SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES, II

Par

Masuo HUKUHARA

TABLE DES MATIÈRES

Nous avons déjà remarqué l'importance des théorèmes d'existence[1]. Dans notre présent mémoire nous appliquerons ces théorèmes à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires.

Le chapitre I est censacré à l'étude des points singuliers réguliers. Nous supposerons seulement que les coefficients soient développables asymptotiquement et discuterens si les solutions sont développables asymptotiquement en séries qui satisfont formellement aux équations données. On en déduit immédiatement[2] que si les développements des coefficients ont des rayons de convergence positifs les séries obtenues formellement ont aussi des rayons de convergence positifs.

---

(1) Voir, par exemple, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, Jour. Fac. Sc. Hokkaido imp. Univ., 2 (1934).

(2) Ce mode de raisonnements a été utilisé dans mon livre, 福原, 常微分方程式論 (岩波講座).

Le chapitre II est consacré à l'étude des points singuliers irréguliers. Récemment M. TRJITZINSKI(1) a discuté la développabilité asymptotique des solutions sans aucune restriction sur les racines de l'équation caractéristique. Il a introduit les notions *Q curves, regions R* etc. très importantes dans sa théorie. Mais dans notre théorie il n'est pas nécessaire d'introduire ces notions. Il suffit de considérer seulement les directions singulières.

CHAPITRE I.

POINTS SINGULIERS RÉGULIERS

I. Rappel des théorèmes fondamentaux.

1. Soit donné le système différentiel

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, \ldots, y_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où t est une variable réelle. Quant aux variables $y_1, \ldots, y_n$ nous les supposerons complexes pour fixer les idées(2). Le système des nombres $(t, y_1, \ldots, y_n)$ représente un point dans l'espace à $2n+1$ dimensions R. Soit D un ensemble ouvert dans R. Nous supposons(3) que les fonctions $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ soient continues dans D. Alors *le système* (1) *admet au moins une courbe intégrale passant par un point quelconque donné dans D.*

Soit d'autre part $S(y_1, \ldots, y_n)$ une fonction de M. KAMKE, c'est-à-dire une fonction jouissant des propriétés suivantes.

1° $S(y_1, \ldots, y_n)$ est continue et non negative pour tout système de n nombres finis $(y_1, \ldots, y_n)$.

(1) TRJITZINSKI, Analytic Theory of linear differential equations, Acta Math., 62 (1934).

(2) Mais les conclusions restent valables dans le cas où elles sont réelles.

(3) $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ est dit point de discontinuité de première espèce de la fonction $f(t, y_1, \ldots, y_n)$ si les deux limites

$$\lim f(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (t \to t_0+0,\ y_1 \to y_1^0, \ldots, y_n \to y_n^0)$$
$$\lim f(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (t \to t_0-0,\ y_1 \to y_1^0, \ldots, y_n \to y_n^0)$$

existe et sont finies et différentes. Les théorèmes peuvent s'étendre au cas où les fonctions $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ admettent des points de discontinuité de première espère situés dans un nombre fini de d'hyperplans perpendiculaires à l'axe de t.

2° $S(y_1, \ldots, y_n) = 0$ entraîne $(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0)$.
3° $S(y_1, \ldots, y_n) \to +\infty$ si $|y_1| +, \ldots + |y_n| \to +\infty$.
4° On a

$$D_t^{\pm} S(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqq S(D_t^{\pm} y_1(t), \ldots, D_t^{\pm} y_n(t))$$

pour tout système de fonctions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ admettant les dérivées à droite et à gauche.

Par exemple, on peut prendre pour $S(y_1, \ldots, y_n)$ les fonctions

$$\max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}, \quad |y_1| + \ldots + |y_n|, \quad \sqrt{|y_1|^2 + \ldots |y_n|^2}.$$

Théorème de comparaison. *Soient $y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ une solution de* (1) *continue dans l'intervalle $t_0 \leqq t < t_0 + a$, et $\chi(t)$ une fonction continue et admettant la dérivée à droite dans le même intervalle. Pour que l'on obtienne*

$$S(y_1(t), \ldots, y_n(t)) \leqq \chi(t) \tag{2}$$

dans cet intervalle, il suffit que l'on ait (2) *pour $t = t_0$ et*

$$S(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y)) < D_t^{+} \chi(t) \tag{3}$$

pour

$$S(y_1, \ldots, y_n) = \chi(t). \tag{4}$$

Théorème d'existence. *Soit $\chi(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $t_0 \leqq t < t_0 + a$. Supposons que le domaine D contienne les points (t, y) tels que*

$$t_0 \leqq t < t_0 + a, \quad S(y_1, \ldots, y_n) \leqq \chi(t),$$

et que l'on ait (3) *pour* (4). *Soit (t_0, y^0) un point quelconque tel que*

$$S(y_1^0, \ldots, y_n^0) \leqq \chi(t_0).$$

Alors la solution de (1) *telle que $y_j(t_0) = y_j^0$ existe et satisfait à l'inégalité* (2) *dans l'intervalle $t_0 \leqq t < t_0 + a$.*

Théorème de comparaison. *Soient $y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ une solution de* (1) *continue dans l'intervalle*(1) *$t_0 < t < t_0 + a$ et $\chi(t)$ une fonction continue et admettant la dérivée à droite dans le même intervalle. Pour que l'on ait* (2) *pour $t_0 < t < t_0 + a$, il suffit que l'on*

(1) t_0 peut être $-\infty$.

ait (3) *pour* (4) *et qu'il existe une suite de nombres décroissants* $\{\tau_j\}$ *convergeant vers* t_0 *et telle que l'on ait* (2) *pour* $t = \tau_j$.

Théorème d'existence. *Soient* $\chi(t)$ *une fonction continue dans l'intervalle* $t_0 < t < t_0 + a$ *satisfaisant à* (3) *pour* (4) *et* $\{\tau_j\}$ *une suite de nombres décroissants convergeant vers* t_0. *Si le domaine D contient les points* (t, y) *tels que*

$$t_0 < t < t_0 + a\,, \quad S(y_1, \ldots, y_n) \leqq x(t)\,,$$

il existe au moins une solution telle que l'on ait (2) *pour* $t = \tau_j$. *Cette solution est continue dans l'intervalle* $t_0 < t < t_0 + a$ *et satisfait à l'inégalité* (2).

Prenons pour $\chi(t)$ une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y)\,. \tag{5}$$

On peut alors remplacer (3) par

$$S\big(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y)\big) < F\big(t, S(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y))\big). \tag{6}$$

Si $F(t, Y)$ est continue dans un ensemble ouvert Δ et si, quel que soit le point (τ, η) dans Δ, la solution de (5) satisfaisant à la condition $y(\tau) = \eta$ est unique, on peut remplacer (6) par

$$S\big(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y)\big) \leqq F\big(t, S(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y))\big). \tag{7}$$

2. On peut appliquer les théorèmes précédents au problème: Chercher si la solution de (1) continue dans un intervalle I et satisfaisant à une certaine condition (α) est unique. En effet, soit $y_1 = \varphi_1(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t)$ une solution répondant à la question. Posons

$$z_1 = y_1 - \varphi_1(t)\,, \ \ldots, \ z_n = y_n - \varphi_n(t)\,.$$

On aura

$$\frac{dz_j}{dt} = g_j(t, z_1, \ldots, z_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{8}$$

où

$$g_j(t, z_1, \ldots, z_n) = f_j(t, z_1 + \varphi_1, \ldots, z_n + \varphi_n) - f_j(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,.$$

A une solution de (1) satisfaisant à la condition (α) correspond une solution de (8) satisfaisant à une certaine condition (β) et réciproquement. Il suffit donc de chercher si l'équation (8) n'admet qu'une solution continue dans I et satisfaisant à la condition (β). Pour affirmer l'unicité de la solution il suffit de montrer que l'on peut faire correspondre à un nombre positif quelconque ε une fonction $\chi(t)$ continue dans I et telle que

$$S(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \leqq \chi(t) \leqq \varepsilon$$

dans I pour toute solution de (8) satisfaisant à la condition (β).

Exemple. Considérons le sytème d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) y_k + b_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

où $a_{jk}(t)$, $b_j(t)$ sont des fonctions continues et satisfaisant aux inégalités

$$|a_{jk}(t)| \leqq A, \quad |b_j(t)| \leqq Be^{Nt} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

dans l'intervalle $-\infty < t \leqq t_0$. Cherchons si le système (9) admet une solution telle que

$$|y_j(t)| \leqq Ke^{Nt} = \chi(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

dans $-\infty < t \leqq t_0$. Posons

$$S(y_1, \ldots, y_n) = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$

$$f_j(t, y) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) y_k + b_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura

$$S(f_1(t, y), \ldots, f_n(t, y)) \leqq nAS(y_1, \ldots, y_n) + Be^{Nt}.$$

Il suffit donc que l'on ait

$$nA\chi(t) + Be^{Nt} < \chi'(t)$$

pour $-\infty < t \leqq t_0$. Cette inégalité est équivalente à

$$(N - nA)K > B.$$

Si $N > nA$, cette inégalité est satisfaite par un nombre positif K suffisamment grand. Montrons de plus que la solution est unique. Plus précisément la solution de (9) telle que

$$y_j = o(e^{nAt}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t \to -\infty$ est unique. En effet, la différence de ces deux solutions est la solution du système différentiel homogène

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) z_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfaisant aux conditions

$$z_j = o(e^{nAt}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut la comparer avec la solution de

$$\frac{dY}{dt} = nAY .$$

Quelque petit que soit le nombre positif ε, cette équation admet une solution $Y = \chi(t)$ telle que

$$0 < \chi(t) \leqq \varepsilon \qquad (-\infty < t \leqq t_0)$$

$$\lim_{t \to -\infty} \chi(t) e^{-nAt} > 0 ,$$

par exemple, $Y = \varepsilon e^{nA(t-t_0)}$. Nous obtenons donc

$$|z_j| \leqq \chi(t) \leqq \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, ce qui exige $z_j \equiv 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Considérons maintenant les équations différentielles

$$\text{(11)} \qquad \frac{dy_j}{dy} = f_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (f = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où la variable indépendante x est complexe. Soit Γ une courbe n'admettant qu'un nombre fini de points anguleux. Si le point de Γ est donné par $x = x(t)$ $(t_0 < t < t_0 + a)$, la solution de (1) considérée comme fonction de t satisfait aux équations différentielles

$$\text{(12)} \qquad \frac{dy_j}{dt} = x'(t) f_j(x(t), y_1, \ldots\ldots, y_n) \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

et réciproquement. La variable t étant reelle les théorèmes exposés au n° 1 s'appliquent aux équations (12).

Exemple. Considérons les équations différentielles linéaires

$$\text{(13)} \qquad \frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k + b_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où $a_{jk}(x)$, $b_j(x)$ sont des fonctions continues sur la courbe Γ: $x = t + is(t)$ $(-\infty < t \leqq t_0)$ et satisfaisant aux inégalités

$$|a_{jk}(x)| \leqq A , \qquad |b_j(x)| \leqq Be^{-Nt} .$$

Nous supposerons de plus que $|s'(t)| \leqq C$. Si l'on prend t pour variable indépendante on aura

$$\frac{dy_j}{dt} = (1+is'(t))\Big[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)y_k + b_j(x)\Big] \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

auxqelles on peut appliquer les résultats du n° précédent. Si $N > nA\sqrt{1+C^2}$, nons prenons un nombre positif K suffisamment grand de manière que

$$(N - nA\sqrt{1+C^2})K > B\sqrt{1+C^2}\ .$$

Alors le système (13) admet une solution satisfaisant aux inégalités

$$|y_j(x)| \leqq Ke^{Nt} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur Γ. La solution de (13) satisfaisant aux conditions

$$y_j(x) = o\,(e^{nAt\sqrt{1+C^2}}) \qquad (f = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur Γ est unique.

II. Développements asymptotiques.

4. Considérons les équations différentielles linéaires

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)y_k + a_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où les coefficients $a_{jk}(x)$, $a_j(x)$ sont des fonctions continues sur la courbe[1] Γ:

$$x = t + is(t) \qquad (-\infty < t \leqq t_0,\ |s'(t)| \leqq C)$$

et développables asymptotiquement comme il suit:

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{jk}(x) \sim \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_{jk}^{(r)} e^{rx} & (j, k = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,, \\ a_j(x) \sim \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_j^{(r)} e^{rx} & (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,. \end{cases}$$

Nous supposons l'existence d'un système de n séries

$$(3) \qquad y_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_j^{(r)} e^{rx} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

qui satisfont formellement aux équations données (1). Nous allons démontrer *l'existence et l'unicité de la solution de* (1) *développable asymptotiquement en séries* (3).

(1) Nous ne considérerons que la courbe n'admettant qu'un nombre fini de points anguleux.

Posons

$$(4) \qquad y_j = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} e^{rx} + z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) .$$

On aura

$$(5) \qquad \frac{dz_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) z_k + b_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où l'on a les développements asymptotiques

$$(6) \qquad b_j(x) \sim \sum_{r=N}^{\infty} b_j^{(r)} e^{rx} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur la courbe Γ. On peut donc trouver deux constantes A et B_N telles que l'on ait

$$(7) \qquad |a_{jk}(x)| \leqq A, \quad |b_j(x)| \leqq B_N e^{Nt} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur Γ, A ne dépendant pas de N. Si N est très grand de sorte que $N > nA\sqrt{1+C^2}$, on peut déterminer K de manière que

$$(8) \qquad (N - nA\sqrt{1+C^2})K > B_N\sqrt{1+C^2} .$$

Les résutats du n° 3 s'appliquent. Donc le système (5) admet une solution et une seule telle que l'on ait

$$(9) \qquad z_j(x) = o(e^{nAt\sqrt{1+C^2}}) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur Γ, et cette solution satisfait aux inégalités

$$(10) \qquad |z_j(x)| \leqq Ke^{Nt} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sur Γ. Nous la désignerons par

$$z_1 = \psi_{1,N}(x), \ \ldots\ldots, \ z_n = \psi_{n,N}(x) .$$

Posons

$$(11) \qquad \varphi_{j,N}(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} e^{rx} + \psi_{j,N}(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) .$$

Le système des n fonctions $y_j = \varphi_{j,N}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ est une solution de (1) telle que l'on ait

$$(12) \qquad y_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(r)} e^{rx} + O(e^{Nx})$$

sur Γ. Réciproquement à une telle solution correspond une solution de (5) telle que $z_j = O(e^{Nt})$ sur Γ. On en conclut que le système (1) admet une solution et une seule telle que l'on ait (12) sur Γ. Il est maintenant facile de voir que les fonctions $\varphi_{j,N}(x)$ sont indépendantes de N pourvu que N soit assez grand. En effet, si $N' > N$, la solution $y_1 = \varphi_{1,N'}(x), \ldots, y_n = \varphi_{n,N'}(x)$ vérifie évidemment les relation (12). Une telle solution étant unique, on a nécessairement

$$\varphi_{1,N'}(x) = \varphi_{1,N}(x), \ldots, \quad \varphi_{n,N'}(x) = \varphi_{n,N}(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Désignons $\varphi_{j,N}(x)$ par $\varphi_j(x)$. On aura

$$\varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} e^{rx} + O(e^{Nx}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

sur Γ quelque grand que soit l'entier positif N. La proposition annoncée est donc démontrée.

5. Supposons maintenant que les fonctions $a_{jk}(x)$, $a_j(x)$ soient régulières dans le domaine[1]

$$\theta_1 < \arg x < \theta_2, \quad \Re x < t_0 \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi\right) \tag{14}$$

et continues dans l'ensemble de fermeture $\bar{D}$ de D et que les développements asymptotiques soient valables dans $\bar{D}$. Prenons un angle θ_0 entre $\frac{\pi}{2}$ et θ_1: $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \theta_1$. Soient x_1 le point de la demi-droite $0g_1$: $\arg x = \theta_1$ dont l'abscisse est t_0 et x_2 le point de la demi-droite $0g_2$: $\arg x = \theta_2$ dont l'abscisse est t_0 (Fig. 1). Prenons sur la demi-droite x_2g_2 un point quelconque x''. La demi-droite partant du point x'' et faisant l'angle θ_0 avec l'axe réel rencontre la demidroite x_1g_1 en un point x'. Prenons pour Γ la ligne brisée $\overline{x_2x''x'g_1}$. Si $x = t + is(t)$ représente le point de Γ, on aura $|s'(t)| \leqq C$ où

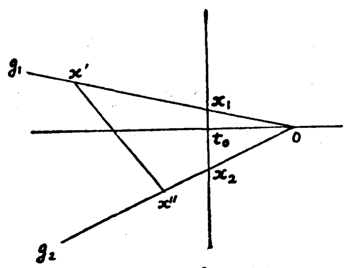

Fig. 1.

$$C = \max\{|\tan\theta_0|, |\tan\theta_1|, |\tan\theta_2|\}.$$

On peut donc appliquer les résultats du n° précédent. Désignons par

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

la solution de (1) développable asymptotiquemsnt en série (3) sur la courbe Γ. Cette solution est évidemment indépendante de la position de la droite $\overline{x'x''}$. Posons

(1) Nous désignerons par $\Re x$ la partie réelle de x.

$$\varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} e^{rx} + \psi_{j,N}(x) . \tag{15}$$

On aura

$$|\psi_{j,N}(x)| \leqq Ke^{Nt} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{16}$$

sur Γ, le nombre K étant choisi de manière que l'on ait (8) ; A et B_N sont des nombres tels que l'on ait (7) dans $\bar{D}$. A, B_N et C étant indépendants de la droite $\overline{x'x''}$, on peut supposer le nombre K aussi indépendant de la position de la droite $\overline{x'x''}$. On aura donc (16) dans le domaine limité par la ligne brisée $\overline{g_2x''x'g_1}$. Cela prouve les relations (13) dans le domaine $\bar{D}$. Par conséquent, *les équations admettent une solution et une seule développable asymptotiquement en série* (3) *dans* $\bar{D}$.

Remarque 1. La démonstration s'applique sans aucune modification essentielle au cas où les coefficients de la solution formelle (3) sont des polynomes de x.

Remarque 2. Les équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k + e^{\rho x} a_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

peuvent se ramener au cas étudié par le changement de variables

$$y_j = e^{\rho x} z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) .$$

Remarque 3. Soit $f(x)$ une fonction régulière dans le domaine D défini par (14), développable asymptotiquement en série

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{rx}$$

et admettant la période $2\pi i$. La fonction $f(\log \xi) = F(\xi)$ est uniforme et bornée dans le voisinage de de l'origine. Elle est donc régulière à l'origine et l'on a le développement

$$F(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \xi^r .$$

D'autre part on aura le développement asymptotique

$$F(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \xi^r$$

à l'origine. On doit donc avoir $\alpha_r = a_r$. Par suite

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{rx} .$$

Cela posé, supposons que les fonctions $a_{jk}(x)$ et $a_j(x)$ admettent la période $2\pi i$. La solution $y_j = \varphi_j(x)$ développable asymptotiquement en séries (3) admet aussi la période $2\pi i$. En effet, $y_j = \varphi_j(x+2\pi i)$ est une solution de (1) développable asymptotiquement en séries (3). Une telle solution étant unique, on aura $\varphi_j(x+2\pi i) = \varphi_j(x)$. Par suite

$$\varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_j^{(r)} e^{rx} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) .$$

Si l'on prend $\xi = e^x$ pour variable indépendante, on retrouvera les résutats classiques sur les points singuliers réguliers.

III. Intégration formelle.

6. Les équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

peuvent s'écrire

$$(2) \qquad \frac{dY}{dx} = A(x)Y ,$$

en empoyant les matrices

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{23}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Faisons le changement de variables

$$(3) \qquad Y = P(x)Z .$$

Soit

$$(4) \qquad \frac{dZ}{dx} = B(x)Z$$

l'équation transformée de (2). On aura

$$(5) \qquad B(x) = P^{-1}(x)\left\{A(x)P(x) - \frac{d}{dx}P(x)\right\} .$$

Supposons que $A(x)$ et $P(x)$ soient développables asymptotiquement en séries de puissances entières de e^x:

$$(6)\qquad A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A^{(r)} e^{rx} ,$$

$$(7)\qquad P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P^{(r)} e^{rx}$$

et que le déterminant $|P^{(0)}|$ soit différent de 0. Nous allons résoudre formellement le problème : déterminer $P(x)$ de manière que $B(x)$ prenne la forme la plus simple. $B(x)$ est nécessairement développable asymptotiquement en série de puissances de e^x:

$$(8)\qquad B(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B^{(r)} e^{rx} .$$

Prenons d'abord pour P une matrice formée des éléments constants. On aura alors

$$P^{-1} A^{(r)} P = B^{(r)} .$$

On peut déterminer P de manière que $B^{(0)}$ soit de la forme canonique. Nous supposons donc dès le début que $A^{(0)}$ soit de la forme canonique. Alors il est naturel de prendre $P^{(0)} = E_n$, E_n désignant la matrice unité de dimensions n. En comparant les coefficients de e^{rx} dans les deux membres de (5), nous obtenons

$$(9)\qquad B^{(r)} = A^{(0)} P^{(r)} - P^{(r)} A^{(0)} - r P^{(r)} + \dots .$$

les termes non écrits ne dépendant que de $A^{(1)}, \dots, A^{(r-1)}, P^{(1)}, \dots, P^{(r-1)}$. $A^{(0)}$ ayant la forme canonique, elle s'écrit

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} A^{(0)}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{(0)}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & A^{(0)}_m \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A^{(0)}_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}}_{n_j}$$

$$(n_1 + \dots + n_m = n) .$$

Ecrivons la matrice $A(x)$ sous la forme

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & \dots & A_{1m}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) & \dots & A_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(x) & A_{m2}(x) & \dots & A_{mm}(x) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_{jk}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}^{jk}(x) & a_{12}^{jk}(x) & \dots & a_{1n_k}^{jk}(x) \\ a_{21}^{jk}(x) & a_{22}^{jk}(x) & \dots & a_{2n_k}^{jk}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_j1}^{jk}(x) & a_{n_j2}^{jk}(x) & \dots & a_{n_jn_k}^{jk}(x) \end{pmatrix}$$

$\underset{jk}{A}(x)$, $\underset{jk}{a}_{uv}(x)$ sont développables asymptotipuement en séries de puissances de e^x:

$$\underset{jk}{A}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \underset{jk}{A}^{(r)} e^{rx} ,$$

$$\underset{jk}{a}_{uv}(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} \underset{jk}{a}_{uv}^{(r)} e^{rx} .$$

Nous empoierons les notations analogues pour les matrices $P(x)$ et $B(x)$. La relation (9) est équivalente aux m^2 relations

$$\underset{j}{A}^{(0)} \underset{jk}{P}^{(r)} - \underset{jk}{P}^{(r)} \underset{k}{A}^{(0)} - r \underset{jk}{P}^{(r)} = \underset{jk}{B}^{(r)} + \ldots . \qquad (j, 2, \ldots , m) .$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$\underset{jr}{P}^{(r)} = \bar{P} , \qquad p_{uv}^{(r)} = \bar{p}_{uv} .$$

On aura

$$A^{(0)}\bar{P} - \bar{P}A^{(0)} - r\bar{P} = (\lambda_j - \lambda_k - r)\bar{P}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\bar{p}_{12} & -\bar{p}_{13} & \ldots & -\bar{p}_{1,n_k} & 0 \\ \bar{p}_{11} - \bar{p}_{22} & \bar{p}_{12} - \bar{p}_{23} & \ldots & \bar{p}_{1,n_k-1} - \bar{p}_{2,n_k} & \bar{p}_{1,n_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{p}_{n_j-1,1} - \bar{p}_{n_j,2} & \bar{p}_{n_j-1,2} - \bar{p}_{n_j,3} & \ldots & \bar{p}_{n_j-1,n_k-1} - \bar{p}_{n_j,n_k} & \bar{p}_{n_j-1,n_k} \end{pmatrix} .$$

Si donc $\lambda_j - \lambda_k \neq r$, on peut déterminer $\bar{p}_{uv}$ de manière que les éléments de la matrices $\underset{j}{A}^{(0)}\bar{P} - \bar{P}\underset{k}{A}^{(0)} - r\bar{P}$ prennent des valeurs quelconques données à l'avance. Nous pouvons donc réduire $\underset{jk}{B}^{(r)}$ à la matrice nulle. Si $\lambda_j - \lambda_k = r$, on peut déterminer $\bar{p}_{uv}$ de manière que les éléments de la matrice $\underset{j}{A}^{(0)}\bar{P} - \bar{P}\underset{k}{A}^{(0)} - r\bar{P}$ sauf ceux de la dernière colonne prennent de telles valeurs que l'on veut. Nous déterminons donc $\bar{p}_{uv}$ de manière que les éléments de $\underset{jk}{B}^{(r)}$ soient nuls sauf ceux de la dernière colonne. Alors le développement de la matrice $B(x)$ ne contient qu'un nombre fini de termes. Nous pouvons donc poser

$$B(x) = \sum_{r} B^{(r)} e^{rx} .$$

Nous dirons que $B(x)$ est de la forme canonique.

