# Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial


## Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local


François Bruhat and Jacques Tits



msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.209

msp

# Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local

François Bruhat and Jacques Tits

[71] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **263** (1966), 766–768. Reused with permission.

766 — Série A C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (21 novembre 1966).

THÉORIE DES GROUPES. — *Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local.* Note (*) de MM. **François Bruhat** et **Jacques Tits**, présentée par M. Jean Leray.

On réexpose en termes de données radicielles et l'on complète des résultats de N. Iwahori, H. Matsumoto et H. Hijikata sur l'existence d'une BN-paire de type affine dans le groupe $G_K$ des points rationnels d'un groupe algébrique simple simplement connexe G quasi déployé sur un corps local K. On introduit le diagramme de Dynkin résiduel de G.

Soient K un corps muni d'une valuation discrète non triviale $\varphi$, $\mathcal{K}$ l'anneau de $\varphi$ et $k$ le corps résiduel. Soit G un groupe algébrique simple simplement connexe défini sur K.

1. Dans ce numéro, nous supposons le groupe G *déployé* sur K et nous réexposons dans le langage des données radicielles (*cf.* une Note précédente [1] notée ci-après [DRA]) des résultats de N. Iwahori et H. Matsumoto [2]. Soient T un tore maximal de G, défini et déployé sur K, et N le normalisateur de T. Le système des racines de G suivant T est noté $\Sigma_0$. Choisissons un *épinglage* de G, c'est-à-dire un « système de racines simples » $\Pi$ et, pour chaque $a\in\Pi$, un K-isomorphisme $u_a$ du groupe additif Add sur le sous-groupe unipotent $U_a$ de G associé à la racine $a$. Soit $(u_a : \mathrm{Add}\to U_a)_{a\in\Sigma_0}$ une famille d'isomorphismes prolongeant $(u_a)_{a\in\Pi}$ et vérifiant les relations de Chevalley [3] (ces conditions déterminent les $u_a$ au signe près).

Soient V le dual de l'espace vectoriel réel V′ engendré par $\Sigma_0$ et A l'espace affine sous-jacent à V. Pour $s\in\Sigma_0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, posons

$$(a,\lambda)=\{x\in V\mid a(x)\leqq\lambda\},\qquad \partial(a,\lambda)=\{x\in V\mid a(x)=\lambda\},$$
$$U_{(a,\lambda)}=\{u_a(t)\mid t\in K,\ \varphi(t)\geqq\lambda\}.$$

Alors $\{\partial(a,\lambda)\mid a\in\Sigma_0,\ \lambda\in\varphi(K^*)\}$ est un système radiciel de type affine irréductible dans A [DRA, n° 1], l'ensemble des racines affines de ce système est $\Sigma=\{(a,\lambda)\mid a\in\Sigma_0,\ \lambda\in\varphi(K^*)\}$ et son groupe de Weyl W, appelé aussi *groupe de Weyl affine* du système de racines $\Sigma_0$, est extension du groupe de Weyl ordinaire de ce système par un groupe commutatif libre de rang égal au rang de G.

Théorème 1. — *Il existe un homomorphisme* $\nu$ *de* $N_K$ (*groupe des points de* N *rationnels sur* K) *sur* W *tel que* $(N_K,\nu,(U_\alpha)_{\alpha\in\Sigma})$ *soit une donnée radicielle de type* $\Sigma$ *dans* $G_K$ [DRA, n° 5]. *Le sous-groupe* $H=\mathrm{Ker}\,\nu$ *est l'ensemble des* $t\in T_K$ *tels que* $\varphi(\chi(t))=0$ *pour tout caractère* $\chi$ *de* T. *Si* $t\in T_K$, $\nu(t)$ *est la translation de* A *définie par*

$$a(\nu(t)(x))=a(x)+\varphi(a(t))\qquad \textit{pour tous } a\in\Sigma_0 \ \textit{ et }\ x\in V.$$

Soit C la « chambre fondamentale » de A définie par l'épinglage choisi (chambre sur laquelle les racines simples sont négatives et à laquelle O est adhérent) et soit $B=P_C$ le sous-groupe de $G_K$ engendré par H et les $U_\alpha$

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (21 novembre 1966). Série A — 767

pour $\alpha \supset C$. Alors [DRA, théorème 2] $(B, N_K)$ *est une* BN-*paire dans* $G_K$, on peut parler des sous-groupes d'Iwahori, des sous-groupes parahoriques et de l'immeuble $\mathcal{I}$ de $G_K$ et définir comme au n° 3 de [DRA] l'injection $j : A \to \mathcal{I}$.

2. Nous supposons à présent que G est *quasi déployé* sur K (c'est-à-dire possède un sous-groupe de Borel défini sur K). Soient S un tore de G déployé sur K maximal, et T le centralisateur de S, qui est un tore maximal de G, défini sur K. Il existe une plus petite extension L de K qui déploie G; c'est aussi la plus petite extension de K qui déploie T et elle est galoisienne finie sur K. Le groupe G est dit *résiduellement déployé* sur K si l'extension L de K est *totalement ramifiée* au sens suivant : la valuation $\varphi$ de K se prolonge de manière unique en une valuation $\varphi'$ de L et l'indice de ramification $[\varphi'(L^*) : \varphi(K^*)]$ est égal à $[L : K]$. Dorénavant, cette condition sera toujours supposée remplie.

Reprenons les notations du n° 1 en y remplaçant K par L, le tore T étant obtenu comme ci-dessus et l'épinglage choisi étant supposé invariant par le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$, ce qui est loisible [4]. On voit que $\Gamma$, qui opère sur $G_L$, laisse fixes les sous-groupes B et $N_L$, donc opère sur l'immeuble $\mathcal{I}$ de $G_L$ en laissant fixe l'aile $j(A)$, et l'on se trouve dans les conditions d'application du n° 7 de [DRA], avec $(G_L)^\natural = G_K$. Avec les notations utilisées là, le sous-espace $A^\natural$ de A s'identifie au dual de l'espace vectoriel réel engendré par les K-racines de G suivant S, on a $N^\natural = (\mathrm{Norm}\, S)_K = N_K$ et $H^\natural = H \cap G_K$. Enfin

THÉORÈME 2. — *Les conditions* (i) *à* (iii) *du théorème* 3 *de* [DRA] *sont remplies. Le groupe de Weyl* $W^\natural = N^\natural/H^\natural$ *est extension du groupe de Weyl relatif* (*à* K) *de* G *par un groupe commutatif libre de rang égal au* K-*rang de* G.

Utilisant le système radiciel et la BN-paire dont les théorèmes 2 et 3 de [DRA] assurent à présent l'existence, on peut définir les *sous-groupes d'Iwahori*, les *sous-groupes parahoriques* et *l'immeuble* de $G_K$; ces notions sont indépendantes du choix de S et de l'épinglage de G, et elles coïncident avec les notions correspondantes du n° 1 lorsque G est déployé sur K (i. e. K = L). L'intersection $C \cap A^\natural$ est contenue dans une unique chambre $C^\natural$ de A (mais on n'a généralement pas $C^\natural = C \cap A^\natural$) et $B \cap G_K$ est le sous-groupe d'Iwahori $P_{C^\natural}$ de $G_K$.

*Remarque* 1. — Lorsque le système des K-racines de G est réduit (i. e. sans racine divisible), le groupe $W^\natural$ n'est pas nécessairement le groupe de Weyl affine de ce système (*cf.* n° 3).

Les résultats de ce numéro sont en grande partie dus à H. Hijikata [5].

3. On conserve les notations du n° 2 et celles du n° 7 de [DRA]. Pour toute K-racine $a$ de G, notons $U_{(a)}$ le sous-groupe unipotent de G associé à cette racine [6] et convenons de poser $U_{(2a)} = \{1\}$ si $2a$ n'est pas une K-racine. La K-racine $a$ et une racine affine $\alpha \in \Sigma^\natural$ sont dites *associées* si

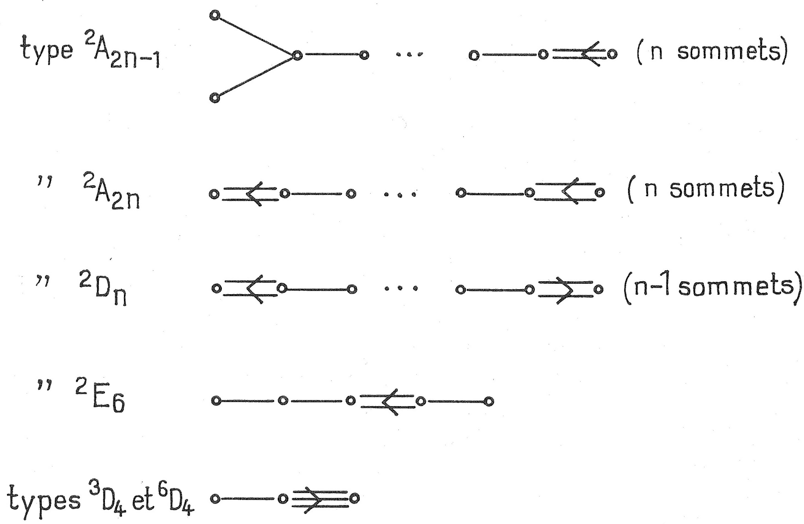
$$(U_\alpha \cap U_{(a),K}) \cdot U_{(2a),K} \neq (U_{\alpha+} \cap U_{(a),K}) \cdot U_{(2a),K}.$$

768 — Série A C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (21 novembre 1966).

Lorsqu'il en est ainsi, l'adhérence de Zariski de $U_\alpha$ dans G est le groupe $U_{(a/2)}$ ou le groupe $U_{(a)}$ selon que $a/2$ est ou n'est pas une K-racine.

Proposition 1. — *Toute racine affine $\alpha \in \Sigma^\natural$ est associée à une et une seule* K-*racine de* G.

Soit I l'ensemble des générateurs distingués du groupe $W^\natural$. Pour tout $i \in$ I, notons $a_i$ la K-racine associée à la racine affine dont le bord est l'hyperplan des points fixes de la réflexion $i$, et qui ne contient pas la chambre fondamentale $C^\natural$. Le diagramme de Dynkin $\Delta$ obtenu par le procédé habituel à partir de la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est appelé le *diagramme de Dynkin résiduel* de G (relatif à $k$) ; à l'orientation des traits multiples près, il n'est autre que le diagramme de Coxeter du groupe $W^\natural$. Lorsque G est déployé, $\Delta$ est le « diagramme de Dynkin complété » de G, obtenu en « ajoutant au diagramme ordinaire l'opposé de la plus grande racine » (7). Lorsque G n'est pas déployé, on obtient les diagrammes suivants (dans la notation des types, l'exposant à gauche est l'ordre de $\Gamma$ ; la flèche affectant un trait multiple est dirigé vers l'extrémité représentant la racine la plus courte) :




(*) Séance du 24 octobre 1966.

(1) *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 598.

(2) *Publ. Math. I. H. E. S.*, 25, 1965, p. 5-48.

(3) *Cf.* C. Chevalley, *Tôhoku Math. J.*, 7, 1955, p. 14-66.

(4) *Cf.* R. Steinberg, *Pacific J. Math.*, 9, 1959, p. 875-891.

(5) *On the arithmetic of p-adic Steinberg groups*, Notes polycopiées, University Yale, 1965.

(6) *Cf.* A. Borel et J. Tits, *Publ. Math. I. H. E. S.*, 27, 1965, p. 55-151, en particulier les nos 3.8 et 3.18.

(7) *Cf.* par exemple, N. Iwahori et H. Matsumoto, *loc. cit.* (2).

(*Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 5e
et *Mathematisches Institut der Universität,*
*Wegeler Strasse, Bonn, Allemagne* )

# Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig




See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

# Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.