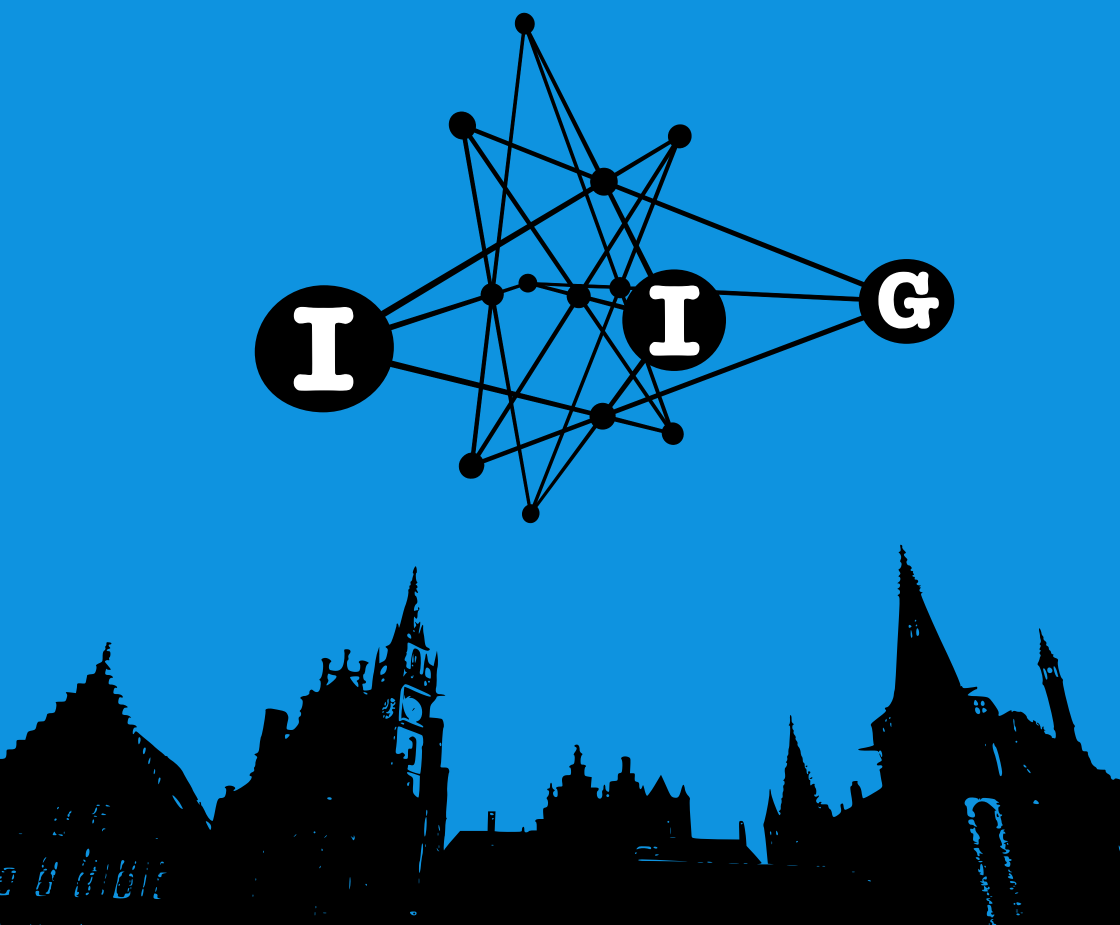
Innovations in
Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Les groupes projectifs : évolution et généralisations

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.21

msp

Les groupes projectifs : évolution et généralisations

Jacques Tits

[8] Originally published in *Bull. Soc. Math. Belg.* **3** (1949–1950), 1–10. Reused with permission.

Société Mathématique de Belgique

Les groupes projectifs : évolution et généralisations,

par J. Tits,
Aspirant F. N. R. S.

Bien qu'apparemment assez récente, la géométrie projective, telle que nous la connaissons, est le fruit d'une longue évolution dont on peut déjà trouver des éléments chez Apollonius. Toutefois, le titre de fondateur de la géométrie projective revient assurément à Desargues, qui est en effet le premier à mettre l'accent sur les propriétés qui se conservent par projection en tant que propriétés « considérables », et qui, par l'introduction et l'utilisation systématique de la notion de « but d'une ordonnance de droites » (équivalente à la notion de point projectif), crée (sans le mettre au point) un nouvel espace, le futur espace projectif.

Après avoir été longtemps ignorée, la tradition de Desargues est reprise par Monge, créateur de la géométrie descriptive, par Poncelet qui explicite et précise la notion de propriété projective, et par Möbius qui définit les collinéaitions en utilisant la notion projective de réseau, et prépare le programme d'Erlangen, de Klein. Avec von Staudt, la géométrie projective est érigée en science autonome, mais le cadre dans lequel elle se développe est toujours l'espace euclidien enrichi par l'introduction des points à l'infini. Toutefois, la possibilité de considérer un espace projectif à priori, indépendamment de l'espace euclidien, sera infailliblement mis en évidence par les idées de Riemann, pour qui « l'Espace (euclidien) n'est qu'un cas particulier d'une grandeur à trois dimensions » [8] (1) ; et la géométrie projective

(1) Les chiffres placés entre crochets renvoient à la bibliographie.

nous apparaît ainsi, dans le traité d'Enriques, comme une science autonome ayant un cadre propre, l'espace projectif. Cette géométrie devait bientôt s'enrichir au contact de l'algèbre moderne.

Les liens profonds unissant la géométrie et l'algèbre avaient déjà été mis en évidence à maintes reprises. Monge a précisé ces liens d'une façon particulièrement significative dans la phrase suivante tirée de sa Géométrie Descriptive : « Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie ».

Pour les différents géomètres cités jusqu'à présent, la géométrie est essentiellement bi- ou tridimensionnelle et réelle. L'utilisation toujours plus large du nombre en géométrie (Möbius, Plucker, Cayley, Gauss) allait rendre possible le passage à un nombre quelconque de dimensions (Grassmann, Cayley, Riemann) et la considération d'espaces projectifs sur un corps quelconque.

En 1935, à la suite d'un cours de M. Artin relatif aux groupes d'automorphismes des géométries finies pluridimensionnelles, M. Zassenhaus [13] a caractérisé les groupes des substitutions homographiques à coefficients dans un corps fini. En 1940, Kerékjártó [3] et [4] a caractérisé les groupes homographiques réel et complexe. Dans l'un et l'autre cas, la triple transitivité apparaît comme caractéristique essentielle.

En 1945, M. Libois [6], soulignant la perte de signification, à une dimension, des axiomes d'alignement, et l'importance de la propriété de triple transitivité dans l'étude générale des groupes projectifs unidimensionnels, indique sur cette base une axiomatique des espaces projectifs à une dimension.

J'ai étudié [10] les groupes de transformations dont la triple transitivité est seule postulée ; j'ai caractérisé en leur sein les groupes projectifs unidimensionnels.

— 3 —

Dans les cas particuliers où l'espace sur lequel opère le groupe est soit un espace fini, soit un espace topologique homéomorphe à une circonférence ou une sphère réelle, j'ai retrouvé respectivement les résultats de M. Zassenhaus et de Kerékjártó.

M. Libois avait par ailleurs [7] souligné l'intérêt que présenterait une étude plus générale dans laquelle le nombre 3, lié aux groupes projectifs unidimensionnels, serait remplacé par un nombre entier quelconque ; cela m'a conduit à généraliser de diverses façons les groupes projectifs (à un nombre quelconque de dimensions) après avoir analysé les propriétés de transitivité de ces groupes, à étudier les groupes ainsi définis, et à situer parmi eux les groupes projectifs dont j'étais parti. J'exposerai ici quelques-uns des résultats auxquels j'ai abouti.

Nous appellerons groupe projectif (à une dimension) le groupe de toutes les homographies non singulières

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

sur un corps commutatif quelconque K (a, b, c, d étant des éléments de K ; x et y variant dans K complété au moyen d'un élément ∞). On sait qu'un tel groupe possède la propriété suivante : il existe une et une seule transformation du groupe transformant trois points donnés distincts en trois points donnés distincts, et cela quels que soient les triples considérés ; nous dirons qu'il est *triplement transitif*.

Lorsqu'on fait l'étude des groupes projectifs en mettant l'accent sur la propriété de triple transitivité, deux types de propriétés apparaissent comme particulièrement importantes : les propriétés qui sont conséquences de la triple transitivité (leur étude est équivalente à l'étude générale des groupes triplement transitifs) et les propriétés qui caractérisent les groupes projectifs dans l'ensemble des groupes triplement transitifs (leur étude correspond à la recherche d'une axiomatique des groupes projectifs basée sur la triple transitivité, prise comme axiome de base) (1).