7. Si $B(x)$ est de la forme canonique, les n variables z_j se partagent en plusieurs groupes, et les variables appartenant à un même groupe satisfont aux équations de la forme suivante.

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dz_1}{dx} = \lambda_1 z_1 & \\
\dfrac{dz_j}{dx} = z_{j-1} + \lambda_1 z_j & (j = 2, \ldots\ldots, N_1) \\
\dfrac{dz_j}{dx} = b_{j1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} z_{N1} + \lambda_2 z_j & (j = N_1+1) \\
\dfrac{dz_j}{dx} = b_{j1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} z_{N1} + z_{j-1} + \lambda_2 z_j & (j = N_1+2, \ldots\ldots, N_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\dfrac{dz_j}{dx} = \sum_{r=1}^{k-1} b_{jr} e^{(\lambda_k-\lambda_r)x} z_{Nr} + \lambda_k z_j & (j = N_{k-1}+1) \\
\dfrac{dz_j}{dx} = \sum_{r=1}^{k-1} b_{jr} e^{(\lambda_k-\lambda_r)x} z_{Nr} + z_{j-1} + \lambda_k z_j & (j = N_{k-1}+2, \ldots\ldots, N_k)
\end{array}\right.$$

les différences $\lambda_2-\lambda_1$, $\lambda_3-\lambda_2$, $\ldots$, $\lambda_k-\lambda_{k-1}$ sont des entiers non négatifs, λ_j, b_{jr} des constantes. On peut intégrer ce système par quadratures, et l'on voit sans peine que

$$z_j = e^{\lambda_s x}\left\{C_j + C_{j-1}P_{j,1}(x) + \ldots\ldots + C_1 P_{j,j-1}(x)\right\}$$
$$(j = N_{s-1}+1, \ldots\ldots, N_s)$$

$P_{j,r}(x)$ étant un polynome de degré au plus égal à r, $C_1, \ldots, C_j$ des constantes arbitraires. En faisant le changement de variables $Y = P(x)Z$, on trouve n solutions formelles de l'équation (2).

IV. Réduction analytique à la forme canonique.

8. Nous avons démontré l'existence d'une matrice

$$(1) \qquad P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P^{(r)} e^{rx}$$

qui transforme formellement la matrice donnée

$$(2) \qquad A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A^{(r)} e^{rx}$$

à la matrice de forme canonique

$$(3) \qquad B(x) = \sum_{r} B^{(r)} e^{rx} .$$

La transformation est donnée par la formule

$$P^{-1}(x)A(x)P(x)-P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx} = B(x)$$

qui peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{dP(x)}{dx} = A(x)P(x)-P(x)B(x) .$$

Cette équation peut être considérée comme un système de n^2 équations différentielles linéaires relatives aux éléments de la matrice $P(x)$. Cette équation admet une solution formelle (1). On peut donc appliquer les résultats de la section II. Par suite, *si le développement asymptotique* (2) *est valable sur la courbe Γ donnée par l'équation*

$$x = t+is(t) \qquad (-\infty < t \leqq t_0\,, \quad |s'(t)| \leqq C)$$

l'équation (4) *admet une solution développable asymptotiquement en série* (1') *sur la courbe Γ. Si $A(x)$ est régulière dans le domaine D:*

$$\theta_1 < \arg x < \theta_2\,, \quad \Re x < t_0 \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{3}{2}\pi\right)$$

et continue dans $\bar{D}$ et si le développement asymptotique (2) *est valable dans $\bar{D}$, le développement asymptotique* (1) *d'une solution de* (4) *est aussi valable dans $\bar{D}$.*

Puisque l'équation transformée

$$(5) \qquad \frac{dZ}{dx} = B(x)Z$$

s'intègre par quadratures, on trouve n solutions indépendantes de l'équation donnée

$$(6) \qquad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

et les développements asymptotiques de ces solutions sont valables dans le domaine où le développement asymptotique (2) l'est.

CHAPITRE II.

POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS

I. Théorèmes fondamentaux et leurs applications.

9. Considérons les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dt} = f_j(t\,, y_1\,, \ldots\ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où t est une variable réelle. Quant aux variables $y_1, \ldots, y_n$ nous les supposons complexes[1]. Nous avons le théorème d'existence suivant[2].

Soient $\chi_j(t)$, $F_j(t)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ des fonctions continues et positives dans l'intervalle $a<t<b$ et $t_1, \ldots, t_n$ des nombres dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$. $f_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ sont des fonctions continues[3] *dans*

$$a<t<b, \qquad |y_j| \leqq \chi_j(t) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

et satisfaisant aux inégalités

$$|f_j(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq F_j(t) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Soient $y_1^0, \ldots, y_n^0$ n nombres tels que

$$|y_j^0| \leqq \chi_j(t_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Supposons enfin que l'on ait

$$(2) \qquad \left|\int_{t_j}^{t} F_j(t)dt\right| \leqq \operatorname{sgn}(t-t_j)\left\{\chi_j(t)-\chi_j(t_j)\right\} \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

dans l'intervalle $a<t<b$. Alors les équations (1) *admettent au moins une solution telle l'on ait*

$$y_j(t_j)=y_j^0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

et

$$|y_j(t)| \leqq \chi_j(t) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

pour $a<t<b$. Et cette solution satisfait aux inégalités

$$|y_j(t)-y_j^0| \leqq |\chi_j(t)-\chi_j(t_j)| \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Si les fonctions $\chi_j(t)$ sont absolument continues, il suffit pour obtenir (2) que l'on ait

$$F_j(t) \leqq \operatorname{sgn}(t-t_j)\chi_j'(t) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

presque partout.

(1) Voir la note (2) au bas de la page 124.
(2) Voir Hukuhara, loc. cit.
(3) Voir la note (3) au bas de la page 124. On peut faire des hypothèses moins restrictives, mains nous n'insistons pas ici sur ce point.

10. Appliquons le théorème aux équations différentielles linéaires

$$(3) \qquad \frac{dy_j}{dt} = t^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t)\, e^{M_k(t)} y_k + b_j(t)\right\} e^{-M_j(t)} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n);$$

$a_{jk}(t)$, $b_j(t)$ et $M_j(t)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle $t_0 \leqq t < +\infty$ et satisfaisant aux inégalités

$$|a_{jk}(t)| \leqq A, \qquad |b_j(t)| \leqq Bt^{-N}$$
$$(t_0 \leqq t < +\infty, \quad j, k = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

$$(4) \quad \begin{cases} M_j'(t) \leqq -\gamma & (t_0 \leqq t < +\infty, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots, n') \\ M_j'(t) \leqq -\gamma & (t_1 \leqq t < +\infty, \quad j = n'+1, \ldots\ldots, n'') \\ M_j'(t) \geqq 0 & (t_0 < t < t_1, \quad j = n'+1, \ldots\ldots, n'') \\ M_j'(t) \geqq 0 & (t_0 \leqq t < +\infty, \quad j = n''+1, \ldots\ldots, n), \end{cases}$$

où γ est une constante positive. Cherchons si le système (3) admet une solution telle que

$$|y_j| \leqq Kt^{-N} e^{-M_j(t)} \equiv \chi_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Pour qu'il existe une telle solution, il suffit que l'on ait

$$(5) \qquad NK > nAK + B, \quad (\gamma t_0 - N)K > nAK + B.$$

On peut donner à

$$y_j(t_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n')$$
$$y_j(t_1) \qquad (j = n'+1, \ldots\ldots, n'')$$

des valeurs quelconques qui ne surpassent pas en modules les nombres correspondants $\chi_j(t_j)$.

Nous dirons qu'une telle solution est unique. En effet, la différence de ces deux solutions est une solution des équations

$$(6) \qquad \frac{dz_j}{dt} = t^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) e^{M_k(t) - M_j(t)} z_k \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

telle que

$$z_j = O(t^{-N} e^{-M_j(t)}) \quad (t \to +\infty, \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$
$$z_j(t_0) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'),$$
$$z_j(t_1) = 0 \qquad (j = n'+1, \ldots\ldots, n'').$$

Nous démontrerons la proposition plus générale:

Les équations (6) *n'admettent qu'une solution telle que*

$$(7) \qquad \begin{cases} z_j(t_0) = 0 & (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'), \\ z_j(t_1) = 0 & (j = n'+1, \ldots\ldots, n''), \\ z_j(t) = o(t^{-nA}e^{-M_j(t)}) & (j = n''+1, \ldots\ldots, n). \end{cases}$$

Soit t_2 un nombre quelconque plus grand que t_1. Prenons une solution telle que l'on ait (7):

$$z_1 = \psi_1(t), \ \ldots\ldots, \ z_n = \psi_n(t)$$

et posons

$$K = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left\{ \left| \psi_1(t) t^{nA} e^{M_1(t)} \right|, \ \ldots\ldots, \left| \psi_n(t) t^{nA} e^{M_n(t)} \right| \right\}.$$

On aura alors

$$\left| \frac{dz_j}{dt} \right| \leqq nAKt^{-nA-1}e^{-M_j(t)} \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_2, \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

$$\operatorname{sgn}(t-\tau_j)\frac{d}{dt}t^{-nA}e^{-M_j(t)} \geqq nAt^{-nA-1}e^{-M_j(t)}$$

$$(t_0 \leqq t \leqq t_2, \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \tau_j &= t_0 & (j &= 1, 2, \ldots\ldots, n'), \\ \tau_j &= t_1 & (j &= n'+1, \ldots\ldots, n''), \\ \tau_j &= t_2 & (j &= n''+1, \ldots\ldots, n). \end{aligned}$$

On aura donc

$$|\psi_j(t) - \psi_j(\tau_j)| \leqq \chi_j(t) - \chi_j(\tau_j) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_2, \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

en posant

$$\chi_j(t) = Kt^{-nA}e^{-M_j(t)} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Si

$$|\psi_j(\tau_j)| < \chi_j(\tau_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

on aura

$$|\psi_j(t)| < \chi_j(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_2, \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

ce qui est contraire à la définition de la constante K. On aura donc

$$\max_{j=n''}^{n} \left\{ \psi_j(t_2)\, t_2^{nA} e^{M_j(t_2)} \right\} = K\,.$$

Cela exige que $K \rightarrow 0$ avec $\dfrac{1}{t_2}$. Puisque

$$|\psi_j(t)| \leqq K t^{-nA} e^{M_j(t)} \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_2\,,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

la solution doit être identiquement nulle.

11. Considérons maintenant les équations différentielles linéaires

$$(8) \qquad \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k + b_j(x) \right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$\lambda_j(x)$, $a_{jk}(x)$ et $b_j(x)$ sont des fonctions continues sur une courbe Γ:

$$x = x(t) \qquad (t_0 \leqq t < +\infty\,,\ |x'(t)| = 1)$$

et telles que

$$(9) \qquad |a_{jk}(x)| \leqq A\,, \qquad |b_j(x)| \leqq B\,|x|^{-N}\,.$$

Quant à la courbe Γ nous supposons qu'il existe deux constantes L_1 et L_2 telles que

$$L_1 |x| \leqq t \leqq L_2 |x| \qquad (t_0 \leqq t < +\infty)\,.$$

Posons

$$(10) \qquad \int \lambda_j(x) dx = \Lambda_j(x)\,, \quad \Re\, \Lambda_j(x(t)) = M_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

les intégrales étant prises le long de la courbe Γ. Si l'on pose

$$(11) \qquad y_j = e^{\Lambda_j(x)} z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

et si l'on prend t pour variable indépendante, les équations transformées prennent la forme

$$\frac{dz_j}{dt} = t^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(t) e^{M_k(t)} z_k + \beta_j(t) \right\} e^{-M_j(t)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on a

$$|\alpha_{jk}(t)| \leqq A L_2 \qquad (j\,, k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$|\beta_j(t)| \leqq B L_2^{N+1} t^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t_0 \leqq t < +\infty$. Supposons vérifiées les inégalités (4). On peut alors appliquer les résultats du n° précédent. On obtient ainsi la proposition suivante.

Supposons que

$$N > nAL_2, \qquad (\gamma t_0 - N) < nAL_2.$$

Soient $y_j^0 (j = 1, 2, \ldots, n'')$ *des nombres donnés. Alors les équations* (8) *admettent une solution et une seule telle que*

$$\begin{aligned} y_j(x_0) &= y_j^0 && (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'), \\ y_j(x_1) &= y_j^0 && (j = n'+1, \ldots\ldots, n''), \\ y_j(x) &= o(x^{-nAL_2}) && (t \to +\infty,\ j = n''+1 \ldots\ldots, n), \end{aligned}$$

où x_0 *et* x_1 *sont les points de* Γ *correspondant aux valeurs* t_0 *et* t_1 *du paramètre* t. *Cette solution satisfait aux inégalités*

$$|y_j(x)| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

si K *est un nombre tel que l'on ait*

$$\begin{aligned} &(N - nAL_2)L_1^N K > BL_2^{N+1}, \\ &(\gamma t_0 - N - nAL_2)L_1^N K > BL_2^{N+1}, \\ &|y_j^0| \leqq K|x_0|^{-N} && (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'), \\ &|y_j^0| \leqq K|x_1|^{-N} && (j = n'+1, \ldots\ldots, n''). \end{aligned}$$

12. Nous allons maintenant établir un théorème d'existence très utile pour la suite. Soient D un domaine limité par une courbe fermée Γ et ξ, ξ' des points donnés sur Γ. Supposons qu'un point mobile x placé en ξ décrive la courbe Γ dans le sens positif. L'arc parcouru par x pour aller de ξ à ξ' sera désigné par $\widehat{\xi\xi'}$. L'arc complémentaire de $\widehat{\xi\xi'}$ sera désigné par $\widehat{\xi'\xi}$ de sorte que $\widehat{\xi\xi'} + \widehat{\xi'\xi} = \Gamma$. Nous désignons par t l'arc la longueur de l'arc $\widehat{x_0 x}$ de la courbe Γ, x_0 étant un point déterminé sur Γ. Alors le théorème que nous allons établir s'énonce comme il suit[1].

Soient x_j, $\xi_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ *des points donnés sur* Γ, $\chi_j(x)$ *des fonctions régulières dans le domaine* D *et continues et ne s'annulant*

(1) La variable indépendante est supposée complexe.

pas dans l'ensemble de fermeture $\bar{D}$. *Soient* $f_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *des fonctions régulières dans l'ensemble* $\varDelta$ *des points* $(x, y_1, \ldots, y_n)$ *tels que*

$$x \in D, \quad |y_1| \leqq |\chi_1(x)|, \ \ldots, \quad |y_n| \leqq |\chi_n(x)|,$$

continues dans l'ensemble de fermeture $\bar{\varDelta}$ *et telles que*

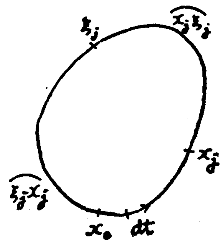

Fig. 2.

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}|\chi_j(x)| > |f_j(x, y_1, \ldots, y_n)| & \text{sur } \widehat{x_j \xi_j} \\ -\dfrac{d}{dt}|\chi_j(x)| > |f_j(x, y_1, \ldots, y_n)| & \text{sur } \widehat{\xi_j x_j} \end{cases}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient enfin $y_1^0, \ldots, y_n^0$ *des nombres tels que*

$$(13) \qquad |y_j^0| \leqq |\chi_j(x_j)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors les équations différentielles

$$(14) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

admettent au moins une solution régulière dans D, *continue dans* $\bar{D}$ *et telle que l'on ait*

$$y_j(x_j) = y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$|y_j(x)| \leqq |\chi_j(x)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dans $\bar{D}$. *Si*

$$|y_j^0| < |\chi_j(x_j)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

on a nécessairement

$$|y_j(x)| < |\chi_j(x)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dans $\bar{D}$.

Considérons un espace R formé des systèmes de n fonctions régulières dans D et continues dans $\bar{D}$. Nous définirons la distance $\|y-z\|$ entre deux points $y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ et $z = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$ de R par

$$\|y-z\| = \max_{x \in \bar{D}} \left\{ |y_1(x)-z_1(x)|, \ \ldots, \ |y_n(x)-z_n(x)| \right\}.$$

R est évidemment un espace de M. Banach. Soit E l'ensemble des points $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ de R tels que

$$|y_1(x)| \leqq |\chi_1(x)|, \ldots\ldots, \quad |y_n(x)| \leqq |\chi_n(x)|$$

dans $\bar{D}$. E est un ensemble fermé et convexe. Considérons la transformation T définie dans E:

$$(15) \qquad Y_j(x) = y_j^0 + \int_{x_j}^{x} f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_n)dx \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Les fonctions transformées $Y_j(x)$ sont régulières dans D et continues dans $\bar{D}$. Le système de ces fonctions est donc un point de R. La transformation T est évidemment continue dans E. De plus l'image de E par T est compacte. Cela résulte de ce fait que les forctions transformées sont également continues et uniformément bornées dans leur ensemble. Nous pouvons donc appliquer le théorème M. SCHAUDER(1) si l'on a

$$(16) \qquad |Y_j(x)| \leqq |\chi_j(x)| \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

dans $\bar{D}$. Des relations (12), (15) on déduit

$$|Y_j(x) - y_j^0| \leqq |\chi_j(x)| - |\chi_j(x_j)|$$

sur Γ. On obtient donc (16) sur Γ, en tenant compte de (13). Puisque les fonctions $\chi_j(x)$ ne s'annulent pas dans $\bar{D}$, les modules $|Y_j(x)/\chi_j(x)|$ atteignent leurs maxima sur Γ. On obtient donc (16) dans $\bar{D}$.

13. Considérons les équations traitées au n° 11. Nous supposerons ici que les fonctions $\lambda_j(x)$, $a_{jk}(x)$ et $b_j(x)$ soient régulières dans un domaine D limité par une courbe fermée Γ et continues dans l'ensemble de fermeture $\bar{D}$. Nous supposons de plus les inégalités (9) vérifiées dans $\bar{D}$. Définissons les fonctions $\Lambda_j(x)$, $M_j(t)$ par (10), t désignant comme au n° précédent la longueur de l'arc $\widehat{x_0 x}$ de la courbe(2) Γ et faisons le changement de variables (11). On aura

$$(17) \qquad \frac{dz_j}{dx} = x^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) e^{\Lambda_k(x)} z_k + b_j(x)\right\} e^{-\Lambda_j(x)}$$
$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

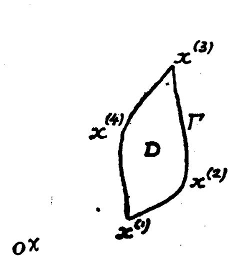

Fig. 3.

Soient $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ quatre points donnés sur la courbe Γ et tels que

$$\frac{d|x|}{dt} \geqq L \qquad \text{sur} \quad \widehat{x^{(1)}x^{(3)}}$$

(1) Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2 (1936).
(2) La fonction $x = x(t)$ qui définit la courbe Γ est supposée continue dans $-\infty < t < +\infty$ de sorte qu'elle admet une période égale à la longueur de la courbe Γ.

$$\frac{d|x|}{dt} \leqq -L \quad \text{sur} \quad \widehat{x^{(3)}x^{(1)}}$$

L étant un nombre positif (Fig. 3). Quant aux fonctions $M_j(t)$ nous faisons les hypothèses suivantes.

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \widehat{x^{(1)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \geqq \gamma & \text{sur} & \widehat{x^{(3)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \widehat{x^{(1)}x^{(2)}} \\ M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \widehat{x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \leqq 0 & \text{sur} & \widehat{x^{(3)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n'+1 \ldots\ldots, n'')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \widehat{x^{(1)}x^{(2)}} \\ M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \widehat{x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \geqq \gamma & \text{sur} & \widehat{x^{(3)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n''+1, \ldots\ldots, n''')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \widehat{x^{(1)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \leqq 0 & \text{sur} & \widehat{x^{(3)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n'''+1, \ldots\ldots, n),$$

γ désignant toujours un nombre positif déterminé. Définissons les points x_j, $\xi_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ par les formules

$$\begin{array}{lll} x_j = x^{(1)}, & \xi_j = x^{(3)} & (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'), \\ x_j = x^{(3)}, & \xi_j = x^{(2)} & (j = n'+1, \ldots\ldots, n''), \\ x_j = x^{(2)}, & \xi_j = x^{(3)} & (j = n''+1, \ldots\ldots, n'''), \\ x_j = x^{(3)}, & \xi_j = x^{(1)} & (j = n'''+1, \ldots\ldots, n). \end{array}$$

En remarquant que

$$-N|x|^{-N-1} \leqq \frac{d}{dt}|x|^{-N} \leqq -NL|x|^{-N-1} \qquad \text{sur} \quad \widehat{x^{(1)}x^{(3)}},$$

$$N|x|^{-N-1} \geqq \frac{d}{dt}|x|^{-N} \geqq NL|x|^{-N-1} \qquad \text{sur} \quad \widehat{x^{(3)}x^{(1)}}$$

on vérifie sans peine que

$$\frac{d}{dt}|\chi_j(x)| \geqq K|x|^{-N-1}e^{-M_j(t)} \min\{NL, \gamma|x|-N\} \quad \text{sur } \widehat{x_j\xi_j},$$

$$-\frac{d}{dt}|\chi_j(x)| \geqq K|x|^{-N-1}e^{-M_j(t)} \min\{NL, \gamma|x|-N\} \quad \text{sur } \widehat{\xi_j x_j}$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

en posant

$$\chi_j(x) = Kx^{-N}e^{-A_j(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

D'autre part les modules des seconds membres de (17) ne surpassent pas

$$(nAK+B)|x^{-N-1}e^{-A_j(x)}| \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

pour

$$|z_j| \leqq |\chi_j(x)| \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Par suite on peut appliquer le théorème du n° précédent si l'on a

$$(18) \qquad K\min\{NL, \gamma R-N\} > nAK+B,$$

R désignant la distance entre 0 et D. Donc, *il existe au moins une solution de* (8) *telle que*

$$(19) \qquad y_j(x_j) = y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

et

$$|y_j(x)| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n;\ x \in \bar{D}).$$

Prenons une solution de (8) satisfsisant aux conditions (19), et posons

$$K = \max_{x\in\bar{D}}\left\{|y_1(x)||x|^N, \ldots\ldots, |y_n(x)||x|^N\right\}.$$

Si l'on avait (18) et

$$|y_j^0| < K|x_j|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

on aurait

$$|y_j(x)| < K|x|^{-N}$$

contrairement à la définition de K. *On aura donc*

$$K \leqq \max\left\{|y_1^0 x_1^N|, \ldots\ldots, |y_n^0 x_n^N|, \frac{B}{\min\{NL, \gamma R-N\}-nA}\right\}.$$

Si

$$y_1^0 = 0\,, \quad \ldots\ldots, \quad y_n^0 = 0\,, \quad B = 0$$

K devient nul, d'où il résulte l'unicité de la solution de (8) *satisfaisant aux conditions* (19).

II. Développements asymptotiques.

14. Considérons les équations différentielles linéaires

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x)y_j + x^{-1}\Big\{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)y_k + a_j(x)\Big\} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,;$$

$\lambda_j(x)$ sont des polynomes[1]

$$\lambda_j(x) = \sum_{r=0}^{m_j} \lambda_j^{(r)} x^{m_j - r}\,,$$

$a_{jk}(x)$, $a_j(x)$ des fonctions continues sur une courbe Γ:

$$x = x(t)\,, \quad (t_0 \leqq t < +\infty\,, \ |x'(t)| = 1\,, \ L_1|x| \leqq t \leqq L_2|x|)$$

et développables asymptotiquement comme il suit

$$(2) \qquad a_{jk}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_{jk}^{(r)} x^{-r}\,, \qquad a_j(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_j^{(r)} x^{-r}\,.$$

Supposons l'existence de n séries qui satisfont formellement aux équations (1):

$$(3) \qquad y_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_j^{(r)} x^{-r} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

Posons

$$m = \max\{m_1, \ldots\ldots, m_n\}$$

$$(4) \qquad y_j = \sum_{r=0}^{N+m} \alpha_j^{(r)} x^{-r} + z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

Les équations en z_j prennent la forme

$$(5) \qquad \frac{dz_j}{dx} = \lambda_j(x)z_j + x^{-1}\Big\{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)z_k + b_j(x)\Big\} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où $b_j(x)$ sont des fonctions continues sur Γ et développables asymptotiquement comme il suit:

$$(6) \qquad b_j(x) \sim \sum_{r=N}^{\infty} b_j^{(r)} x^{-r} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

---

(1) Si $\lambda_j(x) \equiv 0$, nous posons $m_j = -1$, sinon nous supposons $\lambda_j^{(0)} \neq 0$.

On aura sur la courbe Γ

$$(7) \qquad |a_{jk}(x)| \leqq A, \quad |b_j(x)| \leqq B_N |x|^{-N} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Supposons que l'on ait

$$M_j'(t) \leqq -\gamma \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'),$$
$$M_j'(t) \geqq 0 \qquad (j = n'+1, \ldots\ldots, n)$$

pour $t_0 \leqq t < +\infty$ en posant

$$(8) \qquad \Lambda_j(x) = \int_0^x \lambda_j(x)dx, \quad \Re \Lambda_j(x(t)) = M_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

On peut appliquer les résultats du n° 11 aux équations (5) si

$$(9) \qquad N > nAL_2, \quad \gamma t_0 - N > nAL_2.$$

Par suite on obtient la proposition suivante.

Soient $z_{j,N}^0 (j = 1, 2, \ldots, n')$ des nombres donnés. Les équations (5) admettent une solution et une seule telle que

$$(10) \quad \begin{cases} z_j(x_0) = z_{j,N}^0 & (x_0 = x(t_0),\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n') \\ z_j(x) = o(x^{-nAL_2}) & (\text{sur } \Gamma,\ j = n'+1, \ldots\ldots, n) \end{cases}$$

et cette solution satisfait aux inégalités

$$|z_j| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

où K est un nombre tel que l'on ait

$$(N - nAL_2)L_1^N K > B_N L_2^{N+1}$$
$$(\gamma t_0 - N - nAL_2)L_1^N K > B_N L_2^{N+1}$$
$$|z_{j,N}^0| \leqq K|x_0|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n').$$

D'signons cette solution par

$$z_1 = \psi_{1,N}(x), \ldots\ldots, z_n = \psi_{n,N}(x)$$

et posons

$$\varphi_{j,N}(x) = \sum_{r=0}^{N+m} a_j^{(r)} x^{-r} + \psi_{j,N}(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Soient $y_j^0 (j = 1, 2, \ldots, n')$ des nombres donnés et définissons les nombres $z_{j,N}^0$ par

(11) $$y_j^0 = \sum_{r=0}^{N+m} a_j^{(r)} x_0^{-r} + z_{j,N}^0 \qquad (j = 1, 2, \dots , n')\,.$$

Nous obtenons ainsi une solution de (1) telle que

(12) $$\begin{cases} y_j(x_0) = y_j^0 & (j = 1, 2, \dots , n') \\ y_j(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} x^{-r} + O(x^{-N}) & (j = 1, 2, \dots , n)\,. \end{cases}$$

Inversement à une solution de (1) satisfaisant à ces conditions correspondra une solution de (5) telle que l'on ait (10). Cette solution étant unique, la solution de (1) correspondante l'est aussi. On en conclut aisément que les fonctions $\varphi_{j,N}(x)$ sont indépendantes de N. En effet, soit N' un entier plus grand que N. Puisque l'on a (9), les équations en z_j que l'on obtient en posant

$$y_j = \sum_{j=0}^{N'+m} a_j^{(r)} x^{-r} + z_j \qquad (j = 1, 2, \dots , n)$$

admettent une solution telle que l'on ait

$$\begin{aligned} z_j(x_0) &= z_{j,N'}^0 && (j = 1, 2, \dots , n') \\ z_j(x) &= o(x^{-nAL_2}) && (\text{sur } L\,, j = n'+1, \dots , n) \end{aligned}$$

les nombres $z_{j,N'}^0$ étant définis par les relations analogues à (11). C'est la solution

$$z_j = \varphi_{j,N}(x) - \sum_{r=0}^{N'+m} a_j^{(r)} x^{-r} \equiv \psi_{j,N'}(x) \qquad (j = 1, 2, \dots , n)\,.$$

Cette solution sera déterminée d'une manière unique par les conditions[1]

$$\begin{aligned} z_j(x_1) &= \psi_{j,N'}(x_1) && (x_1 = x(t_1),\ j = 1, 2, \dots , n')\,, \\ z_j(x) &= o(x^{-nAL_2}) && (\text{sur } L,\ j = n'+1, \dots , n)\,, \end{aligned}$$

t_1 étant un nombre quelconque tel que $\gamma t_1 - N' > nAL_2$. On peut alors appliquer les résultats du n° 11 et on trouve

$$\psi_{j,N'}(x) = O(x^{-N'}) \qquad (j = 1, 2, \dots , n)\,.$$

Nous arrivons donc à la conclusion suivante.

Les équations (1) *admettent une solution et une seule telle que l'on ait*

$$y_j(x_0) = y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \dots , n')$$

(1) On doit remarquer que les conditions (9) dépendent de N mais non de B_N.

et les développements asymptotiques (3) *sur* Γ, y_j^0 *étant des nombres donnés arbitrairement.*

15. Supposons les fonctions $a_{jk}(x)$, $a_j(x)$ régulières dans le domaine Δ

$$\theta_1 < \arg x < \theta_2$$

et continues dans l'ensemble de fermeture $\bar{\Delta}$ et les développements aspmptotiques valables dans $\bar{\Delta}$. Désignons par $0g_1$, $0g_2$ les demi-droites faisant les angles θ_1 et θ_2 avec l'axe réel (Fig. 4). Soient $x^{(1)}x^{(4)}$, $x^{(2)}x^{(3)}$ deux droites faisant un angle θ_0 avec l'axe réel. Prenons pour Γ la courbe fermée formée des segments $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$, $\overline{x^{(2)}x^{(3)}}$, $\overline{x^{(3)}x^{(4)}}$, $\overline{x^{(4)}x^{(1)}}$ et désignons par D le domaine limité par Γ. Nous voulons appliquer les résultats du n° 13 au domaine D.

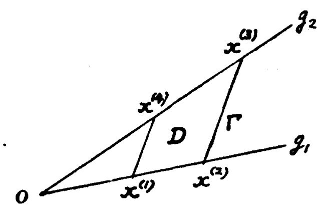

Fig. 4.

Définissons $\Lambda_j(x)$, $M_j(t)$ par (8), t désignant cette fois le paramètre du point de la courbe fermée Γ. Nous supposons que

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_0, \qquad \theta_0 - \theta_1 < \frac{\pi}{2}.$$

On aura alors

$$\frac{d|x|}{dt} = 1 \qquad \text{sur} \quad \overline{x^{(1)}x^{(2)}},$$

$$\frac{d|x|}{dt} \geqq \cos(\theta_0 - \theta_1) \qquad \text{sur} \quad \overline{x^{(2)}x^{(3)}},$$

$$\frac{d|x|}{dt} = -1 \qquad \text{sur} \quad \overline{x^{(3)}x^{(4)}},$$

$$\frac{d|x|}{dt} \leqq -\cos(\theta_0 - \theta_1) \qquad \text{sur} \quad \overline{x^{(4)}x^{(1)}}.$$

Calculons $M_j'(t)$. Posons pour cela

$$\lambda_j^{(0)} = \rho_j e^{i\omega_j}, \qquad x = |x| e^{i\theta}.$$

Puisque

$$M_j'(t) = \Re \frac{d}{dt} \Lambda_j(x), \qquad \frac{d}{dt} \Lambda_j(x) = \lambda_j(x) \frac{dx}{dt},$$

on aura

$$M_j'(t) = \rho_j |x|^{m_j} \cos((m_j+1)\theta_1+\omega_j)+\ldots. \quad \text{sur} \quad \overline{x^{(1)}x^{(2)}},$$
$$M_j'(t) = \rho_j |x|^{m_j} \cos(m_j\theta+\theta_0+\omega_j)+\ldots. \quad \text{sur} \quad \overline{x^{(2)}x^{(3)}},$$
$$M_j'(t) = -\rho_j |x|^{m_j} \cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j)+\ldots. \quad \text{sur} \quad \overline{x^{(3)}x^{(4)}},$$
$$M_j'(t) = -\rho_j |x|^{m_j} \cos(m_j\theta+\theta_0+\omega_j)+\ldots. \quad \text{sur} \quad \overline{x^{(4)}x^{(1)}},$$

les termes non écrits étant de degrés moindres que m_j. Nous dirons *direction singlière* (relative à 0) la direction pour laquelle l'un an moins des cos $((m_j+1)\,\theta+\omega_j)$ s'annule(1).

Considérons d'abord le cas où $\bar{D}$ ne contient pas de direction singulière. Alors les indices j se partagent en deux groupes. L'un d'eux contient les indices j tels que

$$\cos((m_j+1)\theta+\omega_j)<0 \qquad \text{pour} \quad \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$$

et l'autre les indices j tels que

$$\cos((m_j+1)\,\theta+\omega_j)>0 \qquad \text{pour} \quad \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$$

ou

$$\lambda_j(x) \equiv 0\ .$$

Désignons par 1, 2, ... , n' les indices du premier groupe. Nous prenons θ_0 de manière que le domaine $\theta_1 \leqq \arg x \leqq \theta_0$ ne contient pas d'aucune direction singulière. On peut alors trouver un nombre positif γ tel que l'on ait

$$|M_j'(t)| \geqq \gamma \qquad \text{sur} \quad I$$

si $|x^{(1)}|$ est suffisamment grand et si le polynome correspondant $\lambda_j(x)$ n'est pas identiquement nul. Les fonctions $a_{jk}(x)$, $b_j(x)$ satisfont dans $\bar{\varDelta}$ aux inégalités

$$|a_{jk}(x)| \leqq A\,, \quad |b_j(x)| \leqq B_N |x|^{-N} \qquad (j,\, k=1,\, 2,\, \ldots.,\, n)\,.$$

Nous pouvons appliquer ici les résultats du n° 13 en posant

$$n'=n''=n''', \quad L=\cos(\theta_0-\theta_1)\,, \quad R=|x^{(1)}|\,, \quad B_N=B\,,$$
$$x_j=x^{(1)}, \quad \xi_j=x^{(3)} \qquad (j=1,\, 2,\, \ldots.,\, n')\,,$$
$$x_j=x^{(3)}, \quad \xi_j=x^{(1)} \qquad (j=n'+1,\, \ldots.,\, n)\,.$$

(1) Ici nous ne considérons que les indices pour lesquels $\lambda_j(x) \not\equiv 0$.

Par suite, *si*

$$\min\{NL,\ \gamma R-N\}>nA$$

les équations (5) *admettent une solution et une seule telle que*

$$z_j(x_j)=z_j^0 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$|z_j(x)|\leqq K|x|^{-N} \qquad (j=1,2,\ldots,n;\ x\in\bar{D}),$$

où K *est un nombre tel que*

$$K\min\{NL,\ \gamma R-N\}\leqq nAK+B_N,$$

$$K\geqq\max\{|z_1^0x_1^N|,\ \ldots\ldots,\ |z_n^0x_n^N|\}.$$

Posons

$$z_j^0=0 \qquad (j=n'+1,\ \ldots,\ n)$$

et supposons que le segment $\overline{x^{(1)}x^{(4)}}$ soit fixe et que le segment $\overline{x^{(2)}x^{(3)}}$ s'écarte à l'inifini. Le nombre K peut être supposé indépendant de la position du segment $\overline{x^{(2)}x^{(3)}}$. Nous pouvons ainsi obtenir une suite de solutions de (5):

$$z_1=\Psi_{1,k}(x),\ \ldots,\ z_n=\Psi_{n,k}(x) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

telles que l'on ait, quelque grand que soit $|x^{(2)}|$, les inégalités

$$|\Psi_{1,k}(x)|\leqq K|x|^{-N},\ \ldots,\ |\Psi_{n,k}(x)|\leqq K|x|^{-N}$$

dans $\bar{D}$ à partir d'un certain rang. Nous pouvons supposer que cette suite converge vers une solution

$$z_1=\psi_{1,N}(x),\ \ldots,\ z_n=\psi_{n,N}(x).$$

La solution ainsi obtenue satifait aux conditions

$$z_j(x^{(1)})=z_j^0 \qquad (j=1,2,\ldots,n'),$$

$$|y_j(x)|\leqq K|x|^{-N} \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

dans le domaine limité par $\overline{g_1x^{(1)}x^{(2)}g_2}$. Cette solution est unique car elle est la solution satisfaisant aux mêmes conditions sur la demi-droite $\overline{x^{(1)}g_2}$. Si donc on pose

$$\varphi_j(x)=\sum_{r=0}^{N+m}a_j^{(r)}x^{-r}+\psi_{j,N}(x) \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

on obtient la solution de (1) développable asymptotiquement en séries (3) sur la demi-droite $\overline{x^{(1)}g_2}$ (Voir n° 14). En somme, si

$$y_1 = \varphi_1(x)\,, \;\ldots\ldots,\quad y_n = \varphi_n(x)$$

est une solution de (1) dévéloppable asymptotiquement en séries (3) sur la demi-droite $0g_2$, on a

$$\varphi_j(x) = \sum_{r=0}^{N-1} a_j^{(r)} x^{-r} + O(x^{-N}) \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots\ldots,\, n)$$

dans le domaine $\bar{\varDelta}$. On en conclut que *les équations* (1) *admettent une solution et une seule développable asymptotiquement en séries* (3) *dans* $\bar{\varDelta}$ *et telle que*

$$y_j(x^{(1)}) = y_j^0 \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots\ldots,\, n')$$

y_j^0 *étant des nombres donnés arbitrairement.*

16. Considérons maintenant le cas où $\bar{\varDelta}$ contient une seule direction singulière $\bar{\omega}$(1):

$$\theta_1 \leqq \bar{\omega} < \theta_2 < \theta_0\,.$$

Remarquons d'abord que si θ_1 et θ_0 sont assez voisins de $\bar{\omega}$ on a

$$\cos\,(m_j\theta + \theta_0 + \omega_j) \neq 0 \qquad (\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2\,,\ j = 1, 2, \ldots\ldots, \mathfrak{n})$$

où $1, 2, \ldots, \mathfrak{n}$ sont les indices tels que $\lambda_j(x) \not\equiv 0$. Si

$$\cos\,((m_j + 1)\bar{\omega} + \omega_j) \neq 0$$

il suffit de prendre θ_1 et θ_0 de manière que

$$\cos\,((m_j + 1)\theta + \omega_j) \neq 0 \qquad (\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_0)\,.$$

Si

$$\cos\,((m_j + 1)\bar{\omega} + \omega_j) = 0$$

on aura

$$\cos\,(m_j\theta + \theta_0 + \omega_j) \neq 0 \qquad (\bar{\theta} < \theta < \bar{\bar{\theta}})$$

où

$$\bar{\theta} = \bar{\omega} - \frac{1}{m_j}(\theta_0 - \bar{\omega})\,,\quad \bar{\bar{\theta}} = \bar{\bar{\omega}} + \frac{1}{m_j}(\bar{\bar{\omega}} - \theta_0)\,,\quad \bar{\bar{\omega}} = \bar{\omega} + \frac{\pi}{m_j + 1}\,.$$

Il suffit de prendre θ_0 entre $\bar{\omega}$ et $\bar{\bar{\omega}}$ et θ_1 entre $\bar{\theta}$ et $\bar{\omega}$. On voit alors immédiatement que

---

(1) On peut traiter de la même manière le cas où $\theta_0 < \theta_1 < \bar{\omega} \leqq \theta_2$.

$$\operatorname{sgn}\cos(m_j\theta+\theta_0+\omega_j) = \operatorname{sgn}\cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j)$$
$$(\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2,\ j = 1, 2, \ldots\ldots, \mathfrak{n}).$$

On aura donc, en désignant par γ un nombre positif assez petit,

$$M_j'(t)\operatorname{sgn}\cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j) \geqq \gamma \quad (\text{sur } \overline{x^{(2)}x^{(3)}},\ j = 1, 2, \ldots\ldots, \mathfrak{n})$$
$$-M_j'(t)\operatorname{sgn}\cos((m_j+1)\theta_2+\omega_j) \geqq \gamma \quad (\text{sur } \overline{x^{(4)}x^{(1)}},\ j = 1, 2, \ldots\ldots, \mathfrak{n})$$

pourvu que $|x^{(1)}|$ soit assez grand. Sur les segments $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$ et $\overline{x^{(3)}x^{(4)}}$ $|M_j'(t)|$ reste plus grand que γ si elle ne s'annule pas identiquement. Les indices j se partagent en quatre groupes suivant les signes de $M_j'(t)$ sur les segments $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$, $\overline{x^{(2)}x^{(3)}}$, $\overline{x^{(3)}x^{(4)}}$ et $\overline{x^{(4)}x^{(1)}}$:

$$(1, 2, \ldots\ldots, n'),\quad (n'+1, \ldots\ldots, n''),\quad (n''+1, \ldots\ldots, n'''),$$
$$(n'''+1, \ldots\ldots, n)$$

de sorte que[1]

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \overline{x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \geqq \gamma & \text{sur} & \overline{x^{(3)}x^{(4)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \overline{x^{(1)}x^{(2)}} \\ M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \overline{x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \leqq 0 & \text{sur} & \overline{x^{(3)}x^{(4)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n'+1, \ldots\ldots, n'')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \overline{x^{(1)}x^{(2)}} \\ M_j'(t) \leqq -\gamma & \text{sur} & \overline{x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \geqq \gamma & \text{sur} & \overline{x^{(3)}x^{(4)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n''+1, \ldots\ldots, n''')$$

$$\left.\begin{array}{lll} M_j'(t) \geqq 0 & \text{sur} & \overline{x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}} \\ M_j'(t) \leqq 0 & \text{sur} & \overline{x^{(3)}x^{(4)}x^{(1)}} \end{array}\right\} \quad (j = n'''+1, \ldots\ldots, n).$$

Appliquons les résultats du n° 13 en posant

$$L = \cos(\theta_0-\theta_1),\quad R = |x^{(1)}|,\quad B_N = B,$$
$$x_j = x^{(1)},\quad \xi_j = x^{(3)} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'),$$
$$x_j = x^{(3)},\quad \xi_j = x^{(2)} \qquad (j = n'+1, \ldots\ldots, n''),$$

---

(1) Le dernier contient en particulier les indices j tels que $\lambda_j(x) \equiv 0$. Par suite $n''' \leqq \mathfrak{n}$.

$$x_j = x^{(2)}, \quad \xi_j = x^{(3)} \qquad (j = n''+1, \ldots\ldots, n'''),$$
$$x_j = x^{(3)}, \quad \xi_j = x^{(1)} \qquad (j = n'''+1, \ldots\ldots, n).$$

Nous obtenons alors la propositions suivante.

Si

$$\min \{NL, \gamma R - N\} > nA$$

les équations (5) *admettent une solution et une seule telle que*

$$z_j(x_j) = z_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

z_j^0 *étant des nombres donnés à l'avance, et cette solution satisfait aux inégalités*

$$|z_j(x)| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n;\ x \in \bar{D})$$

où K *est un nombre tel que*

$$K \min \{NL, \gamma R - N\} \geqq nAK + B_N$$
$$K \geqq \max \{|z_1^0 x_1^N|, \ldots\ldots, |z_n^0 x_n^N|\}.$$

Si $z_j^0 = 0\ (j = n'+1, \ldots, n)$, le nombre K peut être supposé indépendant de la position du segment $\overline{x^{(2)} x^{(3)}}$. On peut donc raisonner comme au n° précédent.

Les équations (1) *admettent une solution et une seule développable asymptotiquement en séries* (3) *dans* $\bar{\Delta}$ *et telle que*

$$y_j(x^{(1)}) = y_i^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n'),$$

y_j^0 *etant des nombres donnés arbitrairement.*

17. Compléments. Plaçons-nous d'abord dans les hypothèses du n° 15. Soit C une courbe située dans $\bar{\Delta}$ et s'étendant à l'infini (Fig. 5). *Si une solution de* (1) *est développable asymptotiquement en séries* (3) *sur* C, *les développements asymptotiques sont valables dans* $\bar{\Delta}$. En effet, soit

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots\ldots, \quad y_n = \varphi_n(x)$$

cette solution et posons

$$\varphi_j(x) - \sum_{r=0}^{N+m} a_j^{(r)} x^{-r} = \psi_{j,N}(x)$$
$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

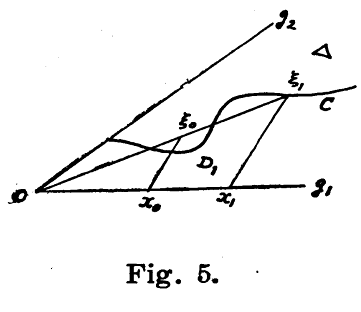

Fig. 5.

Les fonctions $\psi_{j,N}(x)$ sont régulières dans $\varDelta$ et continues dans $\bar{\varDelta}$. Prenons sur $\overline{0g_1}$ un point fixe x_0 et sur C un point quelconque ξ_1. Considérons le domaine D_1 limité par quatre droites $0g_1$, $0\xi_1$, $x_0\xi_0$, $x_1\xi_1$, les deux dernières faisant l'angle θ_0 avec l'axe réel. Les équations (5) admettent une solution et une seule (pourvu que $|x_0|$ soit assez grand) telle que

$$z_j(x_0) = \psi_{j,N}(x_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n')$$

$$z_j(\xi_1) = \psi_{j,N}(\xi_1) \qquad (j = n'+1, \ldots, n)$$

et cette solution satisfait aux inégalités

$$|z_j(x)| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

dans $\bar{D}_1$. C'est la solution

$$z_1 = \psi_{1,N}(x), \ldots, \quad z_n = \psi_{n,N}(x).$$

Puisque

$$|\psi_{j,N}(\xi_1)| \leqq K|\xi_1|^{-N} \qquad (j = n'+1, \ldots, n),$$

le nombre K peut être pris indépendamment de ξ_1. On aura donc

$$|\psi_{j,N}(x)| \leqq K|x|^{-N} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

sur $\overline{x_0g_1}$. On en conclut que les développements asymptotiques (3) sont valables sur $\overline{0g_1}$ et par suite dans $\bar{\varDelta}$.

Supposons ensuite que $\bar{\varDelta}$ ne contient qu'une direction singulière (relative à 0) ϖ[1]. Si le nombre positif ε est très petit, il existe au moins une solution développable asymptotiquement en séries (3) dans le domaine

$$\varpi - \varepsilon \leqq \arg x \leqq \varpi + \varepsilon.$$

Les développements asymptotiques étant valables sur la demi-droite $\arg x = \varpi - \varepsilon$, il en est de même dans $\theta_1 \leqq \arg x \leqq \varpi - \varepsilon$. De même pour $\varpi + \varepsilon \leqq \arg x \leqq \theta_2$. Par conséquent, *si une solution de* (1) *est développable asymptotiquement en séries* (3) *dans le voisinage de la direction singulière* ϖ, *les développements asymptotiques sont valables dans* $\bar{\varDelta}$.

Supposons que le second groupe des indices (n° 16) *n'existe pas, et qu'une solution de* (1) *soit développable asymptotiquement en séries* (3) *sur la demi-droite* $\overline{0g_1}$. *Alors, les développements asymptotiques*

---

(1) Nous supposons ici $\theta_1 < \varpi < \theta_2$.

sont valables dans $\bar{\Delta}$. En effet, prenons sur la demi-droite $\arg x = \varpi - \varepsilon$ un point x_0 assez éloigné de l'origine. Si les développements asymptotiques (3) sont valables sur $\overline{0g_1}$, il en est de même sur la demi-droite $\arg x = \varpi - \varepsilon$. La solution de (1) développable asymptotiquement en séries (3) sera déterminée complètement par les valeurs $y_j(x_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n')$. D'autre part, il existe une solution satisfaisant à ces conditions et développable asymptotiquement en séries (3) dans $\varpi + \varepsilon \leqq \arg x \leqq \bar{\varpi} - \varepsilon$. Ces deux solutions doivent donc coïncider. Par suite les développements asymptotiques sont valables dans $\bar{\Delta}$. On peut faire une remarque analogue dans le cas où le troisième groupe des indices n'existe pas.

Remarque 1. Soit données les équations

$$\frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k + a_j(x) x^{\rho} e^{\Lambda(x)}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

où $\Lambda(x)$ est un polynome. S'il existe une solution formelle

$$y_j \sim e^{\Lambda(x)} x^{\rho} \sum_{r=0}^{\infty} a_j^{(r)} x^{-r} \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

nous pouvons ramener au cas étudié en posant

$$y_j = x^{\rho} e^{\Lambda(x)} z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Les directions singulières relatives à 0 des équations transformées s'appellent directions singulières relatives au polynome $\lambda(x)\,(=\Lambda'(x))$ des équations primitives. Nous dirons simplement direction singulière du système homogène

$$\frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x) y_j + x^{-1}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) y_k \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

une direction singulière relative à un au moins des $\lambda_j(x)$.

Remarque 2. Les raisonnements exposés dans cette section s'appliquent sans aucune modification essentielle au cas où les coefficients des séries (3) contiennent $\log x$ et au cas où le domaine Δ est limité par deux courbes régulières à l'infini.

III. Intégration formelle.

18. Une matrice $A(x)$ est dite algébrique à l'infini si l'on a le développement (formel), ρ désignant un entier positif,

$$(1) \qquad A(x) \sim \sum_{r=-\alpha}^{\infty} A^{(r)} x^{-\frac{r}{\rho}} \qquad (A^{(-\alpha)} \neq 0)$$

rationnelle si $\rho=1$ et entière si $\alpha \geqq 0$. Nous appellerons $\frac{r}{\rho}$ l'ordre à l'infini et $|A^{(-\alpha)}-\lambda E|=0$ l'équation caractéristiqe de la partie pricipale.

Si l'équation

$$\frac{dY}{dx}=A(x)Y \tag{2}$$

se change en

$$\frac{dZ}{dx}=B(x)Z \tag{3}$$

par le changement de variables

$$Y=P(x)Z \tag{4}$$

on aura

$$B(x)=P^{-1}(x)A(x)P(x)-P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx}. \tag{5}$$

Si $A(x)$, $P(x)$ sont algébriques (rationnelles) à l'infini, $B(x)$ l'est aussi. Nous désignerons par $a_{jk}(x)$, $b_{jk}(x)$, $p_{jk}(x)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n)$ les éléments des matrices $A(x)$, $B(x)$, $P(x)$ respectivement. Le problème que nous allons résoudre dans cette section est le suivant: *trouver une $P(x)$ telle que $B(x)$ prenne la forme aussi simple que possible.* Pour cela établissons quelques lemmes.

$\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x)-\sum_{j=1}^{n} b_{jj}(x)$ *contient x^{-1} en facteur.*

Désignons par $E_j(t)$ la matrice diagonale dont j ième élément est égal à t, les autres éléments diagonaux étant égaux à 1 et par $E_{jk}(t)$ la matrice telle que les éléments diagonaux sont égaux à 1 et l'élément de la j ième ligne et de la k ième colonne est égal à t, les autres éléments étant nuls. On peut décomposer rationnellement $P(x)$ en un produit de ces matrices(1). On voit facilement

$$E_{jk}(t)=E_j(t)E_{jk}(1)E_j(t^{-1}).$$

On peut donc décomposer rationnellement $P(x)$ en un produit de matrices diagonales et de matrices d'éléments constants. Par suite il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $P(x)$ est une matrice

(1) Voir, par exemple, 藤原, 代數學, 第二卷, 207 頁.

d'éléments constants ou une matrice diagonale. Si $P(x)$ est une matrice d'éléments constants, on a

$$B(x) = P^{-1}A(x)P \ ,$$

$$|B(x)-\lambda E| = |A(x)-\lambda E| \ .$$

Par suite les n racines des deux équations caractéristiques :

$$|A(x)-\lambda E| = 0 \ , \qquad |B(x)-\lambda E| = 0$$

coïncident. On a donc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj}(x) \ .$$

Si $P(x)$ est une matrice diagonale on aura

$$b_{jj}(x) = a_{jj}(x) - p'_{jj}(x)/p_{jj}(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

La proposition annoncée est donc établie.

19. *Supposons qu'il n'existe pas de $P(x)$ telle que $B(x)$ contienne x^{-1} en facteur et que l'équation caractéristique de la partie principale de $A(x)$ admettent les n racines nulles. On peut alors trouver une $P(x)$ telle que l'équation carac'éristique de la partie principale de $B(x)$ admette au moins une racine non nulle. Si les n racines de cette équation caractéristique sont égales, $P(x)$ s'obtienne rationnellement*[1] *et l'ordre β de $B(x)$ est nécessairement moindre que $\frac{\alpha}{\rho}$.*

En effet, si $\mu_1, \ldots\ldots, \mu_n$ les n racines de l'équation caractéristique de la partie principale de $B(x)$, on aura

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jj}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x^{\beta} + \ldots\ldots \qquad (\beta > -1) \ .$$

Si les n racines sont égales et non nulles, le coefficient de x^{β} est différent de zéro. D'autre part,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jj}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x) + \ldots\ldots \ ;$$

les termes non écrits contiennent x^{-1} en facteur. Le coefficient de $x^{\frac{\alpha}{\rho}}$ dans le développement de $\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(x)$ est nul, car les n racines de

(1) Plus précisemment, si $A(x)$ est rationnelle à l'infini par rapport à $x^{\frac{1}{\rho}}$, $P(x)$ l'est aussi.

l'équation $|A^{(-\alpha)} - \lambda E| = 0$ sont toutes nulles. On doit donc avoir $\frac{\alpha}{\rho} > \beta$.

Démontrons maintenant l'existence de $P(x)$. Pour cela posons

$$y_1 = \eta_1 .$$

Si $a_{12}(x) \neq 0$ par exemple, nous posons

$$\eta_2 = \frac{dy_1}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(x) y_k .$$

$\frac{d\eta_2}{dx}$ deviendra une fonction linéaire de $\eta_1, \eta_2, y_3, \ldots, y_n$. Si le coefficient de y_3, par exemple, est différent de zéro, nous posons

$$\eta_3 = \frac{d\eta_2}{dx} .$$

$\frac{d\eta_2}{dx}$ devient une fonction linéaire de $\eta_1, \eta_2, \eta_3, y_4, \ldots, y_n$. Nous pouvons définir ainsi $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n_1}$ et ce procédé finit si $\frac{d\eta_{n_1}}{dx}$ devient une fonction linéaire de $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}$. Nous posons alors

$$\eta_{n_1+1} = y_{n_1+1} .$$

$\frac{d\eta_{n_1+1}}{dx}$ est une fonction linéaire de $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_n$. Si le coefficient de y_{n_1+2}, par exemple, est différent de zéro nous posons

$$\eta_{n_1+2} = \frac{d\eta_{n_1+1}}{dx} .$$

$\frac{d\eta_{n_1+2}}{dx}$ devient une fouction linéaire de $\eta_1, \ldots, \eta_{n_1+2}, y_{n_1+3}, \ldots, y_n$. Nous pouvons définir ainsi $\eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{n_2}$ et ce procédé finit si $\frac{d\eta_{n_2}}{dx}$ devient une fonction linéaire de $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$. Nous posons alors

$$\eta_{n_2+1} = y_{n_2+1}$$

et ainsi de suite. Désignons par $\mathfrak{A}(x)$ la matrice formée des coefficients des équations différentielles linéaires en $\eta_1, \ldots, \eta_n$. $\mathfrak{A}(x)$ s'obtient rationnellement et a la forme

$$\mathfrak{A}(x) = \begin{pmatrix} \underset{11}{\mathfrak{A}}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \underset{21}{\mathfrak{A}}(x) & \underset{22}{\mathfrak{A}}(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m1}{\mathfrak{A}}(x) & \underset{m2}{\mathfrak{A}}(x) & \ldots & \underset{mm}{\mathfrak{A}}(x) \end{pmatrix}$$

où

$$\underset{jj}{\mathfrak{A}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \underset{j}{\mathfrak{a}_1}(x) & \underset{j}{\mathfrak{a}_2}(x) & \underset{j}{\mathfrak{a}_3}(x) & \ldots & \underset{j}{\mathfrak{a}_{h_j}}(x) \end{pmatrix}, \quad \underset{jk}{\mathfrak{A}}(x) = \begin{pmatrix} \underset{jk}{\mathfrak{A}_{11}}(x) & \ldots & \underset{k}{\mathfrak{A}_{1h_k}}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{jk}{\mathfrak{A}_{h_j 1}}(x) & \ldots & \underset{jk}{\mathfrak{A}_{h_j h_k}}(x) \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\sigma_{j,r}$ l'ordre à l'infini de $\underset{j}{\mathfrak{a}_r}(x)$ et posons

$$\varkappa = \max \left\{ \frac{\sigma_{j,r}}{h_j - r + 1} \right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, h_j;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} \underset{1}{Q}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \underset{2}{Q}(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \underset{m}{Q}(x) \end{pmatrix}, \quad \underset{j}{Q}(x) = x^{N_j} \begin{pmatrix} x^{\varkappa} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x^{2\varkappa} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x^{h_j \varkappa} \end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}(x)\mathfrak{A}(x)Q(x) - Q^{-1}(x)\frac{dQ(x)}{dx} = B(x) = \begin{pmatrix} \underset{11}{B}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \underset{21}{B}(x) & \underset{22}{B}(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{m1}{B}(x) & \underset{m2}{B}(x) & \ldots & \underset{mm}{B}(x) \end{pmatrix}.$$

On aura

$$\underset{jk}{B}(x) = \underset{j}{Q}^{-1}(x)\underset{jk}{\mathfrak{A}}(x)\underset{k}{Q}(x) \qquad (j > k),$$

$$\underset{jj}{B}(x) = \underset{j}{Q}^{-1}(x)\underset{jj}{\mathfrak{A}}(x)\underset{j}{Q}(x) - \underset{j}{Q}^{-1}(x)\frac{d}{dx}\underset{j}{Q}(x),$$

$$\underset{j}{Q}^{-1}(x)\underset{jj}{\mathfrak{A}}(x)\underset{j}{Q}(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^{\varkappa} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & x^{\varkappa} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & x^{\varkappa} \\ \underset{j}{b_1}(x) & \underset{j}{b_2}(x) & \underset{j}{b_3}(x) & \dots\dots & \underset{j}{b_{h_j}}(x) \end{pmatrix}$$

$$\underset{j}{b_r}(x) = x^{-(h_j-r)\varkappa}\underset{j}{\mathfrak{a}_r}(x) = b_{jr}^{(0)}x^{\varkappa} + \dots\dots,$$

les nombres $b_r^{(0)}$ n'étant pas tous nuls. Si donc $\varkappa \leqq -1$, on pourrait déterminer $N_1, \dots\dots, N_m$ de manière que $B(x)$ contienne x^{-1} en facteur contrairement à l'hypothèse. Par suite, $\varkappa > -1$ et l'équation caractéristique de la partie principale de $B(x)$ est

$$\prod_{j=1}^{m} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 \\ b_{j1}^{(0)} & b_{j2}^{(0)} & b_{j3}^{(0)} & \dots\dots & b_{jh_j}^{(0)}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Cette équation peut s'écrire

$$\prod_{j=1}^{m}(\lambda^{h_j} - b_{jh_j}^{(0)}x^{h_j-1} - \dots\dots - b_{j1}^{(0)}) = 0 .$$

Elle admet évidemment une racine non nulle. Si elle admet les n racines toutes égales, tous les nombres $b_{jr}^{(0)}$ sont différents de zéro. On aura donc

$$\varkappa = \alpha_{j,\,h_j} .$$

20. Démontrons maintenant le théorème suivant.

Il existe une $P(x)$ telle que $B(x)$ ait la forme suivante :

$$B(x) = \Lambda(x) + x^{-1}\mathfrak{B}(x)$$

où $\Lambda(x)$ est une matrice diagonale, et $\mathfrak{B}(x)$ est entière à l'inifini.

Ce théorème est évident si $n = 1$. Nous supposons donc le théorème démontré pour $n < N$ ou $n = N$, $\alpha < \alpha_0$ et nous le démontrerons pour $n = N$, $\alpha = \alpha_0$. Nous supposons $\rho = 1$, sinon on remplacerait $x^{\frac{1}{\rho}}$ par x. Supposons la matrice $A^{(-\alpha)}$ ramenée à la forme canonique, et posons

$$P(x) = E + \sum_{r=1}^{\infty} P^{(r)}x^{-r} .$$

On aura

$$A^{(-\alpha)}P^{(r)}-P^{(r)}A^{(-\alpha)} = B^{(r-\alpha)}+\dots\dots$$

les termes non écrits ne dépdendant que de $A^{(-\alpha+1)}, \dots\dots, A^{(r-\alpha)}, P^{(1)}, \dots\dots, P^{(r-1)}$. On peut donc déterminer $P(x)$ de manière que[1]

$$b_{jk}(x) = 0$$

pour $\lambda_j \neq \lambda_k$, $\lambda_1, \dots\dots, \lambda_n$ désignant les éléments diagonaux de $A^{(-\alpha)}$. Si $\lambda_1, \dots\dots, \lambda_n$ ne sont pas tous égaux, les variables $z_1, \dots\dots, z_n$ se partagent en plusieurs groupes, les variables d'un même groupe satisfaisant à un système des équations diffèrentielles linéaires. Il suffit donc de considérer le cas où $\lambda_1 = \dots\dots = \lambda_n$. Appliquons à la matrice

$$A(x)-\lambda_1 x^{-\alpha}E$$

le lemme établi au n° précédent. Il existe une $P(x)$ rationnelle à l'inifini et telle que l'équation caractéristiqe de la partie principal de

$$P^{-1}(x)(A(x)-\lambda_1 x^{-\alpha}E)P(x)-P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx} = A_1(x)$$

admette au moins une racine différente de zéro. Alors l'ordre à l'infini de cette matrice est moindre que α.

Si l'équation caractéristique de la partie principale de $A_1(x)$ admet des racines toutes égales, on peut trouver une matrice $Q(x)$ telle que

$$Q^{-1}(x)A_1(x)Q(x)-Q^{-1}(x)\frac{dQ(x)}{dx}$$

soit de la forme

$$\Lambda_1(x)+x^{-1}\mathfrak{B}(x)$$

$\Lambda_1(x)$ étant une matrice diagonale et $\mathfrak{B}(x)$ entière à l'infini, car $P(x)$ peut être supposée rationelle à l'infini. Il en sera de même si l'équation caractéristique de la partie principale de $A_1(x)$ admet des racines différentes. On aura alors

$$R^{-1}(x)A(x)R(x)-R^{-1}(x)\frac{dR(x)}{dx} = \Lambda(x)+x^{-1}\mathfrak{B}(x)$$

où

$$R(x) = P(x)Q(x), \quad \Lambda(x) = \lambda_1 x^{\alpha}E+\Lambda_1(x) .$$

Le théorème est donc établi.

---

(1) Voir n° 6.

Nous pouvons donner à $\mathfrak{B}(x)$ une forme plus simple. En effet, désignons par

$$\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)} x^m + \lambda_j^{(1)} x^{m-1} + \ldots\ldots + \lambda_j^{(m)} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

les éléments diagonaux de $A(x)$. *On peut déterminer* $P(x)$ *de manière que les éléments* $b_{jk}(x)$ *de la matrice* $B(x)$ *définie par* (5) *soient identiquement nuls pour* $\lambda_j(x) \neq \lambda_k(x)$. Nous avons déjà remarqué que l'on peut annuler $b_{jk}(x)$ pour $\lambda_j^{(0)} \neq \lambda_k^{(0)}$. La proposition est donc établie pour $m = 0$. Nous la supposons donc établie pour $m-1$ et que $A(x)$ ait la forme $A(x) + x^{-1}\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{A}(x)$ étant entière à l'infini. Si $\lambda_1^{(0)}, \ldots\ldots, \lambda_n^{(0)}$ ne sont pas tous égaux, les variables $z_1, \ldots\ldots, z_n$ se partagent en plusieurs groupes. Il suffit donc de considérer le cas où $\lambda_1^{(0)} = \ldots\ldots = \lambda_n^{(0)}$. Il existe alors une $P(x)$ telle que

$$P^{-1}(x)\left[A(x) - \lambda_1^{(0)} x^m E\right]P(x) - P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx}$$

ait la forme voulue. La matrice $P(x)$ répond à la question.

Supposons que $A(x)$ ait la forme

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x)E + x^{-1}A_1(x) & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x)E + x^{-1}A_2(x) & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m(x)E + x^{-1}A_m(x) \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$\frac{dY}{dx} = x^{-1}A_j(x)Y$$

admet le point à l'infini comme point singulier régulier. On peut donc trouver une $P_j(x)$ telle que

$$P_j^{-1}(x)A_j(x)P_j(x) - xP_j^{-1}(x)\frac{dP_j(x)}{dx} = B_j(x) \qquad .$$

ait la forme canonique[1]. Si l'on pose

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & P_2(x) & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & & P_m(x) \end{pmatrix}$$

(1) Voir n° 6.

on obtient

$$P^{-1}(x)A(x)P(x)-P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1(x)E+B_1(x) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x)E+B_2(x) & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_m(x)E+B_m(x) \end{pmatrix}.$$

Nous dirons que cette forme est canonique. Le développement d'une matrice de forme canonique ne contient qu'un nombre fini de termes. Si $B(x)$ est de la forme canonique, l'équation (3) s'intègre par quadratures. Nous pouvons ainsi obtenir n solutions indépendantes de l'équation (2).

IV. Réduction analytique à la forme canonique.

21. Soit $P(x)$ la matrice qui ramène $A(x)$ à la forme canonique $B(x)$. Nous pouvons supposer que ces matrices soient rationnelles à l'infini, en remplaçant au besoin $x^{\frac{1}{p}}$ par x. Développons $P(x)$ en puissances de x:

$$P(x) \sim \sum_{r=-m}^{\infty} P^{(r)}x^{-r}. \tag{1}$$

Si l'équation

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y \tag{2}$$

se change en

$$\frac{dZ}{dx} = \bar{B}(x)Z \tag{3}$$

par le changement de variables

$$Y = \bar{P}(x)Z$$

où

$$\bar{P}(x) = \sum_{r=-m}^{N} P^{(r)}x^{-r}$$

l'équation transformée (3) aura la forme étudiée dans la section II pourvu que N soit assez grand.

On peut donc supposer, sans nuir à la généralité, que $A(x)$ ait cette forme

$$A(x) = \varLambda(x) + x^{-1}\mathfrak{A}(x)$$

$$\varLambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)} x^{m_j} + \dots + \lambda_j^{(m_j)}$$

$$\mathfrak{A}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{A}^{(r)} x^{-r} .$$

Soit $P(x)$ la matrice qui ramène formellement $A(x)$ à la forme canonique $B(x)$. La relation entre $A(x)$, $B(x)$ et $P(x)$ est

$$P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)\frac{dP(x)}{dx} = B(x)$$

qui peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{dP(x)}{dx} = A(x)P(x) - P(x)B(x) .$$

Cette équation peut être considérée comme un système d'équations différentielles linéaires en $p_{jk}(x)$. Elle a aussi la forme étudiée dans la section II et a une solution formelle (1). Les directions singulières relatives à 0 de cette équation sont les directions singulières de l'équation (2). L'équation (4) admet donc au moins une solution développable asymptotiquement en série (1) dans le domaine $\bar{\varDelta}$:

$$\theta_1 \leqq \arg x \leqq \theta_2$$

si ce domaine ne contient pas deux directions singulières de l'équation (2). Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Il existe un changement de variables

$$Y = P(x)Z$$

qui ramène l'équation donnée (2) *à la forme canonique*

$$(5) \qquad \frac{dZ}{dx} = B(x)Z ,$$

le développement asymptotique (1) *de la matrice* $P(x)$ *étant valable dans* $\bar{\varDelta}$, *si ce domaine ne contient pas deux directions singulières de l'équation* (2).