un espace $P_n(x^1, \cdots, x^n)$, on peut lui associer un espace $A_{n+1}(x^1, \cdots, x^n, x^0)$ à connexion affine. Dans l'espace A_{n+1} on peut considérer un système de $n+1$ congruences, ayant comme différentielles des arcs

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad ds^0 = dx^0 + \lambda_i^0 dx^i \tag{1}$$

où λ_i^a, λ_i^0 sont des fonctions des coordonnées $x^1, \cdots, x^n$ de l'espace P_n. Etant donné un point $P(x^1, \cdots, x^n)$ de P_n, on peut considérer les ds^a, ds^0 comme un système de coordonnées cartésiennes homogènes dans l'espace local du point P, ce point étant l'origine du système. Ces coordonnées sont evidemment déterminées par une transformation de la forme

$$\begin{aligned} d\bar{s}^a &= e_b^a\, ds^b \\ d\bar{s}^0 &= e_0^0\, ds^0 + e_a^0\, ds^a \end{aligned} \tag{2}$$

où e_b^a, e_0^0, e_a^0 sont des fonctions des $x^1, \cdots, x^n$.

En désignant par γ_{bc}^a, γ_{bc}^0 les composantes de la connexion projective de P_n par rapport aux $n+1$ congruences (λ^a), (λ^0), les composantes $\gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \cdots, n)$ de la connexion affine de l'espace associé A_{n+1} sont alors données par les formules

$$\gamma_{bc}^{*a} = \gamma_{bc}^a, \quad \gamma_{bc}^{*0} = \gamma_{bc}^0, \quad \gamma_{0\gamma}^{*\alpha} = \gamma_{\gamma 0}^{*\alpha} = -\delta_\gamma^\alpha. \tag{3}$$

Considérons maintenant dans l'espace local du point P une quadrique

1) On the structure of spaces with normal projective connexions, whose groups of holonomy fix a hyperquadric or a quadric of $n-2$ dimensions. Tôhoku Math. Journ., II Ser. 1(1949), 31-39.

(4) $$A_{bc}ds^b ds^c + 2A_{0c}ds^0 ds^c + A_{00}(ds^0)^2 = 0$$

et supposons que cette quadrique ne passe pas par P, donc que $A_{00} \neq 0$. Supposons encore que la quadrique n'est pas dégénérée et qu'elle représente soit une ellipsoïde réelle soit une ellipsoïde imaginaire. En ce cas par une transformation (2) on peut réduire l'équation (4) a la forme canonique

(5) $$(ds^1)^2 + \cdots + (ds^n)^2 + \varepsilon(ds^0)^2 = 0$$

où ε est égal à -1 ou à 1. Le groupe (2) qui conserve cette forme canonique est une groupe orthogonale conforme dans les ds^α et $-e^0_\alpha$ sont nulles. Il en résulte alors que

(6) $$ds^2 = (ds^1)^2 + \cdots + (ds^n)^2$$

est la métrique d'un espace de Riemann V_n conforme associé à l'espace P_n. Ecrivons maintenant que la quadrique (5) est consérvée par un déplacement parallèle dans l'espace A_{n+1}. Cela signifie qu'on doit avoir

(7) $$ds^\alpha \delta ds^a + \varepsilon ds^0 \delta s^0 = (a_b \delta s^b + a_0 \delta s^0)[(ds)^2 + \varepsilon(ds^0) + \varepsilon(ds^0)^2]$$

pour des valeurs convenables des a_b, a_0. Comme par un transport parallèle δ de la connexion (3) nous avons

(8) $$\begin{aligned} \delta ds^a &= \gamma^\alpha_{bc}\, ds^b \delta s^c - ds^0\, \delta s^a - ds^a \delta s^0 \\ \delta\, ds^0 &= \gamma^0_{bc}\, ds^b \delta s^c - ds^0 \delta s^0, \end{aligned}$$

en introduisant ces formules dans (7), nous obtenons les conditions

(9) $$\gamma^a_{bc} + \gamma^b_{ac} = \delta^\alpha_b a_c, \quad a_0 = -1, \quad \gamma^0_{bc} = \varepsilon \delta^b_c.$$

Les premières nous disent que γ^α_{bc} sont les composantes d'une connexion conforme de Weyl de la métrique (6).

