Tôhoku Math. Journ.
22(1970), 290-319.

SUR LES COMBINAISONS EXCEPTIONNELLES DE FONCTIONS HOLOMORPHES; APPLICATIONS AUX FONCTIONS ALGÉBROIDES*)

NOBUSHIGE TODA

(Received March 12, 1970)

1. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde dans le plan fini définie par une équation irréductible

$$A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0$$

où $A_0, \cdots, A_n$ sont des fonctions entières telles qu'au moins un rapport mutuel entre les fonctions $A_0, \cdots, A_n$ est transcendant. Alors, on sait que $f(z)$ n'admet que $2n$ valeurs exceptionnelles au sens de Picard ou de Borel en général ([12], [13]). Mais, Varopoulos ([16]) s'est aperuçu que le nombre de valeurs exceptionnelles est limité par le nombre des relations linéaires homogènes à coefficients constants et distinctes entre les fonctions $A_0, \cdots, A_n$, puis Rémoundos ([12]) et Ghermanesucu ([5], [6]) ont généralisé et amélioré des résultats de Varopoulos.

D'autre part, soit $g=(g_0, g_1, \cdots, g_n)$ un système défini par $n+1$ fonctions $g_0, \cdots, g_n$ $(n \geqq 1)$ entières sans zéros communs à toutes. Montel ([7]) a introduit la combinaison exceptionnelle pour un système g comme une extension de la valeur exceptionnelle dans le cas des fonctions algébroïdes et après Cartan ([3]), Ghermanescu ([5], [6]), Dufresnoy ([4]) et etc. ont étudié sur le nombre de combinaisons exceptionnelles quand il y a quelques relations linéaires homogènes à coefficients constants et distinctes entre les fonctions $g_0, \cdots, g_n$.

Pour obtenir ces résultats, l'identité de Borel, comme on dit, a joué un rôle fondamental. Dans ce mémoire, on donne quelques précisions de l'identité de Borel ([1]) en utilisant la méthode de Nevanlinna ([11]) et, en les appliquant, obtient quelques extensions et améliorations dans le cas du système d'abord et après on les applique aux fonctions algébroïdes à obtenir quelques faits similaires. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna ([11])-Selberg ([13]) librement.

---

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

2. Combinaisons exceptionnelles dans le plan fini.

2-1. Préliminaires. Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions holomorphes dans $|z| < R \leqq \infty$ sans zéros communs à toutes,

$$u(re^{i\theta}) = \max_{0 \leqq j \leqq n} \log |f_j(re^{i\theta})|$$

et

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta - u(0)\,.$$

On dit que $T(r,f)$ est la fonction caractéristique du système $f=(f_0, \cdots, f_n)$, qui est convexe par rapport à $\log r$ ([3]).

On dit que le nombre

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \qquad (R = \infty)$$

ou

$$\limsup_{r \to R} \frac{\log T(r,f)}{\log \frac{1}{R-r}} \qquad (R < \infty)$$

l'ordre du système f.

Désormais, on traite le cas où $R = \infty$.

On dit qu'une combinaison des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaire, homogène à coefficients $a_0, \cdots, a_n$ qui sont constants ou méromorphes dans le plan

$$F(z) = a_0 f_0(z) + \cdots + a_n f_n(z)$$

est

1) *lacunaire* si $F(z)$ n'a pas de zéros dans le plan ;
2) *exceptionnelle au sens de Picard* si $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans le plan ;
3) *exceptionnelle au sens de Borel* si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de f ;
4) *exceptionnelle au sens de Nevanlinna* si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r,f)} > 0\,.$$

Concernant le nombre de combinaison exceptionnelles, on a

THÉORÈME DE DUFRESNOY ([4]). *S'il n'existe entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants au plus* ($\lambda_c < n$),
[I] *le nombre de combinaisons des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$*, linéaires, homogènes à coefficients constants, lacunaires et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_c}\right]$;
[II] *le nombre* $N_{0,p}(f)$ *de combinaisons des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$*, linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Picard et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+\lambda_c+1$, *quand* $\limsup_{r\to\infty} T(r,f)/\log r = \infty$.

Il est un but de ce mémoire à généraliser ce théorème.
On utilise les ensembles de fondtions suivants:

$K_{\log r}$ = l'ensemble des fonctions rationnelles;
K_ρ = l'ensemble des fonctions méromorphes dans $|z|<\infty$ d'ordre plus petit que ρ où ρ est fini positif ou infini;
K_f (resp. K'_f) = l'ensemble des fonctions $a(z)$ méromorphes dans $|z|<\infty$ telles que $T(r,a)=o(T(r,f))$ $(r\to\infty)$ (resp. sauf, peut-être, dans le cas où l'ordre du système f est infini, dans un ensemble de mesure linéaire finie).

Le lemme suivant joue un rôle fondamental dans notre discussion suite.

LEMME 1. *Etant données n fonctions méromorphes dans* $|z|<\infty$ $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, *linéairement distinctes et vérifiant la relation*

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1,$$

on aura, pour $j=1, \cdots, n$,

$$T(r,\varphi_j) < \sum_{k=1}^{n} N(r,1/\varphi_k) + N(r,\varphi_j) + N(r,D)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} N(r,\varphi_k) - N(r,1/D) + S(r)$$

où D désigne le déterminant

$$D = \|\varphi_1, \cdots, \varphi_n\|$$

et où

$$S(r) < O(\log T(r) + \log r),$$

sauf, peut-être, dans le cas d'ordre infini, dans certains segments dont la longueur totale est finie ;

$$T(r) = \max_{1 \leq j \leq n} T(r, \varphi_j)$$

([11]).

On donne encore un lemme qui est utilisé quelquesfois par la suite.

LEMME 2. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système dans $|z|<R\leqq\infty$ où $f_0, \cdots, f_n$ sont holomorphes dans $|z|<R$ sans zéros communs à toutes, alors, pour tout $i\neq j$, on a*

$$T(r,f_i/f_j) - O(1) < T(r,f) < \sum_{k\neq j} T(r,f_k/f_j) + O(1)$$

(voir [14]).

2-2. Combinaisons exceptionnelles au sens de Picard. Dufresnoy a montré que l'on ne peut pas changer le nombre $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_c}\right]$ dans le théorème du Dufresnoy en un nombre plus petit en général. Et on donne ici un exemple de système qui montre que le nombre $n+\lambda_c+1$ est le plus petit en général.

EXEMPLE 1. Soient $f_0(z)=(z-1)e^z$, $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=-ze^z$, $f_3(z)=z^2-z$, $f_4(z)=z$, $f_5(z)=-z^2$. Alors, il y a deux relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions $f_0, \cdots, f_5$:

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)=0\,,$$

$$f_3(z)+f_4(z)+f_5(z)=0$$

et pas d'autres, par conséquent, $\lambda_c=2$. On voit facilement que l'ordre de ce système $(f_0, \cdots, f_5)$ est égal à un. Considérons les combinaisons suivantes:

$$F_i=f_{i-1} \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\cdots,6\,,$$

$$F_7=f_0+f_1+f_2+4f_3+5f_4+6f_5$$

et

$$F_8=f_0+2f_1+3f_2+f_3+f_4+f_5\,.$$

Alors, il sont linéairement indépendantes 6 à 6 et exceptionnelles au sens de Picard (naturellement, au sens de Borel). Il y a 8 combinaisons exceptionnelles au sens de Picard (ou de Borel) et linéairement indépendantes 6 à 6; de plus,

$$5+\left[\frac{5}{5-2}\right]=6<8=5+2+1.$$

Cela veut dire que le nombre $n+\lambda_c+1$ n'est pas diminué en général. Alors, sous quelles conditions, peut-on diminuer le nombre $n+\lambda_c+1$, par exemple, jusqu'à $n+\left[\frac{n}{n-\lambda_c}\right]$? On considère sur cette question d'ici.

LEMME 3. *Soient $n+1$ fonctions méromorphes dans le plan fini $g_0, \cdots, g_n$ vérifiant une relation linéaire à coefficients appartenant à $K_{\log r}$*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i g_i = 0$$

et satisfaisant, en outre, aux conaitions suivantes:
1) *Aucun des rapports g_i/g_j $(i\neq j)$ n'est rationnel;*
2) *Les zéros et les pôles des fonctions sont assez rares pour qu'on ait*

$$N(r,0,g_i)=O(\log r) \quad \textit{et} \quad N(r,g_i)=O(\log r)$$

pour tout $i=0,1,\cdots,n$.
Dans ces hypothèses,

$$c_0\equiv c_1\equiv\cdots\equiv c_n\equiv 0.$$

DÉMONSTRATION. Le cas où $n=1$. Triviale. On suppose que le lemme soit valable pour $n=1,2,\cdots,n-1$ $(n\geqq 2)$. Supposons que $c_0\not\equiv 0,\cdots,c_n\not\equiv 0$. Soient

$$\varphi_i=-\frac{c_i f_i}{c_n f_n} \qquad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

alors,

$$\varphi_0+\varphi_1+\cdots+\varphi_{n-1}=1.$$

De plus, $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ sont linéairement distinctes. En effet, si, pour des constants a_i

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi_i = 0 \quad \text{où} \quad (a_i) \neq (0)\,,$$

alors,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i c_i f_i = 0 \quad \text{et} \quad (a_i c_i) \not\equiv (0)\,.$$

Mais, d'après l'hypothèse d'induction,

$$(a_i c_i) \equiv (0)\,.$$

C'est une contradiction. En appliquant le lemme 1 à $\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}$, on a

$$T(r, \varphi_i) < \sum_{k=0}^{n-1} N(r, 1/\varphi_k) + N(r, D) + S(r) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$$

où

$$D = \|\varphi_0, \cdots\cdots, \varphi_{n-1}\|\,.$$

Par conséquent, on a

$$T(r) < \sum_{k=0}^{n-1} N(r, 1/\varphi_k) + N(r, D) + S(r) \tag{1}$$

où

$$T(r) = \max_{0 \leq i \leq n-1} T(r, \varphi_i)$$

et

$$S(r) < O(\log T(r) + \log r)$$

sauf, peut-être, dans un ensemble de mesure linéaire finie.

Ici, d'aprés l'hypothèse 1) et $c_i \in K_{\log r}$,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log r} = \infty$$

et d'après l'hypothèse 2) et $c_i \in K_{\log r}$,

$$N(r, 1/\varphi_k) = O(\log r) \quad \text{et} \quad N(r, D) = O(\log r),$$

de sorte que l'on a de (1)

$$T(r) < O(\log T(r) + \log r)$$

sauf, peut-être, dans un ensemble de mesure linéaire finie. C'est une contradiction, parce que

$$1 \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{O(\log T(r) + \log r)}{T(r)} = 0 .$$

Cela veut dire qu'au moins un de $c_0, \cdots, c_n$ est égal à 0 indentiquement. En conséquence, d'après l'hypothèse d'induction, on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_n \equiv 0 .$$

THÉORÈME 1. *Soit* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ *un système donné dans le plan fini tel que*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r.f)}{\log r} = \infty \tag{2}$$

où $f_0, \cdots, f_n$ *sont entières sans zéros communs à toutes. Alors, s'il n'existe entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}$ *au plus* $(\lambda_p < n)$, *le nombre de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients appartenants à* $K_{\log r}$ *et n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Picard et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n + \left[\dfrac{n}{n-\lambda_p}\right]$.

DÉMONSTRATION. On applique une méthode de Dufresnoy ([4]) à notre cas. Supposons qu'il y ait $n+1+\mu$ combinaisons des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients appartenant à $K_{\log r}$ et n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Picard et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$:

$$\mathrm{F}_p = \sum_{q=0}^{n} a_{pq} f_q \qquad (p = 0, 1, \cdots, n+\mu)$$

où les $a_{pq} \in K_{\log r}$ et aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau des coefficients a_{pq} ne soit pas identiquement nul. Il suffit de considérer le cas où $\mu > 0$.

Soit $A = (a_{pq})_{q=0,\cdots,n}^{p=0,\cdots,n}$ la matrice déterminée par a_{pq}, alors on a $|A| \not\equiv 0$,

$$(F_0, F_1, \cdots, F_n)^t = A(f_0, f_1, \cdots, f_n)^t$$

et au moins un rapport mutuel entre $F_0, \cdots, F_n$ est transcendant en vertu de (2) et du lemme 2. De plus, le nombre de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à K_{logr} entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ est égal à celui entre les fonctions $F_0, \cdots, F_n$.

Représentons $F_{n+1}, \cdots, F_{n+\mu}$ par $F_0, \cdots, F_n$, alors, on a

$$F_{n+j} = \sum_{q=0}^{n} \alpha_{jq} F_q \qquad (j = 1, 2, \cdots, \mu)$$

où les α_{jq} sont des fonctions rationnelles que l'on peut calculer à partir des a_{pq}. La condition d'indépendance linéaire $n+1$ à $n+1$ se traduit maintenant de la façon suivante: Tous les déterminants, d'ordre quelconque, que l'on peut extraire du tableau

$$\begin{matrix} \alpha_{10}, \alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{20}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 0}, \alpha_{\mu 1}, \cdots, \alpha_{\mu n} \end{matrix}$$

ne sont pas identiquement nuls.

D'après le lemme 3, puisque la combinaison

$$\sum_{q=0}^{n} \alpha_{jq} F_q$$

ne présente qu'un nombre fini de zéros au plus, les fonctions $F_0, \cdots, F_n$ se repartissent en un certain nombre de classes jouissant des propriétés suivantes:

1) chaque classe, sauf une peut-être, comprend deux fonctions au moins;

2) les rapports mutuels d'une même classe sont rationnels;

3) la combinaison considérée est somme de combinaisons partielles, chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes; à l'exception de l'une d'elles, les combinaisons partielles sont identiquement nulles.

S'il y a c classes ($c \geqq 2$), le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est égal à $(c-1)\mu$ et on voit facilement que ces combinaisons sont indépendantes $n+1$ à $n+1$. Le nombre de celles qui portent sur les p fonctions F_q appartenant à une classe ne peut dépasser $p-1$ et le nombre total ne peut dépasser

$$\sum_{i=1}^{c}(p_i-1)=n+1-c\,.$$

Par conséquent, on a

$$(c-1)\,\mu\leqq n+1-c\,. \tag{3}$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p-1$ relations à coefficients appartenant à $K_{\log r}$ (les rapports mutuels d'une même classe étant rationnels).

L'existence des c classes entraîne

$$\sum_{i=1}^{c}(p_i-1)=n+1-c$$

relations; d'où

$$n+1-c\leqq\lambda_p\,. \tag{4}$$

Des inégalités (3) et (4), on a

$$\mu\leqq\frac{n+1-c}{c-1}=\frac{n}{c-1}-1\leqq\frac{n}{n-\lambda_p}-1\,,$$

ce qui etablit le théorème.

COROLLAIRE 1.

$$N_{0,p}(f)\leqq\min\left(n+\lambda_c+1,\,n+\left[\frac{n}{n-\lambda_p}\right]\right).$$

N.B. 1. $n+\left[\frac{n}{n-\lambda_p}\right]\leqq n+\lambda_c+1$ si $\lambda_p\leqq\frac{\lambda_c n}{\lambda_c+1}$, en particulier, si $\lambda_p=\lambda_c$.

N.B. 2. $n+\lambda_c+1\leqq 2n$ et $n+\left[\frac{n}{n-\lambda_p}\right]\leqq 2n$ parce que $0\leqq\lambda_c\leqq\lambda_p\leqq n-1$ dans notre cas.

2-3. Combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna. Soient $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes. Supposons qu'il y a λ_c relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constans entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} f_j = 0 \qquad (i=1, \cdots, \lambda_c\,;\ 0 \leqq \lambda_c \leqq n-1)\,.$$

Alors, il y a $n+1-\lambda_c$ fonctions entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$, (soient, $f_0, \cdots, f_{n-\lambda_c}$), telles que

$$\|f_0, f_1, \cdots, f_{n-\lambda_c}\| \not\equiv 0$$

et

$$\|f_0, f_1, \cdots, f_{n-\lambda_c}, f_j\| \equiv 0 \qquad (j = n-\lambda_c+1, \cdots, n)\,.$$

On dit telles fonctions $f_0, \cdots, f_{n-\lambda_c}$ une base du système $f = (f_0, \cdots, f_n)$. Dans ces situations, on a le

THÉORÈME 2. *Soient $F_1, F_2, \cdots, F_q$ q combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions $f_0, \cdots, f_n$ et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, on a*

$$\{q-(n+1-\lambda_c)(\lambda_c+1)\}\, T(r,f) < \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda_c}(r, 0, F_i) + S(r)$$

où $S(r)$ est le terme d'erreur comme dans le théorème fondamental de Cartan ([3]) *et*

$$N_{n-\lambda_c}(r, 0, F) = \sum_k \log^+ \left|\frac{r}{a_k}\right|$$

où $\{a_k\}_{k=1}$ sont les zéros de la fonction F différents de l'origine, chaque zéro étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité si celui-ci est inférieur à $n-\lambda_c$, et $n-\lambda_c$ fois dans le cas contraire.

DÉMONSTRATION. Soient $F_{q_0}, \cdots, F_{q_n}$ $n+1$ fonctions quelconques des fonctions $F_1, \cdots, F_q$. Alors, il y a λ_c relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $F_{q_0}, \cdots, F_{q_n}$ comme entre les fonctions $f_0, \cdots . f_n$. On peut extraire $n+1-\lambda_c$ fonctions (soient $F_{q_0}, \cdots, F_{q_{n-\lambda_c}}$) des fonctions $F_{q_0}, \cdots, F_{q_n}$ telles que

$$f_j = \sum_{i=0}^{n-\lambda_c} \beta_{ij} F_{q_i} \qquad (j=0, 1, \cdots, n) \tag{5}$$

et

$$(6)\qquad F_{q_k} = \sum_{i=0}^{n-\lambda_c} \gamma_{ik} F_{q_i} \qquad (k=n+1-\lambda_c, \cdots, n).$$

De (5), On a

$$(7)\qquad \beta \| F_{q_0}, \cdots, F_{q_{n-\lambda_c}} \| \equiv \| f_0, \cdots, f_{n-\lambda_c} \| \not\equiv 0$$

où β est une constante. Des équations (6) et (7), on a, pour $k = n+1-\lambda_c, \cdots, n$,

$$(8)\qquad \beta_k \| F_{q_k}, F_{q_1}, \cdots, F_{q_{n-\lambda_c}} \| \equiv \| f_0, \cdots, f_{n-\lambda_c} \| \not\equiv 0$$

par exemple, où β_k est une constante. En utilisant (7) et (8), on a

$$\frac{F_1 \cdots\cdots F_q}{\beta \| F_{q_0}, \cdots, F_{q_{n-\lambda_c}} \| \cdot \prod_{k=n+1-\lambda_c}^{n} \beta_k \| F_{q_k}, F_{q_1}, \cdots, F_{q_{n-\lambda_c}} \|} = \frac{F_1 \cdots\cdots F_q}{\| f_0, \cdots, f_{n-\lambda_c} \|^{\lambda_c+1}}$$

En suite, comme dans la démonstration du théorème fondamental de Cartan, on a le résultat.

N.B. Soit $\lambda_c=0$, alors, on a le théorème fondamental de Cartan; soit $\lambda_c=n-1$, alors, on a une réponse pour la conjecture de Cartan dans le cas $\lambda=n-1$ ([3]).

COROLLAIRE 2. *Le nombre de combinaisons des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Nevanlinna et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus dénombrable.*

Puis, on considère sur le nombre de combinaisons F telle que

$$\delta(F) = 1 .$$

LEMME 4. *Soient* $f_0, \cdots, f_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ $\nu+1$ *fonctions méromorphes d'ordre fini dans le plan fini,* $U(r)$ *une fonction réelle, positive, croissante pour* $r \geqq 0$ *et* $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$, $c_0, \cdots, c_\nu$ $\nu+1$ *fonctions méromorphes dans le plan fini telles que*

1) *pour tout* $i \neq j$,

$$\infty > \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, f_i/f_j)}{U(r)} > 0\,;$$

2) *pour tout* $i=0, 1, \cdots, \nu$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f_i)}{U(r)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{N(r. f_i)}{U(r)} = 0\,;$$

et 3) *pour tout* $i=0, 1, \cdots, \nu$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, c_i)}{U(r)} = 0\,.$$

Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i f_i = 0\,,$$

alors,

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0\,.$$

DÉMONSTRATION. On démontre ce lemme comme dans la démonstration du lemme 3. 1) Le cas où $\nu = 1$. Triviale. 2) On suppose que ce lemme soit valid pour $\nu=1, \cdots, \nu-1$ $(\nu \geqq 2)$. Si $c_0 \not\equiv 0, \cdots, c_\nu \not\equiv 0$, soient

$$\varphi_i = -\frac{c_i f_i}{c_\nu f_\nu} \quad (i=0, 1, \cdots, \nu-1)\,,$$

alors,

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_{\nu-1} = 1\,.$$

De plus, $\varphi_0, \cdots, \varphi_{\nu-1}$ sont linéairement distinctes. En effect, si, pour des constants a_i

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i \varphi_i = 0 \qquad \text{où} \quad (a_i) \neq (0)\,,$$

alors,

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i c_i f_i = 0 \qquad \text{et} \quad (a_i c_i) \not\equiv (0)\,.$$

Mais, d'après l'hypothèse d'induction,

$$(a_i c_i) \equiv (0).$$

C'est une contradiction. En appliquant le lemme 1 à $\varphi_0, \cdots, \varphi_{\nu-1}$, on a

$$(9) \qquad T(r, \varphi_i) < \sum_{k=0}^{\nu-1} N(r, 1/\varphi_k) + N(r, D) + S(r) \quad (i=0, \cdots, \nu-1),$$

où

$$D = \|\varphi_0, \cdots, \varphi_{\nu-1}\|.$$

Ici,

$$(10) \qquad T(r, f_i/f_\nu) - T(r, c_i) - T(r, c_\nu) - O(1) < T(r, \varphi_i),$$

$$(11) \qquad N(r, 1/\varphi_k) < N(r, 0, f_k) + N(r, 0, f_\nu) + T(r, c_k) + T(r, c_\nu) + O(1)$$

et

$$(12) \qquad N(r, D) < (\nu+1) \sum_{i=0}^{\nu-1} \{N(r, f_i) + T(r, c_i)\}$$
$$+ \nu(\nu+1)\{N(r, 0, f_\nu) + T(r, c_\nu)\} + O(1).$$

En combinant (9), (10), (11) et (12) et utilisant les hypothèses 1), 2) et 3), on a

$$0 < \limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f_i/f_\nu)}{U(r)} = 0.$$

C'est une contradiction, par conséquent, au moins un de $c_0, \cdots, c_\nu$ est égal à 0 identiquement. De plus, en vertu de l'hypothèse d'induction, on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0.$$

Dans le cas d'ordre infini, on a

LEMME 4'. *Soient* $f_0, \cdots, f_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ $\nu+1$ *fonctions méromorphes dans le plan fini telles qu'au moins un rapport mutuel entre elles est d'ordre infini,* $U(r)$ *une fonction réelle, positive, croissante pour* $r>0$ *et* $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$, $c_0, \cdots, c_\nu$ $\nu+1$ *fonctions méromorphes dans le plan fini et* $E = \bigcup_{k=0}^{\nu} \bigcup_{i<j} E_{ij}^k$,

où E_{ij}^k *est l'ensemble exceptionnel dans le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna pour* $(f_i/f_j)^{(k)}$, *tels que*

1) *pour tout* $i \neq j$,

$$\infty > \limsup_{\substack{r \to \infty \\ r \in E^C}} \frac{T(r, f_i/f_j)}{U(r)} > 0\,;$$

2) *pour tout* $i = 0, \cdots, \nu$,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, f_i)}{U(r)} = 0 \qquad et \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{N(r, f_i)}{U(r)} = 0$$

et 3) *pour tout* $i = 0, \cdots, \nu$,

$$T(r, c_i) = o(U(r)) \qquad (r \to \infty)$$

sauf, peut-être, dans un ensemble E.

Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i f_i = 0\,,$$

alors,

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0\,.$$

THÉORÈME 3. *Soient* $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ *fcnctions entières sans zéros communs à toutes telles que*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $f = (f_0, \cdots, f_n)$.

[I] *S'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, hnmogènes distinctes à coefficients constants, le nombre* $N_{0,f}(f)$ *de combinaisons F des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairements indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et telles que*

$$\delta(F) = 1$$

est au plus égal à $n + \lambda_c + 1$.

[II] *S'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_f *relations linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* K_f *et distinctes, le nombre de combinaisons* G *des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* K_f *et sans zéros communs à tous, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et telles que*

$$\delta(G) = 1$$

est au plus égal à $n + \left[\dfrac{n}{n-\lambda_f}\right]$.

DÉMONSTRATION. [I] Supposons qu'il y ait $n + 1 + \mu$ combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$:

$$F_q = \sum_{q=0}^{n} a_{pq} f_q \qquad (p = 0, 1, \cdots, n+\mu)$$

telles que, pour tout p,

$$\delta(F_p) = 1$$

où les a_{pq} sont des constantes et aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau des coefficients a_{pq} ne soit pas nul. Il suffit de considérer le cas où $\mu > 0$.

Soit $A = (a_{pq})_{q=0,\cdots,n}^{p=0,\cdots,n}$, alors, $|A| \neq 0$,

$$(F_0, \cdots, F_n)^t = A(f_0, \cdots, f_n)^t$$

et

$$T(r, F) \sim T(r, f) \qquad (r \to \infty)$$

où $F = (F_0, \cdots, F_n)$. De plus, le nombre de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ est égal à celui entre les fonctions $F_0, \cdots, F_n$.

Représentons $F_{n+1}, \cdots, F_{n+\mu}$ par $F_0, \cdots, F_n$, alors, on a

$$F_{n+j} = \sum_{q=0}^{n} \alpha_{jq} F_q \qquad (j=1, \cdots, \mu) \tag{13}$$

où les α_{jq} sont des constantes que l'on peut calculer à partir des a_{pq}. La condition d'indépendance linéaire $n+1$ à $n+1$ se traduit maintenant de la façon suivante: Tous les déterminants, d'ordre quelconque, que l'on peut extraire du tableau

$$(\alpha_{jq})\begin{matrix} j=1,\cdots,\mu \\ q=0,\cdots,n \end{matrix}$$

ne sont pas nuls.

D'après le lemme 4 ou 4', où on utilise $T(r,f)$ au lieu de $U(r)$, de (13), les fonctions $F_0,\cdots,F_n$ se repartissent en un certain nombre ($\geqq 2$) de classes jouissant des propriétés suivantes:

1) chaque classe, sauf une peut-être, comprnd deux fonctions au moins;
2) les rapports mutuels d'une même classe appartient à K'_f;
3) chaque combinaison (13) est somme de combinaisons partielles, chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes; à l'excéption de l'une d'elles, les combinaisons partielles sont identiquement nulles.

Le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est au moins égal à μ et on voit facilement que ces combinaisons sont indépendantes $n+1$ à $n+1$. D'après l'hypothèse qu'il n'y a que λ_c relations entre les $f_0,\cdots,f_n$, on a

$$\mu \leqq \lambda_c\,,$$

ce qui établit le résultat.

[II] Supposons qu'il ait $n+1+\mu_f$ combinaisons linéaires, homogènes à coefficients appartenant à K_f et n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$:

$$G_p=\sum_{q=0}^{n} b_{pq}f_q \qquad (p=0,1,\cdots,n+\mu_f)$$

telles que, pour tout p,

$$\delta(G_p)=1$$

où les $b_{pq}\in K_f$ et aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau des coefficients b_{pq} ne soit pas identiquement nul. Il suffit de considérer le cas où $\mu_f>0$.

Représentons $G_{n+1},\cdots,G_{n+\mu_f}$ par $G_0,\cdots,G_n$, alors, on a

$$G_{n+j}=\sum_{q=0}^{n}\beta_{jq}G_q \qquad (j=1,\cdots,\mu_f) \tag{14}$$

où les $\beta_{jq} \in K_f$. D'après les hypothèses,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, G_p)}{T(r,f)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{N(r, G_p)}{T(r,f)} = 0$$

et en vertu du lemme 2, on a pour tout $p \neq q$,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, G_p/G_q)}{T(r,f)} < \infty .$$

On peut appliquer le lemme 4 ou 4' à chaque combinaison (14) comme $U(r) = T(r,f)$, alors, les fonctions $G_0, \cdots, G_n$ se repartissent en un certain nombre ($\geqq 2$) de classes jouissant des propriétés "1), 2) et 3)" dans la démonstration [I] de ce théorème. En suite, on peut calculer comme dans la démonstration du théorème 1 et obtient le résultat en utilisant le fait que le nombre de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à K'_f entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ est égal à celui entre les fonctions $G_0, \cdots, G_n$.

N.B. $n + \lambda_c + 1 \leqq 2n$ et $n + \left[\dfrac{n}{n-\lambda_f}\right] \leqq 2n$ parce que $\lambda_c \leqq n-1$ et $\lambda_f \leqq n-1$.

COROLLAIRE 3. $N_{0,f}(f) \leqq \min\left(n+\lambda_c+1, n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_f}\right]\right)$.

2-4. Combinaisons exceptionnelles au sens de Borel. Dans cette section, on précise des résultats dans [6]. Il faut le

LEMME 5. *Soient $\nu+1$ fonctions méromorphes dans le plan fini $g_0, \cdots, g_\nu$ vérifiant une relation linéaire à coefficients c_i $(i=0, \cdots, \nu)$ appartenant à K_ρ*

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0$$

et satisfaisant, en outre, aux codnitions suivantes:
1) *Aucun des rapports g_i/g_j $(i \neq j)$ n'appartient à K_ρ;*
2) *Pour tout $i=0, \cdots, \nu$, les ordres de $N(r, 0, g_i)$ et de $N(r, g_i)$ sont plus petits que ρ (ou finis si $\rho=\infty$).*

Dans ces hypothèses, on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0 .$$

DÉMONSTRATION. Si tous les rapports mutuels entre les g_i sont d'ordre fini, ce lemme reduit à ce qui est donné dans [12]. On considère sur le cas contraire.

Comme dans la démonstration du lemme 3, utilisant les mêmes notations, on arrive à

$$T(r) < \sum_{k=0}^{\nu-1} N(r, 1/\varphi_k) + N(r, D) + S(r) \tag{15}$$

où

$$D = \|\varphi_0, \cdots, \varphi_{\nu-1}\|$$

et

$$S(r) < O(\log T(r) + \log r)$$

sauf, peut-être, dans un ensemble E qui consiste de certains segments dont la longueur totale est finie.

Ici, on note que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} = \limsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in E^c}} \frac{\log T(r)}{\log r} .$$

On peut démontrer facilment que, d'après 2) et $c_i \in K_\rho$,

$$N(r, 1/\varphi_k) \quad (k=0, 1, \cdots, \nu-1) \quad \text{et} \quad N(r, D)$$

sont d'ordre fini. Maintenant,

$$\limsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in E^c}} \frac{\log T(r)}{\log r} = \infty ,$$

par conséquent, on a de (15)

$$\infty \leqq \rho' < \infty$$

où ρ' est l'ordre du coté droit de (15). C'est une contradiction. Il en résulte que ce lemme est valid.

THÉORÈME 4. *Soient* $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ *fonctions entière sans*

zéros communs à toutes telles que l'ordre du système $f=(f_0, \cdots, f_n)$ *est égal à* ρ *positif fini ou infini.*
[I] *S'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants, le nombre* $N_{0,\rho}(f)$ *de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Borel et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+\lambda_c+1$.
[II] *S'il n'y a entre* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}$, *le nombre de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}$ *et n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Borel et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+\lambda_p+1$.
[III] *S'il y a entre* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_ρ *relations linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* K_ρ, *le nombre de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* K_ρ *et n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Borel et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+\left[\frac{n}{n-\lambda_\rho}\right]$.

DÉMONSTRATION. [I] Supposons qu'il y ait $n+1+\mu$ combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$:

$$H_p=\sum_{q=0}^{n} a_{pq} f_q \qquad (p=0,1,\cdots,n+\mu)$$

telles que, pour tout p,

$$\text{l'ordre de } N(r,0,H_p)<\rho$$

où les a_{pq} sont des constantes. Représentons $H_{n+1}, \cdots, H_{n+\mu}$ par $H_0, \cdots, H_n$, alors, on a

$$H_{n+j}=\sum_{q=0}^{n} \alpha_{jq} H_q \qquad (j=1,2,\cdots,\mu) \tag{16}$$

où les α_{jq} sont des constantes. D'après le lemme 2 et

$$T(r,f) \sim T(r,H) \qquad (r \to \infty)$$

où $H=(H_0, \cdots, H_n)$, on peut démontrer facilement qu'il y a au moins un rapport entre les fonctions $H_0, \cdots, H_n$ qui n'appartient pas à K_ρ. En appliquant le lemme 5 à chaque combinaison (16), on a le résultat comme dans la démonstration du théorème 3 [I].

[II] On peut démontrer cette proposition comme [I] de ce théorème.

[III] Soit

$$F=\sum_{i=0}^{n} c_i f_i$$

une combinaison quelconque où $c_i \in K_\rho$, alors, manifestement,

$$\text{l'ordre de } N(r, F) < \rho .$$

En utilisant cette propriété, on peut démontrer cette proposition comme dans la démonstration du théorème 1, où on utilise le lemme 5 au lieu du lemme 3.

N.B. $n+\lambda_c+1 \leqq 2n$, $n+\lambda_p+1 \leqq 2n$ et $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_\rho}\right] \leqq 2n$ parce que $\lambda_c \leqq n-1$, $\lambda_p \leqq n-1$ et $\lambda_\rho \leqq n-1$ respectivement.

COROLLAIRE 4. $N_{0,\rho}(f) \leqq \min\left(n+\lambda_c+1, n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_\rho}\right]\right)$.

3. Systèmes au voisinage du point à l'infini.

3-1. Préliminaires. On discute dans ce paragraphe, sur la localisation des résultats donnés dans le paragraphe 2. Il y a un peu de différences entre dans le cas du plan fini et dans le cas au voisinage du point à l'infini quand on traite du nombre de combinaisons exceptionnelles.

Soient $g_0, \cdots, g_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions holomorphes dans V_R: $0<R\leqq |z|<\infty$ sans zéros communs à toutes,

$$u(re^{i\theta})=\max_{0\geqq j\geqq n} \log|g_j(re^{i\theta})|, \quad |z|=r\geqq R$$

et

$$T(r, g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta .$$

On dit $T(r, g)$ la fonction caractéristique du système $g=(g_0, \cdots, g_n)$, qui est convexe par rapport à $\log r$ $(r\geqq R)$, et le nombre

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r, g)}{\log r}$$

l'ordre du système g.

Soit

$$G(z)=a_0g_0(z)+\cdots+a_ng_n(z)$$

une combinaison des fonctions $g_0,\cdots,g_n$, linéaire, homogène à coefficients $a_0,\cdots,a_n$ qui sont méromorphes dans V_R. On définit que la combinaison G est lacunaire, exceptionnelle au sens de Picard, de Borel ou de Nevanlinna comme dans le paragraphe 2. On utilise, ici, les mêmes symboles comme dans le cas du plan fini pour la théorie de Nevanlinna dans V_R ([8], [9]).

Soit

$K_{\log r}(\infty)=$ l'ensemble de fonctions méromorphes $a(z)$ dans V_R telles que

$$T(r,a)=O(\log r) \qquad (r\to\infty).$$

On note que les lemmes 1 et 2 peuvent être localisés facilement d'après des résultats dans [9].

3-2. Combinaisons exceptionnelles au voisinage du point à l'infini. D'abord, on donne un théorème qui n'est pas valid dans le plan fini.

THÉORÈME 5. *Etant données n fonctions $f_1,\cdots,f_n$ holomorphes sans zéros dans V_R, linéairement distinctes et vérifiant la relation*

$$f_1+\cdots+f_n=1,$$

on aura, pour $i=1,\cdots,n$,

$$T(r,f_i)=O(\log r) \qquad (r\to\infty).$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le localisé du lemme 1, on a, pour $i=1,\cdots,n$,

$$T(r,f_i)<\sum_{k=1}^{n}N(r,1/f_k)+N(r,D)+S(r)$$

où

$$D=\|f_1,\cdots,f_n\|$$

et

$$S(r)<O(\log r)+O(\log T(r))$$

sauf, peut-être. dans le cas d'ordre infini, dans certain ensemble E de mesure linéaire finie;

$$T(r) = \max_{1 \leq i \leq n} T(r, f_i).$$

D'après l'hypothèse, on a

$$T(r) < O(\log T(r) + \log r)$$

sauf, peut-être, dans E. Il en résulte que

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log r} < \infty,$$

de sorte que, $T(r)$ étant convexe par rapport à $\log r$,

$$T(r) = O(\log r) \qquad (r \to \infty).$$

On a le résrltat.

Il y a beaucoup d'exemples qui satisfont à ce théorème. D'après ce théorème, on ne peut pas localiser un théorème présisé de Borel cité dans [11] p. 117-118. En conséquence, le théorème de Dufresnoy cité dans le paragraphe 2 est changé comme suivant.

THÉORÈME 6. *Soient* $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geq 1)$ $n+1$ *fonctions holomorphes dans* V_R *sans zéros communs à toutes telles que*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $f = (f_0, \cdots, f_n)$.

[I] *S'il n'ewiste entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes independantes à coefficients constants au plus, le nombre de combinaisons des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, lacunaires (ou exceptionnelles au sens de Picard) et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n + \lambda_c + 1$.

[II] *S'il n'exlste entre* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}(\infty)$ *au plus, le nombre de combinaisons des* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}(\infty)$ *et n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnellee au sens de Picard et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n + \left[\frac{n}{n - \lambda_p}\right]$.

En effet, on peut démontrer ce théorème, en utilisant les localisés des lemmes 2 et 3, comme dans les démonstrations des théorèmes 1 et 3.

Le nombre "$n+\lambda_c+1$" est le plus petit grâce à l'exemple 1 dans le paragraphe 2.

N.B. $0 \leqq \lambda_c \leqq \lambda_p \leqq n-1$, par conséquent. $n+\lambda_c+1 \leqq 2n$ et $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_p}\right] \leqq 2n$.

On peut donner les localisations des autres théorèmes donnés dans le paragraphe 2 avec les mêmes formes.

4. Systèmes dans le cercle-unité. Dans ce paragraphe, on considère sur le nombre de combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes dans le cercle-unité. Pour cet effet, il faut construire l'analogue de l'identité de Borel. Dans ce cas, en vertu du théorème suivant de Gartan [2], qui correspond au théorème 5, il y a quelques points à changer en comparaison du cas du plan fini.

THÈORÉME DE CARTAN. *Soient, dans le cercle-unité, p fonctions $f_1, \cdots, f_p$ holomorphes sans zéros, linéairement distinctes et vérifiant l'identité*

$$f_1(z)+\cdots+f_p(z)=1.$$

Alors, on a

$$\limsup_{r\to 1} \frac{m(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} \leqq k(p)$$

où $m(r)=\max_{1\leqq i\leqq p} m(r, f_i)$ et $k(p)$ est une constante positive qui ne dépend que de p.

C'est-à-dire, ce théorème suggère que, pour obtenir l'identité de Borel dans le cercle-unité, la croissance de tous les rapports mutuels entre les fonctions qui forment une identité doit être plus rapide que $\log \dfrac{1}{1-r}$.

Soit

$U_0=$ l'ensemble des fonctions méromorphes c dans le cercle-unité telles que $T(r, c)=O\left(\log \dfrac{1}{1-r}\right)$.

LEMME 6. *Soient n fonctions méromorphes dans le cercle-unité $f_1 \cdots, f_n$ vérifiant une relation linéaire à coefficients appartenant à U_0*

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$$

et satisfaisant, en outre, aux conditions suivantes:
1) *Pour tous les rapports mutuels entre les* $f_1, \cdots, f_n$,

$$\limsup_{r\to 1} \frac{T(r, f_i/f_j)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty \qquad (i \neq j);$$

2) *Pour tout* i,

$$N(r, 1/f_i) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \quad et \quad N(r, f_i) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

Dans ces hypothèses, on a

$$c_1 \equiv c_2 \equiv \cdots \equiv c_n \equiv 0.$$

On peut démontrer ce lemme en utilisant le lemme 1 restreint au cercle-unité (que l'on peut prouver facilement) comme dans la démonstration du lemme 3.

De ce lemme, on a le

THÉORÈME 7. *Soient* $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ *fonctions holomorphes dans le cercle-unité sans zéros communs à toutes telles que*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty$$

où $f = (fo, \cdots, f_n)$.
[I] *S'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes indépednantes à coefficients constants, le nombre de combinaisons* F *des* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairoment indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et telles que*

$$N(r, 0, F) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \qquad (r \to 1)$$

est au plus égal à $n + \lambda_c + 1$.
[II] *S'il n'y a entre les* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_0 *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à* U_0, *le combinaisons* F *des* $f_0, \ldots, f_n$, *linéaires, homogènes à coeffieients appartenant à* U_0 *et n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et telles que*

$$N(r, 0, F) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \qquad (r\to 1)$$

est au plus égal à $n + \left[\frac{n}{n-\lambda_0}\right]$.

En effet, on peut démontrer ce théorème d'après le lemme 6 comme dans les démonstrations du théorème 1 et du théorème 3 [I].

N. B. $n + \lambda_c + 1 \leqq 2n$ et $n + \left[\frac{n}{n-\lambda_0}\right] \leqq 2n$ parce que $\lambda_c \leqq n-1$ et $\lambda_0 \leqq n-1$.

En outre, en préparant des lemmes comme les lemmes 4 et 5, on obtient des résultats dans le cercle-unité comme les théorèmes 2, 3 et 4.

5. Dans le cas des fonctions algébroïdes. Soit $f(z)$ une fonction algébroïdes á n branches dans le plan fini définie par l'équation irréductible

$$F(w, z) = f_0(z)w^n + f_1(z)w^{n-1} + \cdots + f_n(z) = 0 \tag{17}$$

où $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et au moins un rapport mutuel entre elles est transcendant. On dit, comme d'habitude, qu'une valeur ou fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ a est

1) lacunaire si $F(a, z)$ n'admet pas de zéros;
2) exceptionnelle au sens de picard si $F(a, z)$ n'admet qu'un nombre fini de zéros;
3) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F(a, z))$ est plus petit que celui de $f(z)$;
4) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(a, f) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F(a, z))}{nT(r, f)} > 0$$

où $F(\infty, z) = f_0(z)$.

Sur le nombre du valeurs ou fonctions exceptionnelles, il y a beaucoup d'études. On donne, ici, quelques améliorations en appliquant des théorèmes donnés dens les paragraphes 2, 3 et 4. Soit λ_c le nombre de relations linéaires, homogènes indépendanths à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Dufresnoy [4] a donné le résultat suivant comme une conséquence du théorème dans la section 2-1.

"Le nombre de valeurs lacunaires de $f(z)$ est au plus egal à $n + \left[\frac{n}{n-\lambda_c}\right]$."

Ce nombre ne s'abaisse pas en général.

Antérieurement à ceci, on a un résultat suivant (voir [12]):

"Le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard est au plus égal à $n+\lambda_c+1$."

De plus, Ghermanescu [5], [6] a donné un résultat intéressant suivant:

"Le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard de $f(z)$ ne peut dépasser $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_c}\right]$."

Mais, malheureusement, ce n'est pas nécessairement vrai. En effet, il y a un exemple comme suivant.

EXEMPLE 2. Soient

$$A_0(w)=P(w)/(w-1),\ A_1(w)=P(w)/(w+1),\ A_2(w)=P(w)/(w-2),$$
$$A_3(w)=P(w)/(w+2),\ A_4(w)=P(w)/(w-3)\ \text{et}\ A_5(w)=P(w)/(w+3)$$

six polynômes de w où

$$P(w)=(w-1)(w+1)(w-2)(w+2)(w-3)(w+3).$$

On considère l'équation suivante en w:

$$A_0(w)f_0(z)-A_1(w)f_1(z)+A_2(w)f_2(z)+A_3(w)f_3(z)+A_4(w)f_4(z)$$
$$+A_5(w)f_5(z)=0$$

où $f_0(z)=(z-1)e^z$, $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=-2ze^z$, $f_3(z)=z^2-z$, $f_4(z)=z$ et $f_5(z)=-z^2$

ou

$$\text{(18)}\quad F(w,z)=F_0(z)w^5+F_1(z\,w^4+F_2(z)w^3+F_3(z)w^2+F_4(z)w+F_5(z)=0$$

où

$$(A_0(1)f_0,\cdots,A_5(-3)f_5)^t=V(F_0,\cdots,F_5)^t,$$

$$V=(a_{ij})_{j=0,\cdots,5}^{i=0,\cdots,5}$$

$$a_{ij}=a_i^j,\ a_0=1,\ a_2=2,\ a_3=-2,\ a_4=3,\ a_5=-3.$$

Il y a deux relations indépendantes entre les fonctions $f_0,\cdots,f_5$:

$$f_0+f_1+\frac{1}{2}f_2=0$$

$$f_3+f_4+f_5=0$$

et pas d'autres. Or,

$$(F_0, \cdots, F_5)^t = V^{-1}(A_0(1)f_0, \cdots, A_5(-3)f_5)^t$$

et

$$|V^{-1}| \neq 0,$$

par conséquent, il n'y a que deux relations linéaires, homogènes et indépendantes à coefficients consatns entre les fonctions $F_0, \cdots, F_5$. Les huit fonctions entières

$$F(1, z) = A_0(1)f_0(z),\ F(-1, z) = A_1(-1)f_1(z),$$

$$F(2, z) = A_2(2)f_2(z),\ F(-2, z) = A_3(-2)f_3(z),$$

$$F(3, z) = A_4(3)f_4(z),\ F(-3, z) = A_5(-3)f_5(z),$$

$$F(\infty, z) = -(z+2)e^z \text{ et } F(0, z) = -6z^2+30z$$

n'ont qu'un nombre fini de zéros. Cela veut dire que l'équation (18) est irreductible, l'algébroïde à 5 branches définie par (18) admet au moins huit valeurs exceptionnelles au sens de Picard, qui sont exceptionnelles au sens de Borel aussi parce que l'ordre de cette fonction est un, et $\lambda_c = 2$, tandis que

$$5+\left[\frac{5}{5-2}\right]=6<8=5+2+1.$$

L'exemple 2 signifie que le nombre "$n + \lambda_c + 1$" ne s'abaisse pas en général. Alors, sous quelles conditions, peut-on changer "$n + \lambda_c + 1$" en $n + \left[\frac{n}{n-\lambda_c}\right]$? On peut donner une réponse en appliquant le théorème 1 et utilisant le lemme suivant.

LEMME 7. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (17). *Alors, on a pour* $F=(f_0, f_1, \cdots, f_n)$

$$|T(r,f) - T(r, F)/n| < O(1)$$

([15]).

THÉORÈME 8. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (17). *S'il* *n'existe entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations, linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à* $K_{\log r}$, *le nombre de fonctions rationnelles, exceptionnelles au sens de Picard est au plus égal à* $n+\left[\frac{n}{n-\lambda_p}\right]$.

Comme une conséquence directe, si $\lambda_c = \lambda_p$, on a le résultat de Ghermanescu précédent.

Quant à la valeur exceptionnelle au sens de Borel, ρ étant l'ordre de $f(z)$ et λ_ρ le nombre de relations linéaires, homogènes à coefficients appartenant à K_ρ, Rémoundos [12] a donné:

"Le nombre N_ρ de fonctions méromorphes appartenant à K_ρ et exceptionnelles au sens de Borel de $f(z)$ est au plus égal à $n+\lambda_\rho+1$."
et Ghermanescu [6] a donné :

$$N_\rho \leqq n+\left[\frac{n}{n-\lambda_c}\right].$$

Mais, ce rétultat n'est pas valid nécessairement. En effet, on a le

THÉORÈME 9. *Sous les situations précédentes,*
[I] *le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Borel est au plus égal à*

$$n+\lambda_c+1\ ;$$

[II] *le nombre* N_ρ *est limité par*

$$N_\rho \leqq n+\left[\frac{n}{n-\lambda_\rho}\right].$$

On a [I] du théorème 4 [I] et du lemme 7, et [II] du théorème 4 [III] et du lemme 7.

On note que le nombre "$n+\lambda_c+1$" ne s'abaisse pas en général comme l'exemple 2 le montre, par conséquent, on a un exemple contre le résultat de Ghermanescu. Mais, si $\lambda_c = \lambda_\rho$, il est valid.

Quant à la valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna, comme une conséquence du théorème 3 et du lemme 7, on a

THÉORÈME 10. *Sous les situations précédentes,*
[I] *le nombre de valeurs a telles que*

$$\delta(a,f)=1$$

est au plus égal à $n+\lambda_c+1$;
[II] *le nombre de fonctions* b *appartenant à* K_F *et telles que*

$$\delta(b,f)=1$$

est au plus égal à $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_F}\right]$, λ_F *étant le nombre de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients appartenant à* K'_F.

On note, ici, que s'il y a $n+1$ valeurs a telles que $\delta(a,f)=1$, l'ordre de $f(z)$ est entier positif ou infini ([14]).

Les résultats dans les paragraphes 3 et 4 s'appliquent en particulier aux fonctions algébroïdes aussi respectivement comme dans le cas du plan fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOREL, Sur les zéros des fonctions entières, Acta Math., 2(1897), 357-396.
[2] H. CARTAN, Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications, Ann. E. N S., (3) 45(1928), 256-346.
[3] H. CARTAN, Sur les zéros des combinaisons de p fonctions holomorphes données, Mathematica, 7(1933) 5-31.
[4] J. DUFRESNOY, Théorie nouvelle des familles complexes normales ; applications à l'étude des fonctions algébroïdes, Ann. E. N. S., (3) 61(1944), 1-44.
[5] M. GHERMANESCU, Sur le théorème de Picard-Borel, Ann. E. N. S., (3) 52(1935), 221-268.
[6] M. GHERMANESCU, Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroïdes, Hermann 1940.
[7] P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars 1927.
[8] F. NEVANLINNA, Uber die Werteverteilung einer analytischen Funktionen in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle, 6e Congr. des math. scand., Copenhague (1925), 97-107.
[9] R. NEVANLINNA, Neuere Untersuchungen über den Picardschen Satz, 6e Conger. des math. scand., Copenhague (1925) 77-95.
[10] R. NEVANLINNA, Einige Eindeitigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math., 48(1926) 367-391.
[11] R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars 1929.
[12] G. RÉMOUNDOS, Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, Mémor. Sci. Math., 1927.
[13] H. L. SELBERG, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, 8(1934), 1-72.
[14] N. TODA, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroïdes ou de systèmes, Kōdai Math. Sem. Rep., 22(1970), 114-121.
[15] G. VALIRON, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math., 59(1931), 17-39.
[16] TH. VAROPOULOS, Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes et de leurs

dérivées, Bull. Soc. Math., 53(1925), 23-34.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON