Tôhoku Math. Journ.
20(1968), 384-393.

SUR QUELQUES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE NUL DANS $|z|<\infty$[1]

NOBUSHIGE TODA

(Received April 24, 1968)

1. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul dans $|z|<\infty$, alors elle a au plus une valeur déficiente. On conjecture qu'elle est valeur asymptotique en ∞ (Voir [1]). Quand $T(r,f)=O((\log r)^2)$, par Valiron [5] et Anderson-Clunie [1], la valeur déficiente possible de $f(z)$ est valeur asymptotique en ∞. D'autre part, Gol'dberg [4] a donné un exemple d'une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$ d'ordre plus grand que 1 tel qu'une valeur déficiente α n'est pas valeur asymptotique même si $\delta(\alpha)=1$ et Arakeljan [2] a donné un exemple d'une fonction entière d'ordre fini plus grand que 1/2 tel qu'il a valeurs déficientes non asymptotiques.

Dans ce mémoire, on introduit une famille de fonctions méromorphes d'ordre nul dans $|z|<\infty$ qui contient toutes les fonctions méromorphes dans $|z|<\infty$ telles que $T(r,f)=O((\log r)^2)$; et on donne un résultat concernant la conjecture précédente.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna:

$$\log^+,\ M(r,f),\ m(r,f),\ n(r,a),\ N(r,a),\ T(r,f)\,^{2)}\,.$$

2. Introduction d'une famille de fonctions méromorphes d'ordre nul dans $|z|<\infty$. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul dans $|z|<\infty$.

On met

$$\varphi_{T_f}(r)=\frac{r\displaystyle\int_r^\infty \frac{T(x,f)}{x^2}\,dx}{T(r,f)}\quad (r>0),\quad \varphi_{N_a}(r)=\frac{r\displaystyle\int_r^\infty \frac{N(x,a)}{x^2}\,dx}{N(r,a)}\quad (r\geqq r_a)\,,$$

et

1) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la Fondation de Sakkokaï (The Sakkokai Foundation).

2) On utilise $T(r)$ au lieu de $T(r,f)$ de temps en temps.

$$N_1(r, a; f) = N_1(r, a) = r\int_r^\infty \frac{n(x, a; f)}{x^2}\, dx.$$

PROPOSITION 1. $\varphi_{T_f}(r) \geqq 1 \quad (\varphi_{N_a}(r) \geqq 1)$.

PREUVE. En effect,

$$r\int_r^\infty \frac{T(x, f)}{x^2}\, dx \geqq r\cdot T(r, f)\int_r^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = T(r, f).$$

PROPOSITION 2. $\liminf\limits_{r\to\infty} \varphi_{T_f}(r) = 1$ ($\liminf\limits_{r\to\infty} \varphi_{N_a}(r) = 1$).

PREUVE. (Voir [6]). Supposons que

$$\liminf_{r\to\infty} \varphi_{T_f}(r) = h > 1,$$

c'est-à-dire, il existe un r_0 tel que, pour tout r plus grand que r_0,

$$h' T(r) < r\int_r^\infty \frac{T(x)}{x^2}\, dx = rT_1(r)$$

pour $1 < h' < h$; où $T_1(r) = \int_r^\infty \frac{T(x)}{x^2}\, dx$. $T_1'(r) = -\frac{T(r)}{r^2}$, par conséquent,

$$-h' r T_1'(r) < T_1(r).$$

Cela veut dire que $T_1(r) r^{1/h'}$ est croissante pour $r \geqq r_0$, de sorte que,

$$\int_r^\infty \frac{T(x)}{x^2}\, dx > K\cdot r^{-1/h'} \quad \text{pour} \quad r \geqq r_0 \tag{1}$$

où $K = T_1(r_0)\, r_0^{1/h'}$.

Si l'on suppose que

$$\limsup_{r\to\infty} T(r)\, r^{-(h'-1)/h'} = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un r_1 tel que, pour tout r plus grand que r_1,

$$T(r) < \varepsilon r^{1-1/h'}.$$

En substituant cela dans (1), on a

$$K < \varepsilon h' .$$

C'est une contradiction. En conséquence, il faut

$$\limsup_{r \to \infty} T(r)\, r^{-(h'-1)/h'} > 0 .$$

Cela veut dire qu'il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $r_n \nearrow \infty$ et

$$T(r_n) > K_1 \cdot r_n^{(h'-1)/h'} , \quad n = 1, 2, 3, \cdots ,$$

où K_1 est un constant positif. Cela signifie que l'ordre de $f(z)$ est au moins $(h'-1)/h' > 0$. C'est une contradiction à l'hypothèse, par conséquent

$$\liminf_{r \to \infty} \varphi_{T_f}(r) = 1 .$$

DÉFINITION. $N_q = \{f(z)$; méromorphe d'ordre nul dans $|z| < \infty$ telle qu'il existe une suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ ayant les propriétés suivantes : a) $0 < R_n \nearrow \infty$, b) $\limsup_{r \to \infty} R_{n+1}/R_n < \infty$ et c) $\lim_{n \to \infty} \varphi_{T_f}(R_n) = 1\}$.

PROPOSITION 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul dans $|z| < \infty$. Si elle appartient à N_q, alors pour toute valeur a non déficiente au sens de Valiron*[3]*, il existe une suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que* a) $0 < R_n \nearrow \infty$, b) $\limsup_{n \to \infty} R_{n+1}/R_n < \infty$ *et* c) $\lim_{n \to \infty} \varphi_{N_a}(R_n) = 1$.

Inversement, s'il y a une valeur a non déficiente au sens de Valiron telle qu'il existe une suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ ayant les propriétés a) $0 < R_n \nearrow \infty$, b) $\limsup_{n \to \infty} R_{n+1}/R_n < \infty$ *et* c) $\lim_{n \to \infty} \varphi_{N_a}(R_n) = 1$, *alors $f(z)$ est contenue dans N_q.*

PREUVE. Soient a une valeur non déficiente au sens de Valiron et $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite ayant les propriétés a), b) et $\lim_{n \to \infty} \varphi_{T_f}(R_n) = 1$. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, il existe un r_0 tel que, pour tout r plus grand que r_0

$$(1-\varepsilon)\, T(r) \leqq N(r, a) \leqq T(r) ,$$

par conséquent,

$$\varphi_{T_f}(r) \geqq (1-\varepsilon)\, \varphi_{N_a}(r)$$

et on a

---

3) $\lim_{r \to \infty} \dfrac{N(r, a)}{T(r, f)} = 1$. L'ensemble de valeurs déficientes au sens de Valiron est de capacité logarithmique nul.

$$1=\lim_{n\to\infty}\varphi_{T_f}(R_n)\geqq(1-\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}\varphi_{N_a}(R_n)$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi_{N_a}(R_n)\leqq\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Cela veut dire que, d'après la proposition 2,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{N_a}(R_n)=1.$$

Inversement, soit a une valeur non déficiente au sens de Valiron telle qu'il existe une suite $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ ayant les propriétés a), b) et c), alors

$$\varphi_{T_f}(r)\leqq\frac{r\int_r^\infty\frac{T(x,f)}{x^2}\,dx}{N(r,a)}\leqq\frac{1}{1-\varepsilon}\varphi_{N_a}(r),$$

en conséquence,

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi_{T_f}(R_n)\leqq\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Le nombre ε est positif quelconque, par conséquent, d'après la proposition 2,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{T_f}(R_n)=1,$$

c'est-à-dire, $f(z)$ appartient à N_q.

PROPOSITION 4. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre nul dans $|z|<\infty$ tell quee*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(2r,f)}{T(r,f)}=1,$$

alors, $f(z)$ appartient à N_q.

PREUVE. Par un calcul simple, on a

$$r\int_r^\infty\frac{T(x)}{x^2}\,dx=T(r)+r\int_r^\infty\frac{S(x)}{x^2}\,dx,\quad T(r)=\int_0^r\frac{S(x)}{x}\,dx.$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité

$$T(r) + S(r)\log 2 \leqq T(2r) \leqq T(r) + S(2r)\log 2\,,$$

$$(2) \qquad \lim_{r\to\infty}\frac{T(2r)}{T(r)} = 1 \text{ si et seulement si } \lim_{r\to\infty}\frac{S(r)}{T(r)} = 0\,.$$

Par conséquent, par l'hypothèse, on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r\displaystyle\int_r^\infty \frac{T(x)}{x^2}\,dx}{T(r)} = 1.$$

Cela veut dire que $f(z)$ est contenue dans N_q.

COROLLAIRE. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ telle que*

$$T(r,f) = O((\log r)^n) \text{ et } (\log r)^{n-1} = o(T(r,f)) \quad (n \geqq 2)\,,$$

alors $f(z) \in N_q$.

PREUVE. Par l'hypothèse, il y a deux nombres A et r_0 tels que, pour tout r plus grand que r_0, on a

$$T(r,f) \leqq A(\log r)^n\,,$$

en conséquence,

$$S(r) \leqq 2^n A(\log r)^{n-1}\,,$$

en considérant l'hypothèse, on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S(r)}{T(r)} = 0\,.$$

D'après (2) dans la preuve de la proposition 4,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(2r)}{T(r)} = 1\,,$$

par conséquent, $f(z) \in N_q$.

N. B. Grâce à ce résultat, une fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| < \infty$ non rationnelle telle que $T(r,f) = O((\log r)^2)$ appartient à N_q.

PROPOSITION 5. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ appartenant à N_q, alors $(\alpha f(z)+\beta)/(\gamma f(z)+\delta)$ est contenue dans N_q où $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.*

PREUVE. Parce que l'on a la relation

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, (\alpha f(z)+\beta)/(\gamma f(z)+\delta))}{T(r, f)} = 1\,,$$

on obtient cette proposition tout de suite par la définition.

3. Théorème. D'abord, on donne quelques lemmes:

LEMME 1. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre nul, alors on a l'inégalité*

$$\log M(r, f) < N(r, 0\,;\, f) + N_1(r, 0\,;\, f) + O(\log r)$$

(Voir Valiron [6]).

LEMME 2. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre nul, alors on a, pour ζ, η deux nombres quelconque fixés ($\zeta < 1$),*

$$\log|f(z)| \geqq N(2R, 0) - K(\zeta, \eta)\, N_1(2R, 0) - \log|c|$$

dans $\zeta R \leqq |z| \leqq R$ sauf dans les cercles contenant les zéros tels que la somme des rayons est ηR où c et $K(\zeta, \eta)$ sont constants (Voir Cartwright [3]).

LEMME 3. *Soit $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite telle que*

$$0 < R_n \nearrow +\infty \;\; et \;\; \limsup_{n\to\infty} R_{n+1}/R_n = \lambda < +\infty\,,$$

alors, pour $\zeta = 1/(\lambda+1)$, il existe une suite partielle $\{R_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ telle que

$$0 < R_{n_i} \nearrow +\infty\,, \quad \limsup_{i\to\infty} R_{n_{i+1}}/R_{n_i} = \lambda' \leqq \lambda + 1 < +\infty$$

et

$$\zeta R_{n_2} < R_{n_1} \leqq \zeta R_{n_2} < R_{n_2} < \cdots \leqq \zeta R_{n_i} < R_{n_{i-1}} \leqq \zeta R_{n_{i+1}} < \cdots.$$

PREUVE. D'abord, on note que l'ensemble $N_n = \{k > n\,;\, \zeta R_k < R_n\}$ n'est pas vide pour tout n suffisamment grand. Soit n_0 le premier nombre tel que $N_n \neq \emptyset$ pour tout $n \geqq n_0$.

On construit une suite partielle $\{R_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ comme suivant : Soit

$$R_{n_1} = R_{n_0}.$$

On définie R_{n_2} comme le nombre le plus grand dans $\{R_n\}$ où $n \geqq n_1$ et $\zeta R_n < R_{n_1}$.

Puis, quand R_{n_i} est défini, on définie $R_{n_{i+1}}$ comme le nombre le plus grand dans $\{R_n\}$ où $n > n_i$ et $\zeta R_n < R_{n_i}$.

Ici on a une suite partielle $\{R_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$. Elle a les propriétés a) $0 < R_{n_i} \nearrow +\infty$, b) $\limsup_{i\to\infty} R_{n_{i+1}}/R_{n_i} = \lambda' < \lambda+1$ et

$$\zeta R_{n_2} < R_{n_1} \leqq \zeta R_{n_3} < \cdots \leqq \zeta R_{n_i} < R_{n_{i-1}} \leqq \zeta R_{n_{i+1}} < \cdots$$

par la manière de la construction de cette suite.

En utilisant ces lemmes, on a

THÉORÈME. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$ appartenant à N_q. S'il existe une valeur déficiente au sens de Nevanlinna, alors, elle est valeur asymptotique de $f(z)$ en ∞.*

PREUVE. On peut supposer que, d'après la proposition 5, la valeur déficiente est ∞ en considérant une transformation linéaire.

On utilise les faits suivants :

1) $\lim_{r\to\infty} T(r,f)/T(r,f-\alpha) = 1$ où α est finie.

2) Il existe deux fonctions entières d'ordre nul $h(z)$ et $g(z)$ n'ayant pas de zéros communs telles que $f(z)=h(z)/g(z)$.

Par conséquent,

3) $N(r,0;f) = N(r,0;h)$ et $N(r,\infty;f) = N(r,0;g)$.

4) D'après 1) une valeur β n'est pas déficiente au sens de Valiron de $f(z)$ si et seulement si 0 est une valeur non déficiente au sens de Valiron de $f(z)-\beta$.

5) Grâce au 3)

$$\delta(\infty) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,\infty;f)}{T(r,f)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0;g)}{T(r,f)}.$$

En vertu du 5), pour $0 < \varepsilon < \delta(\infty)/(4-\delta(\infty))$ fixé, il existe un r_0 tel que pour tout r plus grand que r_0, l'inégalité suivante est vraie :

$$N(r,0;g) \leqq (1-\delta(\infty)+\varepsilon/2)\,T(r,f). \tag{3}$$

En appliquant le lemme 1 à $g(z)$ et grâce à l'égalité

$$N(r, 0; g) + N_1(r, 0; g) = r\int_r^\infty \frac{N(x, 0; g)}{x^2}\,dx$$

et à l'inégalité (3), on a

$$\log M(r, g) \leqq r\int_r^\infty \frac{N(x, 0; g)}{x^2}\,dx + O(\log r) \tag{4}$$

$$\leqq (1-\delta(\infty)+\varepsilon)\, r\int_r^\infty \frac{T(x, f)}{x^2}\,dx.$$

Par l'hypothèse et d'après le lemme 3, il existe une suite $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ telle que a) $0 < R_n \nearrow +\infty$, b) $\limsup_{n\to\infty} R_{n+1}/R_n = \lambda' \leqq \lambda+1$, c) $\lim_{n\to\infty} \varphi_{T_f}(R_n) = 1$ et d) pour $\zeta = 1/(\lambda+1)$,

$$\zeta R_2 < R_1 \leqq \zeta R_3 < R_2 < \cdots \leqq \zeta R_{n+1} < R_n \leqq \zeta R_{n+2} < \cdots.$$

Pour ε précédent, il existe un n_0 tel que, pour tout n plus grand que n_0, on a

$$R_n\int_{R_n}^\infty \frac{T(x, f)}{x^2}\,dx < (1+\varepsilon)\, T(R_n, f),$$

par conséquent, en considérant que $\log M(r, g)$ est croissante, grâce au (4), pour $(r_0 \leqq)\, r \leqq R_n$,

$$\log M(r, g) \leqq (1-\delta(\infty)+\varepsilon)(1+\varepsilon)\, T(R_n, f). \tag{5}$$

Puis, d'après 4) on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, \beta; f)}{T(r, f)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 0; h-\beta g)}{T(r, f)} = 1$$

où β est une valeur non déficiente au sens de Valiron. En conséquence, pour notre suite $\{R_n\}_{n=1}^\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{N_\beta}(R_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} N_1(R_n, \beta; f)/N(R_n, \beta; f) = 0.$$

On applique le lemme 2 à $h-\beta g \equiv F$ et à $\zeta = 1/(\lambda+1)$, $\eta = 1/2(\lambda+1)$. Pour ε le nombre donné précédent, il existe un n_1 tel que, pour tout n plus grand que n_1, on a

$$K(\zeta, \eta)\, N_1(2R_n, \beta; f) + \log|c| \leqq \varepsilon N(2R_n, \beta; f),$$

parce que

$$\frac{N_1(2R_n, \beta; f)}{N(2R_n, \beta; f)} \leqq 2 \frac{N_1(R_n, \beta; f)}{N(R_n, \beta; f)]} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

où c et $K(\zeta, \eta)$ sont constants dans le lemme 2. Grâce à cela, on a l'inégalité

$$\log|F(z)| \geqq (1-\varepsilon) N(2R_n, \beta; f)$$

pour $\zeta R_n \leqq |z| \leqq R_n$ sauf dans les cercles contenant les zéros de $F(z)$ tels que la somme des rayons est ηR_n.

D'autre part, on a, pour ε donné précédent, un nombre n_2 tel que, pour tout n plus grand que n_2, l'inégalité suivante est vraie:

$$N(2R_n, \beta; f) \geqq (1-\varepsilon) T(2R_n, f);$$

par conséquent, pour tout $n \geqq \max(n_1, n_2)$, on a

$$\log|F(z)| \geqq (1-\varepsilon)^2 T(2R_n, f)$$

pour $\zeta R_n \leqq |z| \leqq R_n$ sauf dans les cercles contenant les zéros de $F(z)$ tels que la somme des rayons est ηR_n.

D'après le choix de ζ et η, il existe une courbe simple $Z(t)$, $0 \leqq t < 1$, ayant les propriétés: i) $\lim_{t \to 1} Z(t) = \infty$ et ii) pour tout $t \geqq t_0(\varepsilon)$, il existe un n dépendant de t tel que

$$|Z(t)| \leqq R_n \quad \text{et} \quad \log|F(Z(t))| \geqq (1-\varepsilon)^2 T(2R_n, f).$$

Soit $t(<1)$ un nombre quelconque plus grand que t_0, alors il existe un n tel que $|Z(t)| \leqq R_n$ et, d'après (5)

$$\begin{aligned}\log|f(Z(t))-\beta| &= \log|F(Z(t))| - \log|g(Z(t))| \\ &\geqq \{\delta(\infty) - \varepsilon(4-\delta(\infty))\}\, T(R_n, f) \\ &\geqq \{\delta(\infty) - \varepsilon(4-\delta(\infty))\}\, T(|Z(t)|, f).\end{aligned}$$

On a choisi $0 < \varepsilon < \delta(\infty)/(4-\delta(\infty))$, et l'inégalité là haut signifie que $f(z)$ tend vers ∞ sur $Z(t)$ quand t tend vers 1. Cela veut dire que ∞ est une valeur asymptotique de $f(z)$ en ∞.

Addition: N. B. Si $T(r, f)$ est asymptotiquement égale à une fonction $U(r)$ à croissance régulière au sens de Valiron [5], elle satisfont à l'hypothèse de la proposition 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. ANDERSON-J. CLUNIE, Slowly growing meromorphic functions, Comm. Math. Herv., 40(1966), 267-280.
[2] N. U. ARAKELJAN, Entire functions of finite order with an infinite set of deficient values, Soviet Math. Dokl., 7(1966), 1303-1306.
[3] M. L. CARTWRIGHT, Integral functions, Cambridge Tracts, No. 44, 1956.
[4] A. A. GOL'DBERG, On deficient non asymptotic values of meromorphic functions, Soviet Math. Dokl., 7(1966), 1444-1447.
[5] G. VALIRON, Sur les valeurs déficientes des fonctions algébroïdes méromorphes d'ordre nul, J. d'Analyse Math., 1(1951), 28-42.
[6] G. VALIRON, Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes, Mono. L'Enseign. math., No. 8, Univ. Genève, 1960.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON