Tôhoku Math. Journ.
22(1970), 480-491.

SUR LE NOMBRE DE COMBINAISONS EXCEPTIONNELLES; APPLICATIONS AUX FONCTIONS ALGÉBROÏDES*)

NOBUSHIGE TODA

(Received May 16, 1970)

1. Introduction. Soient $f(z)$ une fonction algébroïde transcendante à n branches dans le plan fini définie par une équation irréductible

$$(1) \qquad F(z,f) \equiv A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0$$

où les $A_0, \cdots, A_n$ sont entières sans zéros communs à toutes, au moins un rapport entre elles est transcendant et λ_c le nombre de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes entre les $A_0, \cdots, A_n$. Alors, le nombre de valeurs lacunaires est au plus égal à $n+[n/(n-\lambda_c)]$ ([2]) et le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard est au plus égal à $n+\lambda_c+1$ ([9]); de plus, on ne peut pas les abaisser en général ([7]).

Dans ce mémoire, on donne quelques théorèmes qui montrent que le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard est limité par le nombre de valeurs lacunaires et que le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou de Nevanlinna est limité par le nombre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard quand la fonction considérée est d'ordre un au plus. D'abord, on considère sur les systèmes et puis, applique aux fonctions algébroïdes.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([3], [5]).

2. Préliminaires. Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan, c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique du système f ([1]).

On dit qu'une combinaison des fonctions $f_0, \cdots, f_n$:

---

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai foundation).

$$F(z) = a_0 f_0(z) + \cdots + a_n f_n(z),$$

où les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ sont constants ou méromorphes dans le plan, est

1) lacunaire si $F(z)$ n'admet pas de zéros;

2) exceptionnelle au sens de Picard si $F(z)$ n'admet qu'un nombre fini de zéros;

3) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de $T(r, f)$;

4) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0.$$

On utilise les lemmes suivants souvant par la suite.

LEMME 1. *Soient $\nu+1$ fonctions méromorphes dans le plan fini $g_0, \cdots, g_\nu$ vérifiant une relation linéaire à coefficients rationnels*

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0$$

et satisfaisant, en outre, aux conditions suivantes:
1) *Aucun des rapports g_i/g_j $(i \neq j)$ n'est rationnel;*
2) *Pour tout $i = 0, \cdots, \nu$,*

$$N(r, 0, g_i) = O(\log r) \qquad et \quad N(r, g_i) = O(\log r).$$

Dans ces hypothèses, on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0$$

([7]).

LEMME 2. *Soient $g_0, \cdots, g_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ $\nu+1$ fonctions méromorphes d'ordre fini dans le plan fini, $U(r)$ une fonction réelle, positive, croissante pour $r > 0$ et $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$, $c_0, \cdots, c_\nu$ $\nu+1$ fonctions méromorphes dans le plan fini telles que*
1) *pour tout $i \neq j$,*

$$0 < \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r, g_i/g_j)}{U(r)} < \infty;$$

2) *pour tout $i = 0, \cdots, \nu$,*

$$N(r, 0, g_i) = o(U(r)) \quad et \quad N(r, g_i) = o(U(r)) \qquad (r \to \infty);$$

et 3) *pour tout* $i=0, \cdots, \nu$,

$$T(r, c_i) = o(U(r)) \qquad (r \to \infty).$$

Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0,$$

alors, on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0$$

([7]).

LEMME 3. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1). *Alors, on a*

$$|T(r, f) - T(r, A)/n| < O(1)$$

où $A=(A_0, \cdots, A_n)$ ([8]).

3. Cas de système. Le nombre de combinaisons exceptionnelles au sens de Picard est limité par le nombre de combinaisons lacunaires. En effet, on a le

THÉORÈME 1. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan. Supposons qu'il existe μ ($\geqq n+1$) combinaisons F_i ($i = 1, \cdots, \mu$) des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard. S'il y a $n+1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ qui sont lacunaires, les autres combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont aussi lacunaires.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n+1}$ sont lacunaires. Il suffit de démontrer le cas où $\mu > n+1$. Représentons F_{n+2} par $F_1, \cdots, F_{n+1}$:

$$F_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j F_j.$$

D'après l'hypothèse que $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, les α_j ($j=1, \cdots, n+1$) sont différents de zéro.

En vertu du lemme 1, puisque F_{n+2} ne présente qu'un nombre fini de zéros au plus, les fonctions $F_1, \cdots, F_{n+1}, F_{n+2}$ se repartissent en un certain nombre de classes jouissant des propriétés suivantes.

1) chaque classe comprend deux fonctions au moins;
2) les rapports mutuels d'une même classe sont rationnels;
3) l'identité

$$F_{n+2}-\sum_{j+1}^{n=1}\alpha_j F_j=0$$

est décomposée en un certain nombre d'identités partielles, chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes.

Considérons l'identité partielle contenant F_{n+2}:

$$F_{n+2}=\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_{j_k}F_{j_k}. \tag{2}$$

D'après 2), les rapports mutuels entre $F_{j_1},\cdots,F_{j_\nu}$ sont rationnels, et elles n'ont pas de zéros; par conséquent, les rapports mutuels sont constants. En conséquence, l'identité (2) devient

$$F_{n+2}=\alpha F_{j_1}\qquad(\alpha\neq 0).$$

Cela veut dire que F_{n+2} n'admet pas de zéros. De la même manière, on peut démontrer que $F_{n+3},\cdots,F_\mu$ n'ont pas de zéros. On a le résultat.

COROLLAIRE 1. *Sous les mêmes situations du théorème* 1, *s'il n'y a entre les fonctions* $f_0,\cdots,f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes,*

$$\mu\leqq n+[n/(n-\lambda_c)].$$

En effet, le théorème 1 montre que toutes les combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont lacunaires, par conséquent, d'après le théorème 15 dans [2], on a le résultat.

Alors, combien de combinaisons exceptionnelles au sens de Picard y a-t-il s'il y a au plus n combinaisons lacunaires dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$? Pour cette question, on a le

THÉORÈME 2. *Soit* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *un système transcendant dans le plan fini. Supposons qu'il y a* $n+\mu+1$ *combinaisons* $\{F_i\}_{i=0}^{n+\mu}$ *des fonctions* $f_0,\cdots,f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et exceptionnelles au sens de Picard. Si* $l+1$ $(l\leqq n)$ *combinaisons* $F_0,\cdots,F_l$ *sont lacunaires, s'il n'existe entre les fonctions* $f_0,\cdots,f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indepéndantes et si* $1+\lambda_c\leqq l$, *alors, on a*

$$\mu \leqq [l/(l-\lambda_c)] - 1 .$$

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 1, il ne faut démontrer que le cas où $l \leqq n-1$. Représentons les $F_{n+1}, \cdots . F_{n+\mu}$ par $F_0, \cdots, F_l, F_{l+1}, \cdots, F_n$, alors, on a

$$(3) \qquad F_{n+j} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} F_i \qquad (j=1, \cdots, \mu).$$

D'après l'hypothèse que $\{F_i\}_{i=0}^{n+\mu}$ sons linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, tous les déterminants, d'ordre quelconque, que l'on peut extraire du tableau $(\alpha_{ij})_{i=0,\cdots,n}^{j=1,\cdots,\mu}$ sont différents de zéro. En conséquence, en appliquant le lemme 1 à chaque combinaison de (3), les fonctions $F_0, \cdots, F_n$ se repartissent en un certain nombre de classes (soit c, qui est au moins 2 parce que le système considéré est transcendant) jouissant des propriétés suivantes:

1) chaque classe, sauf une peut-être, comprend deux fonctions au moins;
2) les rapports mutuels d'une même classe sont rationnels;
3) la combinaison considérée est somme de combinaisons partielles; chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes; à l'exception de l'une d'elles, les combinaisons partielles sont identiquement nulles.

Soient

c_1: le nombre de classes qui ne contiennent que des combinaisons lacunaires;
c_2: le nombre de classes qui contiennent des combinaisons non-lacunaires,
c_3: le nombre de combinaisons lacunaires contenues dans l'une des classes qui contiennent des combinaisons non-lacunaires, alors,

$$c_1 + c_2 = c \qquad \text{et} \quad c_2 \geqq 1 .$$

Le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est égal à

$$(c-1)\mu$$

et on voit facilement que ces combinaisons sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Par conséquent, il faut que

$$(4) \qquad (c-1)\mu \leqq \lambda_c$$

parce que le nombre de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ est égal à celui entre les fonctions $F_0, \cdots, F_n$. D'autre part, l'existence d'une classe de p combinaisons lacunaires implique l'existence de $p-1$ relations à coefficients constants (les rapports mutuels d'une même classe ne contenant que des combinaisons lacunaires étant constants). L'existence de c_1 classes entraîne

$$\sum_{i=1}^{c_1}(p_i-1) = l+1-c_1-c_3 .$$

De plus, l'existence de c_2 classes qui contiennent des combinaisons non-lacunaires implique qu'il existe au moins

$$(c_2-1)\mu + (c_3-c_2)^+$$

relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants, parce qu'il existe une combinaison n'étant pas identiquement nulle dans c_2 classes et que les rapports mutuels des fonctions lacunaires d'une même classe sont constants. Ici, $a^+=\max(a,0)$. Toutes les relations considérées sont linéairement indépendantes, par conséquent, il faut

$$l+1-c_1-c_3+((c_2-1)\mu+(c_3-c_2)^+) \leqq \lambda_c .$$

En utilisant $c_1+c_2=c$ et $c_2 \geqq 1$, on a de cette inégalité

$$(5) \qquad l-\lambda_c \leqq c-1 .$$

De (4) et (5), on obtient

$$\mu \leqq \lambda_c/(c-1) \leqq \lambda_c/(l-\lambda_c) \leqq l/(l-\lambda_c)-1 ,$$

ce qui établit le théorème.

N.B. 1. $n+\mu+1 \leqq n+[l/(l-\lambda_c)]$.

N.B. 2. $n+[l/(l-\lambda_c)] \leqq n+\lambda_c+1$ parce que $\lambda_c/(l-\lambda_c) \leqq \lambda_c$.

EXEMPLE 1. Dans le théorème 1, on ne peut pas changer "lacunaires" et "Picard" en "exceptionnelles au sens de Picard" et "Borel" respectivement en général. En effet, soient

$$f_0(z)=e^{z^2+z},\quad f_1(z)=e^{z^2},\quad f_2(z)=z^2-z,\quad f_3(z)=z \quad \text{et} \quad f_4(z)=z^2 .$$

On considère le système $f=(f_0,f_1,\cdots,f_4)$, alors, l'ordre de ce système est 2 et $\lambda_c=1$. Les fonctions

$$F_i=f_i \qquad (i=0,1,\cdots,4)$$

sont 5 combinaisons des $f_0, \cdots, f_4$, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes 5 à 5 et exceptionnelles au sens de Picard et F_2, F_3, F_4 ne sont pas lacunaires. Mais, la combinaison suivante :

$$\begin{aligned} F &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 - f_4 \\ &= e^{z^2+z} + e^{z^2} = e^{z^2}(e^z+1) \end{aligned}$$

est linéairement indépendante 5 à 5 de F_i $(i=0,1,\cdots,4)$ et admet les zéros d'ordre 1. Par conséquent, cette combinaison est exceptionnelle au sens de Borel, sans être exceptionnelle au sens de Picard.

EXEMPLE 2. Dans le théorème 1, on ne peut pas changer "Picard" en "Borel". En effet, soient

$$f_0(z) = e^{z^2+z}, \quad f_1(z) = e^{z^2}, \quad f_2(z) = e^z \quad \text{et} \quad f_3(z) = -e^z.$$

Considérons le système $f=(f_0, f_1, f_2, f_3)$, alors, ce système est d'ordre 2 et $\lambda_c=1$. Les combinaisons

$$F_i = f_i \qquad (i=0,1,2,3)$$

sont linéairement indépendantes 4 à 4 et lacunaires. Mais, la combinaison suivante :

$$F = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = e^{z^2}(e^z+1)$$

est linéairement indépendante 4 à 4 de F_0, F_1, F_2 et F_3 et admet les zéros d'ordre 1. Par conséquent, cette combinaison est exceptionnelle au sens de Borel sans être exceptionnelle au sens de Picard.

Alors, sous quelles conditions, est-ce que l'on peut généraliser le théorème 1 ? Pour cette question, on a le

THÉORÈME 3. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan fini d'ordre positif au plus égal à 1. Supposons qu'il existe μ $(\geqq n+1)$ combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homog nes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Borel. S'il existe $n+1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ qui sont exceptionnelles au sens de Picard, toutes les combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont exceptionnelles au sens de Picard.*

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, l'ordre de ce système est égal à 1.

On peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n+1}$ sont exceptionnelles au sens de Picard. On démontre que $F_{n+2}, \cdots, F_\mu$ sont aussi exceptionnelles au sens de Picard.

Représentons F_{n+2} par $F_1, \cdots, F_{n+1}$:

$$F_{n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j F_j \tag{6}$$

où les α_j sont rationnels non identiquement nuls parce que $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. D'après l'hypothèse que $F_1, \cdots, F_{n+2}$ sont exceptionnelles au sens de Borel, en appliquant l'identité de Borel (voir [4], p. 12) à (6), on a

$$F_{n+2} = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_{j(k)} F_{j(k)} \tag{7}$$

où tous les rapports mutuels entre $F_{n+2}, F_{j(1)}, \cdots, F_{j(\nu)}$ sont d'ordre plus petit que 1. Or, les fonctions $F_{j(1)}, \cdots, F_{j(\nu)}$ n'admettent qu'un nombre fini de zéros, de sorte que tous les rapports mutuels entre elles sont rationnels. Par conséquent l'identité (7) devient

$$F_{n+2} = \alpha F_{j(1)}$$

où le coefficient α est rationnel. Cela veut dire que F_{n+2} n'admet qu'un nombre fini de zéros. De la même manière, on peut démontrer que $F_{n+3}, \cdots, F_\mu$ n'admettent qu'un nombre fini de zéros. On a le résultat.

COROLLAIRE 2. *Sous les mêmes situations comme dans le théorème* 3, *s'il n'y a entre les* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels,*

$$\mu \leqq n + [n/(n-\lambda_p)].$$

En effet, en vertu du théorème 3, toutes les combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ sont exceptionnelles au sens de Picard. En conséquence, on a ce corollaire d'après le théorème 1 dans [7].

EXEMPLE 3. Dans le corollaire 2, on ne peut pas négliger "l'ordre de ce système est au plus égal à 1". En effet, voici un exemple:

Soient

$$f_0(z) = e^{z^2+2z}, \quad f_1(z) = e^{z^2+z}, \quad f_2(z) = e^{z^2}, \quad f_3(z) = z^2 - z, \quad f_4(z) = z \quad \text{et} \quad f_5(z) = z^2.$$

