Real Analysis Exchange Vol. 11 (1985-86)

Zbigniew Grande, Department of Mathematics, Higher School of Pedagogy, 85-064 Bydgoszcz, Chodkiewicza 30, Poland.

Sur un Problème d'O'Malley

Soit R l'espace des nombres réels. Une fonction $f : [0,1] \to R$ admet un maximum approximatif au point x lorsque x est un point de dispersion de l'ensemble $\{t \in [0,1] : f(t) > f(x)\}$. O'Malley m'a posé le problème suivant:

Une fonction $f : [0,1] \to R$ de première classe de Baire, ayant la propriété de Darboux et continue presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue) doit - elle admettre un maximum approximatif?

Je prouve que la réponse est négative.

Théorème 1: Il existe une fonction bornée $f : [0,1] \to R$ de première classe, avec la propriété de Darboux et continue presque partout qui n'admet aucun maximum approximatif.

Preuve: Soit $A \subset (0,1)$ un ensemble du type F_σ, de première catégorie et tel que $1/2 \in A$ et tout point $x \in A$ est un point de densité de l'ensemble A. D'après le lemme 11 dans [3] il existe une fonction approximativement continue $g : [0,1] \to [0,1]$, continue en chaque point $x \notin A$ et telle que $g(x) = 0$ lorsque $x \notin A$ et $g(x) > 0$ lorsque $x \in A$. Il existe aussi ([1]) un homéomorphisme $h : [0,1] \xrightarrow{\text{sur}} [0,1]$ tel que $B = h(A)$ est de mesure zéro et $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. Posons $k(x) = g(h^{-1}(x))$. La fonction k est de première classe, continue en tout point $x \notin h^{-1}(B)$ et a la propriété de Darboux. Soit maintenant $\ell : [0,1] \to [0,1]$ une fonction telle que $\ell(0) = \ell(1) = 0$, $\ell(h^{-1}(1/2)) = 1$ et qui est linéaire dans tout intervalle $[0,h^{-1}(1/2)]$ et $(h^{-1}(1/2),1]$. La fonction $f(x) = \ell(x) - k(x)$ satisfait toutes les conditions exigées.

Remarque 1: L'ensemble des points de discontinuité de la fonction f dans la preuve du théorème 1 est de puissance du continu. Il en résulte le problème suivant:

Problème: Une fonction $f : [0,1] \to R$ ayant la propriété de Darboux dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable, doit - elle admettre un maximum approximatif?

Le théorème 2 montre qu'une telle fonction ne doit admettre ni aucun maximum local ni aucun maximum absolu.

Théorème 2: Il existe une fonction $f : [0,1] \to R$ avec la propriété de Darboux dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable et qui n'admet ni aucun maximum local ni aucun maximum absolu.

Preuve: Posons $f_0(x) = x$ pour $x \in [0,1]$. Soit $(a_{1n})_n$ une suite croissante telle que $a_{11} > 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} a_{1n} = 1.$$

Posons

$$b_{1n} = \min(a_{1,n+1} - a_{1n}, a_{1n} - a_{1,n-1})/4 \quad (a_{10} = 0)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x = a_{1n}, \quad n = 1,2,\ldots \\ 0 \text{ pour } x \in [0,1] - \bigcup\limits_n (a_{1n} - b_{1n}, a_{1n} + b_{1n}) \\ \text{linéare dans chaque intervalle } [a_{1n} - b_{1n}, a_{1n}] \text{ et} \\ \text{dans chaque intervalle } [a_{1n}, a_{1n} + b_{1n}] \quad (n = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

Il existe dans chaque intervalle $(a_{1n} - b_{1n}, a_{1n})$ $(n = 1,2,\ldots)$ une suite

croissante $(a_{2nk})_k$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2nk} = a_{1n}$ et

$1/2 + a_{2nk} + f_1(a_{2nk}) > a_{1n} + f_1(a_{1n})$ pour $k = 1,2,\ldots$.

Soient $b_{2nk} = \min(a_{2,n,k+1} - a_{2nk}, a_{2nk} - a_{2,n,k-1})/4$

$(a_{2n0} = a_{1n} - b_{1n})$ et

$$f_2(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } x = a_{2nk}, \quad n,k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{pour } x = [0,1] - \bigcup\limits_n \bigcup\limits_k (a_{2nk} - b_{2nk},\ a_{2nk} + b_{2nk}) \\ \multicolumn{2}{l}{\text{linéaire dans chaque intervalle } [a_{2nk} - b_{2nk};\ a_{2nk}]} \\ \multicolumn{2}{l}{\text{et dans chaque intervalle } [a_{2nk},\ a_{2nk} + b_{2nk}] \quad (n,k = 1,2,\ldots).} \end{cases}$$

En général, le $m^{\text{ème}}$ pas donne des suites croissantes

$(a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r})_r$ de nombres appartenant aux intervalles

$(a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}} - b_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}}\ ,\ a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}})$

telles que $\lim\limits_{r\to\infty} a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} = a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}}$ et

$2^{-m+1} + a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} + f_1(a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}) + \cdots +$

$+ f_{m-1}(a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}) > a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}} +$

$+ f_1(a_{m-1;k_1\ldots,k_{m-1}}) + \cdots + f_{m-1}(a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}})$

pour $r = 1,2,\ldots$ $(k_1\ldots,k_{m-1} = 1,2,\ldots)$,

des nombres $b_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} = \min(a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r+1} - a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}\ ,$

$a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} - a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r-1})\ /4$

$(a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},0} = a_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}} - b_{m-1,k_1,\ldots,k_{m-1}}\ ;$

$r,k_1,\ldots,k_{m-1} = 1,2,\ldots)$ et la fonction

$$f_m(x) = \begin{cases} 2^{-m+1} \quad \text{pour } x = a_{m,k_1\ldots,k_{m-1},r} \ (r,k_1,\ldots,k_{m-1} = 1,2,\ldots) \\ 0 \quad \text{pour } x \in [0,1] - \bigcup\limits_{k_1,\ldots,k_{m-1},r} (a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} - \\ \qquad b_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}\ ,\ a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r} + b_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}) \\ \text{linéaire dans chaque intervalle } [a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1}r} - \\ b_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}\ ,\ a_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}] \text{ et dans chaque intervalle} \\ [a_{,k_1,\ldots,k_{m-1},r}\ ,\ a_{,k_1,\ldots,,m-1,r} + b_{m,k_1,\ldots,k_{m-1},r}] \\ (r,k_1,\ldots,k_{m-1} = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

Posons $f(x) = x + f_1(x) + \cdots + f_m(x) + \cdots$ pour $x \in [0,1]$. Nous laissons la preuve que f a la propriété de Darboux au lecteur.

On voit aussi sans difficulté que la fonction f n'admet de maximum ni ay point 1 ni à aucun point $x = a_{1n} (n = 1,2,\ldots)$. De même on voit facilement que la fonction f n'admet de maximum à aucun point $x \in [0,1]$ tel qu'il existe des indices $m, k_1, \ldots, k_m$ tels que

$$x \in [a_{m,k_1,\ldots,k_m} - b_{m,k_1,\ldots,k_m},\ a_{m,k_1,\ldots,k_m} + b_{m,k_1\ldots,k_m}] - \bigcup_r [a_{m+1,k_1,\ldots,k_m,r} - b_{m+1,k_1,\ldots,k_m,r},\ a_{m+1,k_1,\ldots,k_m,r} + b_{m+1,k_1,\ldots,k_m,r}]$$

ni à aucun point $x \in [0,1] - \bigcup_n [a_{1n} - b_{1n},\ a_{1n} + b_{1n}]$. Il reste à prouver que la fonction f n'admet non plus de maximum en à un point $x \in [0,1]$ pour lequel il existe une suite d'intervalles $I_m(x) = [a_{m,k_1,\ldots,k_m} - b_{m,k_1,\ldots,k_m},\ a_{m,k_1,\ldots,k_m}]$ $(m = 1,2,\ldots)$ telle que $\{x\} = \bigcap_m I_m(x)$. Pour ala fixons un tel point x et un entourage ouvert U de ce point x. Soit k le plus petit nombre naturel tel que $I_k(x) \subset U$. Il existe un intervalle $J_{k+1} = [a_{k+1,\ell_1,\ldots,\ell_{k+1}} - b_{k+1,\ell_1,\ldots,\ell_{k+1}},\ a_{k+1,\ell_1,\ldots,\ell_{k+1}}] \subset I_k(x)$ et tel que $I_{k+1}(x) \cap J_{k+1} = 0$ et $t < u$ pour tous $t \in I_{k+1}(x)$ et $u \in J_{k+1}$. Soit $J_{k+2} = [a_{k+2,\ell_1,\ldots,\ell_{k+2}} - b_{k+2,\ell_1,\ldots,\ell_{k+2}},\ a_{k+2,\ell_1,\ldots,\ell_{k+2}}] \subset J_{k+1}$ un intervalle tel que $f_{k+1}(x) < f_{k+1}(u)$ pour tout $u \in J_{k+2}$. De même façon on obtient par induction une suite d'intervalles (J_r) $(r = k+1, k+2, \ldots)$ tels que $J_{k+1} \supset J_{k+2} \supset \cdots \supset J_r \supset \cdots$ et $f_r(x) < f_r(u)$ pour tout $u \in J_{r+2} (r > k)$. Soit $\{y\} = \bigcap_r J_r$. On a

$$f(x) = x + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + f_{k+1}(x) + \cdots <$$
$$y + f_1(y) + \cdots + f(y) + f_{k+1}(y) + \cdots = f(y)$$

et la preuve est achevée.

Corollaire: Il existe une fonction bornée approximativement continue $g : [0,1] \to R$ dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable qui n'admet ni aucun maximum local ni aucun maximum absolu.

Preuve: Soit f une fonction du théorème 2. Il existe un homéomorphisme $h : [0,1] \to [0,1]$ tel que la fonction $g = f \circ h$ est approximativement continue ([2]). La fonction g satisfait toutes les conditions exigées.

Ouvrages cités:

[1] J. Oxtoby; Measure and category, Springer-Verlag, 1971.

[2] D. Preiss; Maximoff's theorem, Real Analysis Exchange, 5(1979-80), p. 92-104.

[3] Z. Zahorski; Sur la première derivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950), p. 1-54.

Received October 7, 1985