Parmi les propriétés du premier type, nous signalerons les suivantes :

une transformation non identique appartenant au groupe possède 0, 1 ou 2 points unis ; suivant le cas nous dirons qu'elle est elliptique, parabolique ou hyperbolique ; le groupe contient effectivement des transformations paraboliques et des transformations hyperboboliques.

les involutions (c'est-à-dire les transformations cycliques d'ordre 2) non elliptiques du groupe sont toutes hyperboliques ou toutes paraboliques ; dans le premier cas, le groupe contient une et une seule involution ayant pour éléments unis deux points donnés distincts quelconques, ce qui permet de définir des quaternes harmoniques jouissant des propriétés de symétries bien connues.

Parmi les propriétés du second type, nous signalerons les suivantes :

deux transformations hyperboliques ayant les mêmes éléments unis sont permutables (2).

toute transformation appartenant au groupe et possédant un couple en involution est une involution (autrement dit, deux couples déterminent une involution).

Il existe des groupes triplement transitifs qui ne sont pas projectifs (la non existence de tels groupes aurait

---

(1) L'axiome de triple transitivité étant posé a priori, on peut dire que deux propriétés sont équivalentes si elles s'impliquent mutuellement. Les propriétés du premier type apparaissent alors comme les propriétés « équivalentes à zéro », tandis que les propriétés du second type sont équivalentes au caractère projectif du groupe triplement transitif considéré. Il peut y avoir intérêt à étudier d'autres classes de propriétés toutes équivalentes entre elles, que celles dont il est question ici (cf. dans [10], les considérations relatives aux groupes semi-projectifs).

(2) Cette propriété est mieux connue en géométrie projective classique, sous la forme suivante : « les couples de points correspondants d'une projectivité hyperbolique ont avec les points unis de cette projectivité un rapport anharmonique constant ».

ôté tout intérêt aux considérations développées plus haut) c'est-à-dire que la triple transitivité ne suffit pas à caractériser les groupes projectifs ; mais il peut en être autrement si l'on particularise de l'une ou l'autre façon l'ensemble sur lequel opère le groupe considéré, c'est-à-dire qu'il y a des ensembles sur lesquels n'opère aucun groupe triplement transitif non projectif (il y en a même sur lesquels n'opère aucun groupe triplement transitif). Ces remarques sont illustrées par les théorèmes suivants :

1) Considérons un ensemble E formé d'un nombre fini N de points ; pour qu'il existe un groupe triplement transitif opérant sur cet ensemble, il faut et il suffit que N soit de la forme $p^n + 1$, où p est un nombre premier et n un nombre entier quelconques. Si $p = 2$, ou si n est impair, les groupes triplement transitifs opérant sur E sont projectifs, et tous semblables entre eux. Si $p \neq 2$ et si n est pair, il existe des groupes projectifs et des groupes triplement transitifs non projectifs opérant sur E, et les groupes de chacun des deux types sont semblables entre eux.

2) Tout groupe triplement transitif continu opérant sur la circonférence (resp. la sphère) réelle est homéomorphe au groupe homographique d'une variable réelle (resp. complexe) (¹).

Le théorème 1 résulte de la construction, donnée par M. Zassenhaus [13], de tous les groupes triplement transitifs finis (c'est-à-dire opérant sur un nombre fini de points) existants ; j'ai retrouvé indépendamment les résultats de M. Zassenhaus, et j'ai développé sous forme géométrique l'étude des groupes obtenus [10].

Le théorème 2 est dû à Kerékjártó [3 et 4].

Nous allons à présent essayer de généraliser ce qui a été

(¹) Au moment où j'ai fait cette conférence, on savait, par Kerékjártó, que la sphère est la seule surface possédant un groupe triplement transitif continu de transformations. J'ai montré depuis, que la circonférence et la sphère sont même les seules variétés ayant cette propriété.

— 6 —

dit plus haut concernant les groupes projectifs et triplement transitifs.

Pour y arriver on pourrait songer à faire l'étude des groupes n-uplement transitifs (tels qu'il existe une et une seule transformation du groupe transformant n points donnés distincts quelconques en n points donnés distincts quelconques) pour $n > 3$; mais une telle étude ne répondrait, à priori, que partiellement à la question posée, puisque les groupes n-uplement transitifs ($n > 3$) n'ont pas comme cas particuliers les groupes projectifs pluridimensionnels. D'ailleurs, j'ai montré que, pour $n > 3$, les seuls groupes n-uplement transitifs existants sont, à l'exception d'un groupe quintuplement transitif opérant sur 12 points (et connu sous le nom de groupe de Mathieu) et du groupe quadruplement transitif obtenu à partir de celui-là en fixant un point, le groupe symétrique de degré n (groupe de toutes les permutations de n points), le groupe symétrique de degré $n + 1$ et le groupe alterné de degré $n + 2$ (groupe de toutes les permutations paires de $n + 2$ points) ; ce résultat montre de façon précise quelle serait la portée d'une étude générale des groupes n-uplement transitifs ($n > 3$).

Nous appellerons groupe projectif à d dimensions ($d \geqslant 1$) le groupe G de toutes les transformations linéaires et homogènes, non singulières

$$x'_j = a^i_j x_i \qquad (i, j = 1 \dots d + 1) \qquad |\, a^i_j \,| \neq 0$$

de $d + 1$ nombres, c'est-à-dire éléments d'un corps commutatif quelconque K, $x_1 \dots x_{d+1}$, ordonnés, non tous nuls et donnés à un facteur près, les coefficients a^i_j de la transformation appartenant au corps K ; si $d > 2$, G peut encore être défini, avec la terminologie de Veblen et Young [12], comme le groupe de toutes les collinéations projectives d'un espace projectif propre à d dimensions.

Désignons par E l'ensemble sur lequel opère le groupe G (c'est-à-dire l'ensemble des $(d + 1)$ -uples $(x_1 \dots x_{d+1})$). On sait qu'il existe une et une seule transformation de G transformant $d + 2$ points donnés de E en $d + 2$ points donnés de E, à condition que chacun des $(d + 2)$-uples considérés soient formés de points $d + 1$ à $d + 1$ linéairement indépendants. On peut dire que le groupe G est « à peu près $(d + 2)$-uplement transitif » mais qu'il y a des $(d + 2)$-uples exceptionnels, qui peuvent être caractérisés de la façon suivante : un $(d + 2)$-uple est exceptionnel s'il existe au moins une transformation non identique de G conservant individuellement chacun de ses points.

Prenant ces dernières propriétés comme postulats, nous dirons qu'un groupe de transformations G opérant sur un ensemble E est *à peu près n-uplement transitif* s'il remplit les conditions suivantes :

1) Il existe des n-uples dont les points ne sont conservés simultanément (et individuellement) par aucune transformation non identique de G ; ils seront nommés n-uples *non singuliers.*

2) Il existe une et une seule transformation de G transformant n points donnés de E formant un n-uple non singulier respectivement en n points donnés de E formant un n-uple non singulier, et cela quels que soient les n-uples non singuliers considérés.

Il est aisé de vérifier que les groupes de transformations rencontrés ordinairement, et dont on est tenté de dire, dans un sens intuitif qu'ils sont « à peu près n-uplement transitifs » (tels, par exemple, que les groupes affins à $n - 1$ dimensions, et les groupes affins centrés à n dimensions) vérifient les deux conditions énoncées. On peut voir d'ailleurs qu'en adoptant une définition plus large que celle donnée plus haut, on perdrait entièrement le contenu intuitif de l'expression « à peu près n-uplement transitif ».

Lorsque G est un groupe projectif ou un groupe affin, la distinction entre n-uple singulier et n-uple non singulier peut être exprimée simplement en termes de dépendance linéaire, donc aussi en termes de sous-variétés linéaires. Passant au cas d'un groupe à peu près n-uplement transitif quelconque, nous allons, par un processus inverse, définir des sous-espaces singuliers, généralisant les sous-variétés linéaires des espaces affins et projectifs.

Considérons un ensemble E sur lequel opère un groupe à peu près n-uplement transitif G. Nous dirons qu'un k-uple de points de E ($k \leqslant n$) est singulier si tous les n-uples qui le contiennent sont singuliers. Étant donnés k points formant un k-uple non singulier, nous définirons le *sous-espace singulier de rang* k déterminé par ces points comme le lieu des points qui forment avec le k-uple donné un $(k+1)$-uple singulier.

Lorsque G est un groupe projectif ou affin à d dimensions, les sous-espaces singuliers de rang $k \leqslant d$ sont les sous-variétés linéaires de dimensions $k-1$; une telle sous-variété possède la propriété remarquable d'être déterminée de la même façon par k quelconques de ses points pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Nous dirons qu'un sous-espace singulier de rang k est *homogène* s'il est déterminé par n'importe lequel de ses k-uples non singuliers.

Lorsque G est un groupe projectif à d dimensions, les sous-espaces singuliers de rang $d+1$ déterminés par $d+1$ points donnés, linéairement indépendants, se compose des $d+1$ hyperplans déterminés par ces $d+1$ points pris d à d. Lorsqu'un sous-espace singulier de rang k déterminé par k points donnés est la réunion des sous-espaces de rang $k-1$ déterminés par ces points pris à $k-1$, nous dirons qu'il est *impropre*.

Ainsi, lorsque G est un groupe projectif ou affin, tous les sous-espaces singuliers sont homogènes ou impropres ; les groupes qui possèdent cette propriété constituent au sein des groupes à peu près n-uplement transitifs une classe particulièrement importante, nous les nommerons *groupes homogènes*.

Considérons un groupe homogène G, et désignons par

n_1 le plus petit nombre entier tel que les sous-espaces singuliers de rang n_1 soient non triviaux (c'est-à-dire, ne soient pas réduits aux seuls points qui les déterminent) et par n_2 le plus grand nombre entier tel que les sous-espaces de rang n_2 soient homogènes (on peut alors montrer que tout sous-espace de rang inférieur ou égal à n_2 est homogène).

Lorsque G est un groupe projectif, on a $n_1 = 2$ et $n_2 = n - 2$.

Nous appellerons *groupes du type projectif*, les groupes à peu près n-uplement transitifs homogènes d'indices $n_1 = 2$ et $n_2 = n - 2$. Ces groupes apparaissent, à l'étude comme une généralisation naturelle des groupes triplement transitifs. Comme pour les groupes projectifs à une dimension, on peut rechercher parmi les propriétés des groupes projectifs à d dimensions celles qui appartiennent à tous les groupes à peu près $(d + 2)$-uplement transitifs du type projectif, et celles qui caractérisent les groupes projectifs en leur sein.

Parmi les propriétés du premier type nous trouvons, par exemple, les propriétés des éléments unis des involutions (existence de deux sous-espaces d'éléments unis de rangs complémentaires ; possibilité de définir des quaternes harmoniques de points alignés, jouissant des propriétés de symétrie ordinaires).

Dans le second type, nous trouvons, par exemple, les propriétés suivantes :

si une transformation du groupe conserve trois points distincts appartenant à un même sous-espace de rang 2 (droite), elle conserve tous les points de ce sous-espace ;

une transformation du groupe conservant les $d + 1$ points d'un $(d + 1)$-uple non singulier donné commute avec toutes les transformations du groupe qui conservent ces mêmes points.

Signalons pour terminer qu'il n'existe, pour n donné, qu'un nombre fini de groupes à peu près n-uplement transitifs qui ne soient pas du type projectif et tels

— 10 —

que $n_1 \geqslant 2$ et $n_2 \leqslant n - 2$; ce sont tous des groupes finis. Ceci est à rapprocher de ce qui a été dit plus haut concernant les groupes n-uplement transitifs ($n \geqslant 4$) (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brouwer, L. E. J., Die Theorie des endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Ann.*, vol. 67 (1909).

[2] Cartan, E., La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. Paris, Hermann, 1938.

[3] Kerékjártó, B. de, Sur les groupes transitifs de la droite. *Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math.*, vol. 11 (1941).

[4] — Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère. *Acta Math.*, vol. 74 (1941).

[5] Libois, P., De l'espace métrique à l'espace projectif. *C. R. IIe Congrès Nat. des Sci.*, 1935.

[6] — Synthèse des axiomatiques de l'algèbre et des géométries projective, affine, et affine centrale. *Assoc. Fr. Avancem. Sci. C. R.* 1945.

[7] — Synthèse de l'algèbre et des géométries projective et affine. *Conf. Inst. des Hautes Études de Belg.*, déc. 1946.

[8] Riemann, B., Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854.

[9] Séguier, J. A. de, Éléments de la théorie des groupes de substitutions, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

[10] Tits, J., Généralisations des groupes projectifs. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* Févr., Mars, Juin, Août 1949.

[11] — Groupes triplement transitifs et généralisations. *C. R. Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris, 1949.

[12] Veblen, O. et Young, J. W., *Projective geometry*, vol. I et II.

[13] Zassenhaus, H., Kennzeichnung endliche linearer Gruppen als Permutationsgruppen. *Hamb. Abhandlungen*, vol. II (1936).

(1) Depuis cette conférence, j'ai encore précisé et développé les résultats exposés. L'ensemble de ces recherches fait l'objet d'un mémoire présenté à l'Académie Royale de Belgique.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.