Considérons le système $f = (f_0, \cdots, f_5)$ qui est d'ordre 2 et $\lambda_p = 2$. Les 6 combinaisons

$$F_i = f_i \qquad (i=0, 1, \cdots, 5)$$

sont linéairement indépendantes 6 à 6 et exceptionnelles au sens de Picard. De plus

$$5 + [5/(5-2)] = 6,$$

par conséquent, il n'y a pas d'autres combinaisons des $f_0, \cdots, f_5$, linéaires, homogènes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Picard et linéairement indépendantes 6 à 6 de $\{F_i\}_{i=0}^{5}$. Mais, la combinaison suivante:

$$\begin{aligned} F &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - f_5 \\ &= e^{z^2}(e^{2z} + e^z + 1) \end{aligned}$$

admet les zéros d'ordre 1, par conséquent, elle est exceptionnelle au sens de Borel sans être exceptionnelle au sens de Picard.

Comme une généralisation du théorème 2, on a le

THÉORÈME 4. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan fini d'ordre positif au plus égal à 1. Supposons qu'il y ait μ combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous (resp. constants), linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Borel. S'il y a $l+1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ qui sont exceptionnelles au sens de Picard (resp. lacunaires), s'il n'y a entre les $f_0, \cdots, f_n$ que λ_p (resp. λ_c) relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels (resp. constants) et si $\lambda_p+1 \leqq l$ (resp. $\lambda_c+1 \leqq l$), on a*

$$\mu \leqq n + [l/(l-\lambda_p)] \qquad (resp.\ n + [l/(l-\lambda_c)]).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver le cas où $\mu > n+1$. Dans ce cas, on peut prouver facilement que l'ordre de f est égal à 1. Par conséquent, en utilisant l'identité de Borel (voir [4], p. 12) au lieu du lemme 1 et qu'une fonction méromorphe dans le plan fini d'ordre plus petit que 1 et n'admettant qu'un nombre fini de zéros et de poles est rationnelle ou constante, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 2.

N.B. $n+[l/(l-\lambda_p)] \leqq n+\lambda_p+1$ et $n + [l/(l-\lambda_c)] \leqq n+\lambda_c+1$.

THÉORÈME 5. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan fini d'ordre au plus égal à 1. Supposons qu'il y ait μ $(\geqq n+1)$ combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients de polynomes n'ayant pas de zéros communs a tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que*

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i=1, \cdots, \mu).$$

S'il y a $n+1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ qui sont exceptionnelles au sens de Picard, toutes les autres combinaisons sont aussi exceptionnelles au sens de Picard.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, l'ordre de ce système est égal à 1 ([6]). Par conséquent, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 1 en utilisant le lemme 2 au lieu du lemme 1 et que si

$$T(r, F_i/F_j) = o(T(r, f)) \qquad (r \to \infty),$$

F_i/F_j est rationnelle.

On peut démontrer ce dernier fait comme suivant. D'après le lemme 1 dans [6], on a

$$mT(r, e^z) \leqq T(r, f) \leqq MT(r, e^z) \quad (m, M > 0 \text{ et } r > r_0).$$

Si F_i/F_j n'est pas rationnelle, elle a une forme suivante:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} e^{\alpha z} \qquad (\alpha \neq 0 \text{: constante, } P(z) \text{ et } Q(z) \text{: rationnelles}).$$

Par conséquent,

$$T(r, F_i/F_j) \sim T(r, e^{\alpha z}) \quad (r \to \infty).$$

D'autre part,

$$m(\alpha)\, T(r, e^z) \leqq T(r, e^{\alpha z}) \leqq M(\alpha)\, T(r, e^z) \quad (m(\alpha), M(\alpha) > 0,\ r \geqq r_1),$$

de sorte que

$$0 < \frac{m}{M(\alpha)} \leqq \frac{T(r, F_i/F_j)}{T(r, f)} \leqq \frac{M}{m(\alpha)} \quad (r > r_2),$$

qui est absurde.

COROLLAIRE 3. *Sous les mêmes situations comme dans le théorème* 5, *s'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels, on a*

$$\mu \leqq n + [n/(n-\lambda_p)].$$

N.B. On ne peut pas négliger la condition que l'ordre de ce système est au plus egal à 1 comme l'exemple 3 le montre.

Comme une extension du théorème 2, on a le

THÉORÈME 6. *Soit* $f=(f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant d'ordre au plus égal à* 1. *Supposons qu'il y ait* μ *combinaisons* $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ *des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients de polynomes n'ayant pas de zéros communs à tous* (*resp. constants*), *linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que*

$$\delta(F_i) = 1 \quad (i=1, \cdots, \mu).$$

S'il y a $l+1$ *combinaisons dans* $\{F_i\}_{i=1}^{\mu}$ *qui sont exceptionnelles au sens de Picard* (*resp. lacunaires*), *s'il n'y a entre les* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_p (*resp.* λ_c) *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients rationnels* (*resp. constants*) *et si* $\lambda_p+1 \leqq l$ (*resp.* $\lambda_c+1 \leqq l$), *on a*

$$\mu \leqq n + [l/(l-\lambda_p)] \ (\textit{resp. } n + [l/(l-\lambda_c)]).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontres le cas où $\mu > n+1$. Dans ce cas, l'ordre de ce système est égal à 1 ([6]). Par conséquent, comme dans la démonstration du théorème 2, on peut prouver ce théorème en utilisant le lemme 2 au lieu du lemme 1 et ce qui est prouvé dans la démonstration du théorème 5.

N.B. $n + [l/(l-\lambda_p)] \leqq n + \lambda_p + 1$.

4. Cas de fonctions algébroïdes. Les résultats dans le paragraphe 3 s'appliquent en particulier aux fonctions algébroïdes dans le plan fini.

THÉORÈME 7. *Soit* $f(z)$ *une fonction algébroïde définie par une équation irréductible* (1). *Si elle admet* $n+1$ *valeure lacunaires, les autres valeurs exceptionnelles au sens de Picard* (*s'il y en a*) *doivent être lacunaires.*

En effet, les vecteurs

$$\{(1, 0, \cdots, 0), (a^n, a^{n-1}, \cdots, a, 1);\ a;\ \text{fini}\}$$

sont linéairement indépendants $n+1$ à $n+1$, par conséquent, ce théorème est une conséquence directe du théorème 1.

Comme une conséquence directe du théorème 2, on a le

THÉORÈME 8. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1). *Si elle admet $l+1$ valeurs lacunaires, s'il n'y a entre $A_0, \cdots, A_n$ que λ_c relations linéaires, homog nes indépendantes à coefficients constants et si $\lambda_c+1 \leqq l$, $f(z)$ admet au plus*

$$n + [l/(l-\lambda_c)]$$

valeurs exceptionnelles au sens de Picard.

N.B. On ne peut pas changer "lacunaires" et "Picard" en "exceptionnelles au sens de Picard" et "Borel" respectivement ou "Picard" en "Borel" dans le théorème 7 comme dans le cas du système.

Les théorèmes 3, 4, 5 et 6 aussi s'appliquent aux fonctions algébroïdes et on obtient les théorèmes analogues en vertu du lemme 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN. Sur les zéros des combinaisons l'néaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] J. DUFRESNOY, Théorie nouvelle des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctions algébroïdes, Ann. E. N. S., (3) 61(1944), 1-44.

[3] R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929.

[4] G. RÉMOUNDOS, Extensions aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, Mono. Sci. Math. 1929.

[5] H. L. SELBERG, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen der Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo 8(1934), 1-72.

[6] N. TODA, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs défficientes de fonctions algebroïdes ou de systèmes, Kōdai Math. Sem. Rep., 22(1970), 114-121.

[7] N. TODA, Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., 22(1970), 290-319.

[8] G. VALIRON, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math., 59(1931), 17-39.

[9] TH. VAROPOULOS, Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes et de leurs dérivées, Bull. Soc. Math., 53(1925), 23-34.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON