Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

BN-paires de type affine et données radicielles

François Bruhat and Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.203

msp

BN-paires de type affine et données radicielles

François Bruhat and Jacques Tits

[70] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **263** (1966), 598–601. Reused with permission.

598 — Série A C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (2 novembre 1966).

THÉORIE DES GROUPES. — *BN-paires de type affine et données radiciell*

Note (*) de MM. **François Bruhat** et **Jacques Tits**, présentée ɪ
M. Jean Leray.

Un groupe G muni d'une BN-paire dont le groupe de Weyl est irréductible de type affine possède une bornologie naturelle; on détermine les sous-groupes bornés maximaux de G pour cette bornologie. La notion de donnée radicielle (affine) pour un groupe G est introduite; à une telle donnée est naturellement associée une BN-paire du type en question. Enfin, on énonce un « théorème de descente » qui permet, sous certaines conditions, de déduire d'une donnée radicielle dans G une donnée radicielle dans le groupe $G^{\natural}$ des points fixes d'un groupe d'automorphismes de G.

1. Soit A un espace affine réel de dimension l, muni d'une métrique euclidienne. Si h est un hyperplan de A, la réflexion orthogonale par rapport à h est notée r_h. Pour tout demi-espace fermé α de A, on note $\partial\alpha$ le bord de α et l'on pose $r_\alpha = r_{\partial\alpha}$ et $\alpha^* = r_\alpha(\alpha)$.

Soit E un *système radiciel* dans A; nous entendons par là un ensemble localement fini d'hyperplans tel que $r_h(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ pour tout $h \in \mathrm{E}$. Les demi-espaces fermés α tels que $\partial\alpha \in \mathrm{E}$ sont appelés les *racines affines* de E; leur ensemble sera noté Σ. Le groupe W engendré par les r_h ($h \in \mathrm{E}$) est le *groupe de Weyl* de E. Le système E est supposé *irréductible de type affine*, c'est-à-dire que $l > 0$ et qu'aucun sous-espace affine propre de A n'est invariant par W. On sait que les *chambres* $\left(\text{composantes connexes de } \mathrm{A} - \bigcup_{h \in \mathrm{E}} h\right)$ sont des simplexes ouverts et sont permutés de façon simplement transitive par W. On se donne une chambre C. Le groupe W est engendré par les $(l+1)$ réflexions par rapport aux faces de C.

2. Soient G un groupe et (B, N) une BN-paire dans G ([1]). On suppose que le groupe de Weyl de (B, N) « est » W, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme ν de N sur W de noyau $\mathrm{H} = \mathrm{B} \cap \mathrm{N}$, envoyant les générateurs involutifs distingués de N/H sur les réflexions par rapport aux faces de C. Les conjugués de B dans G sont appelés les *sous-groupes d'Iwahori* de la BN-paire; un sous-groupe *propre* contenant un sous-groupe d'Iwahori est dit *parahorique*. Pour toute partie non vide Ω de $\overline{\mathrm{C}}$, nous noterons P_Ω le sous-groupe parahorique engendré par B et par les $\nu^{-1}(r_h)$ pour $h \in \mathrm{E}$ et $\Omega \subset h$.

3. On appelle *immeuble* de G [relatif à (B, N)] le complexe simplicial géométrique $\mathcal{I}$ défini comme suit : l'ensemble des sommets de $\mathcal{I}$ est l'ensemble des sous-groupes parahoriques maximaux de G, et une partie finie $(\mathrm{P}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de cet ensemble est l'ensemble des sommets d'un simplexe $\mathcal{I}$ si et seulement si $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{P}_i$ est un sous-groupe parahorique. L'immeuble $\mathcal{I}$

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (2 novembre 1966). Série A — 599

ne dépend que de la classe de conjugaison des sous-groupes d'Iwahori. Le groupe G opère sur $\mathcal{J}$ « par automorphismes intérieurs » et les stabilisateurs des points de $\mathcal{J}$ sont les sous-groupes parahoriques de G.

Soit $j : A \to \mathcal{J}$ l'injection caractérisée par les propriétés suivantes : l'image par j d'un sommet s de C est le sous-groupe parahorique $P_{\{s\}}$ correspondant; la restriction de j à $\overline{C}$ est linéaire; pour tout $n \in N$ et tout point $a \in \overline{C}$, on a $j(\nu(n)(a)) = n(j(a))$. Le normalisateur $\hat{N}$ de $j(A)$ contient N et $\hat{H} = \hat{N} \cap B$ est le centralisateur de $j(A)$; le couple $(B, \hat{N})$ est une BN-paire dans G ayant même groupe de Weyl que (B, N). Une *aile* de l'immeuble $\mathcal{J}$ est, par définition, le transformé de $j(A)$ par un élément de G. Utilisant la relation G = BNB, on voit que *deux points quelconques de l'immeuble appartiennent toujours à une même aile*. Soit A′ une aile quelconque et soit $g \in G$ tel que $A' = g(j(A))$; la structure d'espace euclidien et le système radiciel sur A′ obtenus par transport de structure grâce à la bijection $a \mapsto g(j(a))$ sont indépendants du choix de g; on peut donc parler des racines affines, des chambres, etc. de A′.

Proposition 1. — *Il existe sur $\mathcal{J}$ une distance d et une seule induisant sur chaque aile la distance euclidienne; elle fait de $\mathcal{J}$ un espace métrique complet. Si A′ est une aile et C′ une chambre de A′, il existe une rétraction $\rho : \mathcal{J} \to A'$ diminuant les distances et telle que $d(x, \rho(y)) = d(x, y)$ pour tout $x \in \overline{C}'$ et $y \in \mathcal{J}$.*

Il en résulte que si x, y sont deux points de $\mathcal{J}$ et si A′ est une aile les contenant, le segment $[x, y]$ de A′ est indépendant du choix de A′ et est l'ensemble des $z \in \mathcal{J}$ tels que $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Une partie Ω de $\mathcal{J}$ est dite *convexe* si $[x, y] \subset \Omega$ pour tous $x, y \in \Omega$.

Proposition 2. — *Soit Ω une partie bornée non vide de $\mathcal{J}$. Alors, le stabilisateur de Ω dans le groupe des isométries de $\mathcal{J}$ possède un point fixe dans l'adhérence de l'enveloppe convexe de Ω.*

4. Une partie de G est dite *bornée* si elle est contenue dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes BnB ($n \in N$). Ceci définit une bornologie sur G compatible avec la structure de groupe. De la proposition 2, on déduit le

Théorème 1. — *Soit Γ un groupe d'automorphismes de G conservant la classe des sous-groupes d'Iwahori, et soit B′ un sous-groupe d'Iwahori. Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour toute partie bornée X de G, la réunion ΓX des transformés de X par tous les éléments de Γ est bornée;*

(ii) *l'ensemble ΓB′ est borné;*

(iii) *Γ normalise un sous-groupe parahorique de G.*

Corollaire. — *Tout sous-groupe borné de G est contenu dans un sous-groupe borné maximal. Les sous-groupes bornés maximaux sont les sous-*

600 — Série A C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (2 novembre 1966).

groupes parahoriques maximaux. En particulier, il y a $(l+1)$ *classes de conjugaison de sous-groupes bornés maximaux.*

PROPOSITION 3. — *La bornologie décrite plus haut est la seule bornologie compatible avec la structure du groupe et telle que* B *soit borné et que* G *ne le soit pas. Inversement, si* (B', N') *est une autre* BN-*paire dont le groupe de Weyl* W′ *est irréductible de type affine et telle que* B′ *soit borné, alors* B *et* B′ *sont conjugués et* $W \cong W'$ (2).

5. Conservons les notations de 1. Pour tout $\alpha \in \Sigma$, on note α_+ l'intersection de toutes les racines contenant un voisinage de α et l'on pose $\alpha_- = (\alpha_+^*)^*$. On a donc $\alpha_+ \supsetneq \alpha \supsetneq \alpha_-$ et $\alpha_+, \alpha_- \in \Sigma$. Soit G un groupe. Soient N un sous-groupe de G, ν un homomorphisme de N sur W de noyau noté H et $(U_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ une famille de sous-groupes de G. Si Ω est une partie de A, on désigne par U_Ω le sous-groupe engendré par les U_α pour $\alpha \in \Sigma$ et $\alpha \supset \Omega$, par P_Ω le sous-groupe engendré par U_Ω et H, et par $\Sigma(\Omega)$ l'ensemble des racines α telles que $\alpha \supset \Omega$ et $\alpha_- \not\supset \Omega$. On dit que $(N, \nu, (U_\alpha)_{\alpha \in \Sigma})$ est une *donnée radicielle* de type Σ pour G si les conditions suivantes sont satisfaites pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$ et $n \in N$:

(DR 1) $nU_\alpha n^{-1} = U_{\nu(n)(\alpha)}$.

(DR 2) Si $\alpha \subsetneq \beta$, alors $U_\beta \subsetneq U_\alpha$; on a $\bigcap_{\gamma \supset \alpha} U_\gamma = \{1\}$.

(DR 3) Si $\partial\alpha$ et $\partial\beta$ ne sont pas parallèles, le groupe des commutateurs (U_α, U_β) est contenu dans le groupe engendré par les U_γ, pour $\gamma \in \Sigma$, $\gamma \not\supset \alpha$, $\gamma \not\supset \beta$, $\gamma \supset \alpha \cap \beta$.

(DR 4) Si $\beta \supsetneq \alpha^*$, on a $P_{\alpha \cap \beta} = U_\alpha . H . U_\beta$.

(DR 5) $P_{\partial\alpha} = U_\alpha . \nu^{-1}(r_\alpha) . U_\alpha \cup U_\alpha . H . U_{\alpha_+}$.

(DR 6) Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ les éléments de $\Sigma(C)$ rangés dans un ordre arbitraire. L'application produit

$$\times . \cdots \times U_{\gamma_m} \times H \to G$$

est injective.

(DR 7) N et les U_α engendrent le groupe G.

6. Soient $(N, \nu, (U_\alpha)_{\alpha \in \Sigma})$ une donnée radicielle de type Σ dans un groupe G.

THÉORÈME 2. — *Le couple* $(B = P_C, N)$ *est une BN-paire dans* G. *On a* $H = B \cap N$ *et les images par* ν *des générateurs involutifs distingués de* N/H *sont les réflexions par rapport aux faces de* C (3).

Nous pouvons à présent, comme au n° 3, construire l'immeuble $\mathcal{J}$ de G [relatif à (B, N)], et définir l'injection $j : A \to \mathcal{J}$; *celle-ci ne dépend pas du choix de la chambre* C. Notons aussi que $\hat{N} = N$.

7. On conserve les notations du n° 6. Soit Γ un groupe d'automorphismes de G conservant la classe de conjugaison de B. Alors Γ opère sur l'immeuble $\mathcal{J}$. Supposons que Γ conserve l'aile $j(A)$; par transport de structure, il opère alors sur A. Supposons que $\sigma(U_\alpha) = U_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$ et tout $\alpha \in \Sigma$. Soit $G^\natural$ (resp. $A^\natural$) l'ensemble des points fixes

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (2 novembre 1966). Série A — 601

de Γ dans G (resp. A). On suppose $\dim A^\natural > 0$. Soient $N^\natural$ (resp. $H^\natural$) le normalisateur (resp. le centralisateur) de $j(A^\natural)$ dans $G^\natural$, et $\nu^\natural$ l'homomorphisme évident de $N^\natural$ dans $\mathrm{Aut}(A^\natural)$. Pour tout demi-espace α de $A^\natural$, posons

$$U^\natural_\alpha = U_{\tilde\alpha} \cap G^\natural \qquad (\text{resp. } U^\natural_{\alpha+} = U_{\tilde\alpha_+} \cap G^\natural),$$

où $\tilde\alpha$ (resp. $\tilde\alpha_+$) désigne l'intersection des $\beta \in \Sigma$ tels que $\beta \supset \alpha$ (resp. $\mathring{\beta} \supset \alpha$) et $\beta \not\supset A^\natural$. Soit $\Sigma^\natural$ l'ensemble des demi-espaces fermés α de $A^\natural$ tels que $U^\natural_\alpha \neq U^\natural_{\alpha+}$, notons $E^\natural$ l'ensemble des $\partial\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma^\natural$ et $W^\natural$ le groupe d'isométries de $A^\natural$ engendré par les $r_\alpha (\alpha \in \Sigma^\natural)$.

Théorème 3. — *Supposons remplies les conditions suivantes :*

(i) *pour tout* $\alpha \in \Sigma^\natural$, *il existe un* $n_\alpha \in N^\natural$ *tel que* $\nu^\natural(n_\alpha) = r_\alpha$ *et que*

$$U^\natural_\alpha . n_\alpha . H^\natural . U^\natural_\alpha \cup U^\natural_\alpha . H^\natural . U^\natural_{\alpha+}$$

soit un sous-groupe de $G^\natural$;

(ii) *pour toute racine* $\beta \in \Sigma$, *il existe un* $\beta' \in \Sigma^\natural$ *tel que* $\partial\beta'$ *soit parallèle à* $\partial\beta$;

(iii) $H^\natural$ *et les* $U^\natural_\alpha$ *engendrent* $G^\natural$.

Alors $E^\natural$ *est un système radiciel irréductible de type affine et* $(N^\natural, \nu^\natural, U^\natural_{\alpha (\alpha \in \Sigma^\natural)})$ *est une donnée radicielle de type* $\Sigma^\natural$ *pour* $G^\natural$. *De plus, on a*

$$H^\natural = P_{A^\natural} \cap G^\natural.$$

(*) Séance du 24 octobre 1966.

(1) *Cf.* par exemple, J. Tits, *Ann. of Math.*, 80, 1964, p. 313-329.

(2) Pour plus de détails sur les nos 3 et 4, *cf.* F. Bruhat et J. Tits, *Un théorème de point fixe*, notes polycopiées, Inst. Hautes Ét. Sci., avril 1966, et aussi J. Tits, *Structures et groupes de Weyl*, Sém. Bourbaki, exp. no 288, février 1965.

(3) Pour des résultats analogues, *voir* N. Iwahori et H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups* (*Publ. Math. I. H. E. S.*, 25, 1965, p. 5-48) et H. Hijikata, *On arithmetic of p-adic Steinberg groups*, notes polycopiées, Yale University, 1965.

(*Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 5e
et *Mathematisches Institut der Universität,*
Wegeler Strasse, Bonn, Allemagne.)

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY
mathematical sciences publishers
nonprofit scientific publishing
http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.