Pour interpreter les dernières, supposons que la connexion soit normale. Dans ce cas nous avons[2)]

(10) $$\gamma^0_{bc} = \frac{\gamma_{bc}}{n-1}$$

où γ_{bc} est le tenseur contracte du tenseur de courbure de l'espace V_n

$$\gamma_{bc} = \gamma^\alpha_{b\alpha c}$$

et où γ^α_{bcd} sont les coefficients de Ricci à quatre indices. Les dernières (9) et (10) nous disent donc que nous avons

(11) $$\gamma_{bc} = \varepsilon(n-1)\delta^b_c.$$

Autrement dit, l'espace V_n est un espace E_n d'Einstein à courbure scalaire $\varepsilon(n-1)$. Q. E. D.

M. M. Sasaki et Yano montrent aussi qu'inversément étant donné un espace à courbure scalaire constante R, il est conforme à un espace E_n à courbure scalaire $\pm(n-1)$, donc le groupe d'holonomie de l'espace P_n fixe une quadrique (5).

2) G. VRĂNCEANU, Leçons de géométrie différentielle, Bucarest, 1947, p. 411.

On peut se demander dans quelles conditions un espace E_n à courbure scalaire $\pm(n-1)$ est conformement euclidien.

En calculant les composantes W^a_{bcd} du tenseur de courbure conforme de Weyl, sur les n congruences (λ^a), on obtient les formules

$$W^a_{bcd} = \gamma^a_{bcd} \mp (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_b \delta^b_c) \tag{12}$$

ce que nous dit que l'espace E_n est conformément euclidien seulement s'il est à courbure constante.

On peut se demander aussi quelles sont les conditions pour qu'un espace V_n à métrique

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j \tag{13}$$

soit conforme à un espace E_n. Si l'on s'arrange de façon que E_n soit à courbure scalaire $\varepsilon(n-1)$ et que la métrique de E_n soit

$$d\bar{s}^2 = e^{-2\psi} a_{ij} dx^i dx^j \tag{14}$$

la fonction ψ doit satisfaire aux equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^l} - \begin{vmatrix} r \\ jl \end{vmatrix} \psi_r + \psi_j \psi_l - \frac{1}{2} a^{rs} \psi_r \psi_s a_{jl} \\ = e^{-2\psi} \frac{a_{jl}}{2} - \frac{R_{jl}}{n-2} + \frac{a_{jl} R}{2(n-1)(n-2)} \end{aligned} \qquad \left(\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) \tag{15}$$

où $\begin{vmatrix} r \\ jl \end{vmatrix}$ sont les symbols de Christoffel de la seconde espèce et où R_{jl} et R sont les contractions du tenseur de courbure. Les conditions d'intégrabilité de ces équatrons nous donnent

$$W^i_{jlk} \psi_i - \frac{3}{2} \varepsilon e^{-2\psi} (a_{jl} \psi_k - a_{jk} \psi_l) = V_{jkl} \tag{16}$$

où W^i_{jlk} sont les composantes du tenseur conforme de Weyl et le tenseur V_{jkl} est défini par les formules

$$V_{jkl} = \frac{R_{jk,l} - R_{jl,k}}{n-2} - \frac{a_{jk} \dfrac{\partial R}{\partial x^l} - a_{jl} \dfrac{\partial R}{\partial x^k}}{2(n-1)(n-2)}$$

où $R_{jk,l}$ sont les dérivées covariantes de R_{jl} a l'aide de la métrique a_{jl}. Les formules (16) sont une généralisation des formules de Schouten qui conduisent aux conditions pour qu'un espace V_n soit conformément euclidien. On soit aussi que pour $n > 3$ le tenseur V_{ikl} s'exprime à l'aide du tenseur $W^i_{jkl,i}$, contraction du tenseur dèrivè du tenseur de Weyl.

Il en résulte donc que l'espace V_n est conforme à un espace E_n, si les (15) et (16) possèdent une solution et inversement.

Supposons maintenant que la quadrique (4) tout en etant non dégénérée, elle passe par l'origine. On peut alors écrire cette quadrique sous la forme canonique

$$(ds^1)^2 + (ds^2)^2 + \cdots + (ds^{n-1})^2 - 2ds^0 ds^n = 0. \tag{17}$$

Les transformations (2) qui conservent cette forme canonique s'écrivent

$$(18)\qquad \begin{aligned} d\bar{s}^h &= c^h_k ds^k + c^h_n ds^n \\ d\bar{s}^n &= c^n_n ds^n \\ d\bar{s}^0 &= c^0_0 ds^0 + c^0_h ds^h + c^0_n ds^n \end{aligned}$$

où les c satisfont aux conditions

$$(18')\qquad \begin{aligned} c^h_k\, c^h_l &= \delta^k_l c^0_0 c^n_n \\ c^h_k\, c^h_n &= c^0_k c^n_n \\ c^h_n\, c^h_n &= 2c^0_n c^n_n \end{aligned} \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots . n-1).$$

Le groupe (18) laisse donc invariante l'équation

$$(19)\qquad ds^n = 0$$

qui est en général une équation de Pfaff non complètement intégrable et l'on voir ainsi que la quadrique (17) associe au problème une hypersurface non holonome V^{n-1}_n conforme. On vérifie facilement qu'un transport parallèle (8), ne peut pas conserver la quadrique (17), que si ce transport est tangent é la hypersurface ($\delta s^n = 0$) et satiisfait aux conditions

$$(19')\qquad \begin{aligned} &\gamma^h_{kl} + \gamma^k_{hl} = \delta^h_k \gamma^n_{nl}, \quad \gamma^h_{nl} = \gamma^0_{hl} = 0, \\ &\gamma^0_{nl} = 0, \quad \gamma^n_{kl} = -\delta^k_l. \end{aligned}$$

Les dernères conditions nous disent que les composantes t^n_{kl} du tenseur de torsion sont données par les formules

$$t^n_{kl} = \gamma^n_{kl} - \gamma^n_{lk} - W^n_{kl} = -W^n_{kl}$$

où W^n_{kl} sont les coefficients du covasiant bilinéaire de l'équation (19). Donc si la connexion est sans torsion l'equation (19) est complètement intégrable, donc V^{n-1}_n est holonome.

En tout cas on peut interpréter les $ds^1, \ldots, ds^n, ds^0$, comme les coordonnées d'une hypersphère[3])

$$(20)\qquad ds^0[(\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^{n-1})^2] - 2ds^1\xi^1 - \cdots - 2\, ds^{n-1}\xi^{n-1} + 2ds^n = 0$$

dans l'espace conforme $C_{n-1}(\xi^1. \cdots \xi^{n-1})$. Dans cette intérprétation, la quadrique (17) exprime le fait que l'hypersphère (20) est de rayon nul. Donc les transformations (18) qui conservent la quadrique (17), sont les transformations du groupe conforme de l'espace C_{n-1}, qui conservent les hypersphères passant par le point P. Les conditions (18) expriment donc le fait que la connexion conserve les hypersphères de rayon nul, donc elle est une connexion conforme de l'espace C_{n-1}.

Nous avons donc le théorème:

Une quadrique (17) *associe à l'espace à connexion projective P_n un espace à connexion conforme C_{n-1} est inversement.*

On sait que la connexion conforme (19) est normale, si nous avons

3) G. VRĂNCEANU, Sur la théorie des espaces à connexion conforme, Bull. Math., 45 (1943), p. 5.

$$\varepsilon\gamma^n_{hk} = -\frac{\gamma_{hk}}{n-2} + \frac{\delta^h_k\,\gamma}{2(n-1)(n-2)} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{20}$$

où γ_{hk} et γ sont les contractions du tenseur de courbure γ^l_{hrk} de la métrique

$$(ds^1)^2 + \cdots + (ds^{n-1})^2 \tag{21}$$

les γ^l_{hrk} étant les coefficients de Ricci à quatre indices relatifs aux $n-1$ congrauences orthogonales (λ^h).

Ce la dit, considerons dans l'espace P_n un vecteur

$$v^0, v^1, \ldots, v^n$$

qui n'est pas tangent à la hypersurface non holonome V^{n-1}_n donc $v^n \neq 0$. On peut toujours par une transformation (18) supposer que nous avons pour ce vecteur $v^h = 0$. En ce cas par un transport parallèle δ, les variations δv^h sont données par les formules

$$\delta v^h = \gamma^h_{nl}\, v^n \delta s^l - v^0 \delta s^h$$

et ces variations sont elles aussi nulles seulement si nous avons

$$\gamma^h_{nl} = k\delta^h_l, \qquad v^0 = kv^n. \tag{22}$$

Or se donner un vecteur dans P_n, revient à se donner un hypersphère dans C_{n-1} et dans le cas où le vecteur est donné par les formules

$$v^h = 0, v^0 = kv^n$$

l'hypersphère (20) a le centre à l'origine

$$v^0[(\xi^1)^2 + \cdots + (\xi^{n-1})^2] + 2v^n = 0 \tag{23}$$

et le rayon est donné par la formule

$$R^2 = -\frac{2v^n}{v^0} = -\frac{2}{k},$$

si $k \neq 0$. Si k est egal à zéro, l'hypersphère coïncide avec le point de Möbius. Donc si k est un constante différente de zéro, la connexion conforme normale qui satisfait aux premières formules (22), associe à chaque point P un hypersphère de rayon constant, cette hypersphère étant invariante à un déplacement paralléle. Comme nous avons en vertu des (20)

$$\frac{\gamma_{hk}}{n-2} - \frac{\delta^h_k\,\gamma}{2(n-1)(n-2)} = \frac{\varepsilon}{2R^2}\,\delta^h_k$$

il en résulte les formules

$$\gamma = \varepsilon\frac{n(n-1)}{R^2}, \qquad \gamma_{hk} = \varepsilon\frac{n-1}{R^2}\delta^h_k$$

donc l'espace de Riemann (21) est conforme à un espace E_n d'Einstein. On voit que si l'hypersphère est réelle, donc si $R^2 > 0$, cet espace est à courbure scalaire positive ou négative, suivant que ε est égal à 1 ou à -1. Le signe de la courbure change si R est purement imaginaire, tandisque si $k = 0$, donc si l'hypersphère est le point de Möbius, la courbure scalaire de l'espace est nulle. On retrouve ainsi des résultats obtenus par M. Sasaki[4]. On peut encore observer qu'étant donné une hypersphère de coordonnées v^0, v^h, v^n, qui ne passe pas par l'origine $v^n \neq 0$, on peut par une transformation du groupe conforme (18) supposer que l'hypersphère passe par l'origine $v^h = 0$. Les transformations (18) qui conservent cette situation doivent alors avoir les coefficients e_n^h nuls et la métrique (21) est un invariant conforme, du problème, donc se donner une hypersphère dans C_{n-1} ne passant pas par l'origine, revient à se donner une normale à l'hypersurface V_n^{n-1} et inversement.

L'UNIVERSITÉ DE BUCARESTI.

4) S, SASAKI, On the spaces with normal conformal connexions whose groups of holonomy fix a point or a hypersphere I, II, III, Japanese Journal of Math., 34(1942), p. 614, 623, 35(1943), p. 791.