SUR LES FAMILLES DE FONCTIONS À UNE VARIABLE RÉELLE

Par

Masuo FUKUHARA

TABLE DES MATIÈRES

Considérons une équation différentielle ordinaire

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dont le second membre est une fonction continue et bornée dans le domaine

$$(D) \qquad |x| \leqq a, \qquad |y| < \infty.$$

Cauchy a démontré l'existence et l'unicité de la solution de (1) satisfaisant à la condition initiale donnée, en admettant de certaines conditions subsidiaires relatives à f. Mais l'existence de la solution est indépendante des conditions subsidiaires et résulte seulement de la continuité de f. Cela a été remarqué par Peano. Il a obtenu encore un résultat plus précis. Considérons par exemple l'ensemble des solutions satisfaisant à la condition initiale : $y(0) = 0$. Parmi ces intégrales, il existe deux $y = M(x)$, $y = m(x)$ telles que l'on ait

$$m(x) \leqq y(x) \leqq M(x)$$

quelle que soit l'intégrale $y(x)$ satisfaisant à la même condition initiale. De plus, la région entre les deux courbes intégrales $y=M(x)$ et $y=m(x)$ est remplie par les courbes intégrales telles que $y(0) = 0$. Ce théorème une fois établi, il serait naturel de tenter de l'étendre au cas d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n), \tag{2}$$

où les f_i sont des fonctions continues et bornées dans le domaine

$$|x| \leqq a, \qquad |y_i| < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

On est ainsi conduit au théorème de H. Kneser : La section par un plan perpendiculaire à l'axe des x de la région remplie par les courbes intégrales passant par l'origine est un continu. C'est une généralisation de la deuxième partie du théorème de Peano. J'ai trouvé le théorème qui généralise la première partie du théorème de Peano.

D'autre part la notion d'intégrales a été généralisée de plus en plus et cela influe naturellement sur la théorie des équations différentielles. Considérons par exemple le cas où les f_i dans (2) sont continues seulement par rapport à $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$ et également sommables par rapport à x quand on laisse fixes les variables y_i. Dans ce cas, il existe, quelles que soient les constantes x_0, y_i^0, un système de n fonctions continues $y_i(x)$ satisfaisant aux relations

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y, (x). \ldots\ldots, y_n(x))\, dx$$
$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

les intégrales étant celles de Lebesgue. Alors les égalités

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

sont remplies presque partout. Appelons le système des fonctions $y_i(x)$ une solution du systèmes différential (2). Les théorèmes cités ci-dessus restent encore valables pour les solutions ainsi généralisées. On le voit en poursuivant attentivement les démonstrations de ces théorèmes. Mais il y a lieu de chercher les démonstrations qui nous guident à ces généralisations aussi rapidement que possible. En effet, parmi les propriétés que possède l'ensemble des solutions du système différentiel (2), quelques-unes sont évidentes ou faciles à vérifier. Par exemple, si deux courbes intégrales

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots\ldots, y_n = \varphi_n(x)$$
$$y_1 = \psi_1(x), \ldots\ldots, y_n = \psi_n(x)$$

rencontrent en un point de l'abscisse ξ, le système des fonctions $y_i(x)$ définies par les relations

$$y_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{pour} \quad x \leqq \xi \\ \psi_i(x) & \text{pour} \quad x \geqq \xi \end{cases}$$

est aussi une solution. Les démonstrations basées seulement sur ces propriétés contentent notre désir. On est ainsi conduit à considérer la famille de courbes possédant ces propriétés, indépendamment des équations différentielles.

Or la courbe que nous considérons peut être considérée comme lieu d'un point mobile $p(x)$. Nous appellerons encore $p(x)$ fonction à une variable réelle x. D'une manière générale, considérons deux espaces quelconques $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et un ensemble de points X dans $\mathfrak{X}$ et supposons qu'à chaque point de X correspond un point $y = f(x)$ dans l'espace $\mathfrak{Y}$. $f(x)$ est par définition fonction de x; les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont respectivement espaces indépendant et dépendant[1]. Le but principal de notre présent mémoire est l'étude des familles de fonctions générales à une variable réelle. Les résultats qui seront obtenus dans la suite trouvent naturellement leurs applications dans la théorie des équations différentielles.

(1) Les espaces que nous condsidérerons dans ce mémoire sont des espaces accessibles. La fonction $f(x)$ est dite continue dans X si à chaque voisinage $V(y)$, où $y = f(x)$, $x \varepsilon X$, on peut faire correspondre un voisinage $V(x)$ tel que $x' \varepsilon V(x)$ entraîne $f(x') \varepsilon V(y)$.

Mais j'ai laissé l'exposition de ces résultats pour un autre mémoire. Car pour la discussion complète des familles des courbes intégrales, il me semble naturel d'introduire la notion d'inéquations différentielles sur lesquelles on doit faire quelques études préliminaires.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I.—ENSEMBLES DE POINTS. SUITES D'ENSEMBLES

1. Sommes et produits. Soient E_1, E_2, ... des ensembles de points dans un espace. Leur somme que nous désignerons par $\sum_i E_i = E_1 + E_2 + \ldots.$ est l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles E_i ; leur produit que nous désignerons par $\prod_i E_i = E_1 E_2 \ldots.$ est l'ensemble des points appartenant à tous les ensembles E_i.

Théorème 1. *La somme d'un nombre fini ou infini d'ensembles ouverts et le produit d'un nombre fini d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts. Le produit d'un nombre fini ou infini d'ensembles fermés et la somme d'un nombre fini d'ensembles fermés sont des ensembles fermés.*

2. Les limites supérieure et inférieure d'une suite. Soit une suite d'ensembles dans un espace :

(1) $$E_1, E_2, \ldots., E_i \ldots..$$

Sa limite supérieure que nous désignerons par $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i$ est l'ensemble des points p tels que quel que soit le voisinage $V(p)$ du point p, la relation

$$E_i V(p) \neq 0$$

soit vérifiée pour une infinité de i. Sa limite inférieure que nous désignerons par $\underline{\lim_{i=\infty}} E_i$ est l'ensemble des points p tels que quel que soit le voisinage $V(p)$ du point p, la relation

$$E_i V(p) \neq 0$$

soit vérifiée pour tous les i suffisamment grands. Dans le cas où les deux limites coïncident: $E = \overline{\lim\limits_{i=\infty}} E_i = \underline{\lim\limits_{i=\infty}} E_i$, nous dirons que la suite converge vers E.

Théorème 2. *Les limites supérieure et inférieure d'une suite d'ensembles sont des ensembles fermés.*

Soit une suite d'ensembles: $E_1, E_2, \ldots.$; et soit p un point d'accumulation de l'ensemble $\overline{E} = \overline{\lim\limits_{i=\infty}} E_i$. Le voisinage $V(p)$ du point p contient intérieurement un point de $\overline{E}$, soit p'. Il existe un voisinage $V(p')$ du point p' contenu dans $V(p)$. p' étant un point de $\overline{E}$, la relation

$$E_i\, V(p') \neq 0$$

est vérifiée pour une infinité de i. Puisque $V(p') < V(p)$, la relation

$$E_i\, V(p) \neq 0$$

est vérifiée pour une infinité de i. Le point p appartient donc à $\overline{E}$. On peut de même démontrer que l'ensemble $\underline{E} = \underline{\lim\limits_{i=\infty}} E_i$ est fermé.

Remarque I. Soit $\overline{E}_i$ l'ensemble de fermeture de E_i. On aura alors

$$\overline{\mathit{lim}}_{i=\infty}\, E_i = \overline{\mathit{lim}}_{i=\infty}\, \overline{E}_i, \quad \underline{\mathit{lim}}_{i=\infty}\, E_i = \underline{\mathit{lim}}_{i=\infty}\, \overline{E}_i.$$

Remarque II. Nous dirons que la suite (1) est croissante si

$$E_1 < E_2 < \ldots. < E_i < \ldots.$$

et décroissante si

$$E_1 > E_2 > \ldots. > E_i > \ldots.$$

La suite croissante ou décroissante est dite monotone. On peut vérifier sans peine que la suite monotone est convergente. La limite d'une suite croissante (1) est l'ensemble de fermeture de la somme $\sum E_i$; la limite d'une suite décroissante (1) est l'ensemble de fermeture du produit $\Pi\, E_i$.

3. Suites partielles. Soit une suite d'ensembles non convergente:

(1) $$E_1, E_2, \ldots., E_i, \ldots..$$

Dans certains problèmes, il est très utile de savoir l'existence d'une suite partielle convergente. Mais l'existence d'une telle suite n'est pas certaine dans le cas général. Donc il y a lieu de rechercher dans quels cas il existe une suite partielle convergente.

Théorème 3. *Si la différence* $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i - \underline{\lim_{i=\infty}} E_i = D$ *est un ensemble parfaitement séparable, on peut extraire de la suite* (1) *une suite partielle convergente.*

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons les nombres transfinis. Soit β un nombre transfini de la classe I ou II, et supposons définies les suites

$$(1_\alpha) \qquad E_1^\alpha,\ E_2^\alpha,\ \ldots\ldots,\ E_i^\alpha,\ \ldots\ldots$$

pour tous les $\alpha < \beta$ de manière que si $\alpha' < \alpha$ la suite (1_α) est une suite patielle de $(1_{\alpha'})$ à partir d'un certain rang et que

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^{\alpha'} - \overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^\alpha \neq 0.$$

Nous allons montrer que si

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^\alpha - \underline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^\alpha \neq 0$$

pour tous les $\alpha < \beta$, on peut ajouter aux suites (1_α) une suite

$$(1_\beta) \qquad E_1^\beta,\ E_2^\beta,\ \ldots\ldots,\ E_i^\beta,\ \ldots\ldots$$

ayant les propriétés analogues, c'est-à-dire les propriétés suivantes :

(1) La suite (1_β) est une suite partielle de (1_α) à partir d'un certain rang ;

$$(2) \qquad \overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^\alpha - \overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^\beta \neq 0.$$

Pour cela nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. β est un nombre de la première catégorie. Dans ce cas, il existe un nombre $\beta-1$ et on a

$$\overline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^{\beta-1} - \underline{\lim_{i=\infty}}\ E_i^{\beta-1} \neq 0.$$

par hypothèse. Soit p un point appartenant à cet ensemble. Il existe évidemment une suite partielle de la suite $(1_{\beta-1})$ dont la limite supérieure ne contient pas p. On peut prendre pour (1_β) cette suite partielle.

DEUXIÈME CAS. β est un nombre de la seconde catégorie. Soit une suite de nombres croissants covergent vers β :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_i, \ldots\ldots .$$

Dans notre but, il suffit de choisir les ensembles E_i^β de manière que la suite des E_i^β soit une suite partielle de (1_{α_j}) à partir d'un certain rang $(j = 1, 2, \ldots.)$.

Ainsi nous pouvons construire la suite (1_β) jouissant des propriétés 1) et 2). Donc, en prenant pour (1_1) la suite d'ensembles (1), on peut définir de proche en proche les suites (1_α) jusqu'à ce que l'on aboutit à une suite convergente. Cette suite convergente, s'il existe, est une suite partielle de la suite (1) à partir d'un certain rang. Par suite il nous reste à montrer que notre procédé transfini fini pour un certain nombre transfini de la classe I ou II. Pour cela nous utiliserons la séparabilité parfaite de l'ensemble $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i - \underline{\lim_{i=\infty}} E_i = E^1$. E^1 étant un espace parfaitement séparable, il existe un ensemble dénombrable de voisinages $\mathfrak{V}$ qui définit cet espace. Désignons par $\mathfrak{V}^\alpha$ l'ensemble des voisinages de $\mathfrak{V}$ contenant intérieurement au moins un point de $E^\alpha = \overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\alpha - \underline{\lim_{i=\infty}} E_i^\alpha$. Supposons $\alpha < \beta$. Puisque $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\alpha - \overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\beta \neq 0$, il existe un point p appartenant à cette différence. Or l'ensemble $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\beta$ est fermé ; il existe donc un voisinage $V(p)$ appartenant à $\mathfrak{V}$ et ne contenant intérieurement aucun point de $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\beta$. Ce voisinage appartient à $\mathfrak{V}^\alpha$ mais non à $\mathfrak{V}^\beta$. On a donc

$$\mathfrak{V}^\alpha > \mathfrak{V}^\beta, \qquad \mathfrak{V}^\alpha - \mathfrak{V}^\beta \neq 0.$$

L'ensemble $\mathfrak{V}$ étant dénombrable, l'ensemble $\mathfrak{V}^\alpha$ devient nul à partir d'un certain rang. Mais si $\mathfrak{V}^\alpha = 0$, la suite correspondante (1^α) est convergente. Le théorème est donc établi.

Corollaire. *De toute suite d'ensembles dans un espace parfaitement séparable, on peut extraire une suite partielle convergente.*

Car tout ensemble dans un espace parfaitement séparable est parfaitement séparable.

Remarque. Le point essentiel de la démonstration repose sur cette propriétè: Supposons donnés, dans un espace parfaitement séparable, les ensembles fermés E_α, pour tous les nombres transfinis α de la classe I ou II, en sorte que pour $\alpha < \beta$ on ait

$$E_\alpha > E_\beta .$$

Aors tous les E_α coïncident à partir d'un certain rang. Car l'ensemble $\overline{\lim_{i=\infty}} E_i^\alpha - \underline{\lim_{i=\infty}} E_i^1$ est un ensemble fermé dans E^1.

4. Suites de sous-ensembles. Considérons une suite d'ensembles:

$$(1) \qquad E_1, E_2, \ldots\ldots, E_i, \ldots\ldots$$

Extrayons de E_i un sous-ensemble A_i; si la suite des sous-ensembles A_i converge vers un ensemble A, A est un ensemble fermé dans $\underline{\lim_{i=\infty}} E_i = \underline{E}$. Proposons-nous la réciproque: Si l'on prend arbitrairement un ensemble fermé A contenu dans $\underline{E}$, existe-t-il une suite de sous-ensembles

$$(2) \qquad A_1, A_2, \ldots\ldots, A_i, \ldots\ldots \qquad (A_i < E_i)$$

convergeant vers A? La réponse est affirmative si l'espace est régulier et parfaitment séparable.

Théorème 4. *Si les ensembles E_i sont des ensembles dans un espace règulier et parfaitement sèparable, il existe une suite de sous-ensembles A_i convergeant vers un ensemble fermè A donnè dans $\underline{E} = \underline{\lim_{i=\infty}} E_i$. De plus les ensembles A_i peuvent être supposès finis.*

Pour établir ce théorème, démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme. *Si F est un ensemble fermè dans un espace règulier et parfaitement sèparable, il existe une suite dècroissante d'ensembles ouverts contenant F qui converge vers F.*

Soit une suite décroissante d'ensembles ouverts contenant F:

$$O_1^1, O_2^1, \ldots\ldots, O_i^1, \ldots\ldots \rightarrow F^1.$$

F^1 est un ensemble fermé contenant F. Si $F^1-F\neq 0$, désignons par p un point quelconque de F^1-F. Soit $V(p)$ un voisinage dont l'ensemble de fermeture $\overline{V}(p)$ est disjoint de F. La suite décroissante d'ensembles ouverts contenant F:

$$O_1^2,\ O_2^2,\ \ldots\ldots,\ O_i^2,\ \ldots\ldots \to F^2$$

cù $O_i^2 = O_i^1 - \overline{V}(p)$, converge vers un ensemble fermé F^2 contenu dans F^1 et ne contenant pas p. Si F^2 ne coïncide pas avec F, on peut de même construire une suite décroissante d'esembles ouverts

$$O_1^3,\ O_2^3,\ \ldots\ldots,\ O_i^3,\ \ldots\ldots \to F^3$$

telle que

$$O_i^2 > O_i^3 > F, \qquad F^2 - F^3 \neq 0.$$

D'une manière générale, soit β un nombre transfini de la classe I ou II et supposons définie pour $\alpha < \beta$ la suite décroissante d'ensembles ouverts contenant F:

$$O_1^\alpha,\ O_2^\alpha,\ \ldots\ldots,\ O_n^\alpha,\ \ldots\ldots \to F^\alpha$$

en sorte que, pour $\alpha < \alpha'$, on ait

$$O_n^\alpha > O_n^{\alpha'}$$

à partir d'un certain rang et

$$F^\alpha - F^{\alpha'} \neq 0.$$

Si β est un nombre transfini de la première catégorie, on peut construire comme ci-dessus une suite décroissante d'ensembles ouverts contenant F:

$$O_1^\beta,\ O_2^\beta,\ \ldots\ldots,\ O_n^\beta,\ \ldots\ldots \to F^\beta$$

de manière que l'on ait

$$O_n^\beta < O_n^{\beta-1}, \qquad F^{\beta-1} - F \neq 0.$$

Si β est un nombre transfini de la seconde catégorie, soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ une suite de nombres transfinis tendant vers β. On peut construire facilement par le procédé diagonal une suite décroissante d'ensembles ouverts contenant F:

$$O_1^\beta, O_2^\beta, \ldots, O_n^\beta, \ldots \to F^\beta$$

de manière que l'on ait

$$O_n^\beta \subset O_n^{\alpha k}$$

à partir d'un certain rang. On peut donc continuer ce procédé transfiniment jusqu'à ce que l'on aboutit à une suite convergeant vers F. Il nous reste à montrer que ce procédé doit avoir fin. Mais cela résulte de la séparabilité parfaite de l'espace, car si les ensembles F^α étaient définis pour tous les nombres transfinis des classes I et II, tous les ensembles F^α coïncideraient à partir d'un certain rang, ce qui serait contraire à l'hypothèse(2).

Revenons maintenant au théorème énoncé au début de ce numéro. D'après le lemme, il existe une suite décroissante d'ensembles ouverts

$$O_1, O_2, \ldots O_n, \ldots\ldots$$

telle que

$$O_n \supset A, \qquad \lim_{n=\infty} O_n = A.$$

L'espace étant séparable, il existe dans A un ensemble dénombrable D dont l'ensemble de fermeture $\overline{D}$ coïncide avec A. Désignons les points de D par $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ A chaque point p_k correspond une suite décroissante de voisinages $V_1^k(p_k), V_2^k(p_k), \ldots$ convergeant vers p_k. On peut supposer que $V_n^k(p_k) \subset O_n$; car s'il n'en était pas ainsi, on remplacerait $V_n^k(p_k)$ par $O_n V_n^k(p_k)$. Puisque A appartient à $\underline{E}$, on peut faire correspondre à un entier positif n un entier N_n tel que l'on ait

$$V_n^k(p_k) E_m \neq 0$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $m = N_n, N_n+1, N_n+2, \ldots$. On peut supposer évidemment que

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_n < \ldots$$

Soient p_k^m un point de $V_n^k(p_k)E_m$ $(N_n \leqq m < N_{n+1};\ k = 1, 2, \ldots, n)$ et A_m l'ensemble des points $p_1^m, p_2^m, \ldots, p_n^m$. L'ensemble A_m appartient à O_n pour $m \geqq N_n$. Donc

(2) Voir la remarque du numéro précédent.

$$\overline{\lim_{m=\infty}} A_m < \bar{O}$$

et par suite

$$\overline{\lim_{m=\infty}} A_m < \prod_n \bar{O}_n = \lim_{n=\infty} O_n = A$$

Considérons maintenant un point p_k de D. A_m contient au moins un point de $V_n^k(p_k)$ pourvu que $n \geqq k$, $m \geqq N_n$. On aura donc

$$\lim_{m=\infty} A_m > D$$

et par suite

$$\underline{\lim_{m=\infty}} A_m > \bar{D} = A.$$

Par conséquent la suite des A_m converge vers A.

5. Suites de continus. Nous dirons qu'une suite d'ensembles : $E_1, E_2, \ldots.$ est compacte, si de toute suite partielle d'une suite quelconque de points $p_1, p_2, \ldots.$, où $p_i \in E_i$, on peut extraire une suite partielle convergeant vers un point.

Théorème 5. *Pour que la limite supéieure* $\bar{C} = \overline{\lim}_{i=\infty} C_i$ *d'une suite de continus :* $C_1, C_2, \ldots.$ *soit un continu, il faut que la suite ne se partage pas en deux suites partielles dont les limites supérieures sont des ensembles disjoints. Cette condition est aussi suffisante si l'espace est normal et si la suite est compacte.*

Il est clair que la condition est nécessaire. Démontrons donc que la conditions est suffisante. Pour cela, il suffit de montrer que si $\bar{C}$ est la somme de deux ensembles $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ fermés et disjoints, on peut partager la suite des C_i en deux suites dont les limites supérieures sont respectivement $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$. Or d'apres l'hypothèse, il existe deux ensembles F_1 et F_2 fermés, disjoints et contenant à leurs intérieurs les ensembles $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ respectivement. $F_1 + F_2$ contient presque tous les C_i. Car, sinon, la suite étant compacte, $\bar{C}$ contiendrait au moins un point n'appartenant pas à $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$. Par conséquent l'une des relations

$$F_1 > C_i, \qquad F_2 > C_i$$

a lieu pour presque tous les C_i. La suite des C_i vérifiant la première de ces relations a sa limite supérieure $\bar{C}_1$ et la suite des C_i vérifiant la seconde de ces relations a $\overline{C}_2$ comme la limite supérieure. Le théorème est donc établi.

Corollaire. *Si* $\underline{\lim}_{i=\infty} C_i \neq 0$ *où les* C_i *sont des continus dans un espace normal et si la suite des* C_i *est compacte, l'ensemble* $\overline{\lim}_{i=\infty} C_i$ *est un continu.*

Car la condition, que la suite de codtinus C_i ne se partage pas en deux suites dont les limites supérieures sont des ensembles disjoints, est évidemment remplie si $\underline{\lim}_{i=\infty} C_i \neq 0$.

II.—FONCTIONS CONTINUES

6. Espace d'ensembles complètement compacts(3). Soit $\mathfrak{A}$ un espace accessible et $\mathfrak{E}$ le système de tous les ensembles complètement compacts dans $\mathfrak{A}$. Nous définirons le voisinage d'un ensemble complètement compact $\mathfrak{E}_o$ comme il suit. Soit

$$O_1, O_2, \ldots\ldots, O_n$$

un système d'ensembles ouverts couvrant $\mathfrak{E}_o$:

$$\sum_{i=1}^{n} O_i > E_0, \quad O_i E_0 \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

L'ensemble de tous les ensembles complètement compacts E tels que

$$\sum_{i=1}^{n} O_i > E, \quad O_i E \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

forme un voisinage de E_o. Soient deux ensembles différents complètement compacts E_1 et E_2. L'un au moins de ces ensembles, soit E_1, contiendra un point p n'appartenant pas à l'autre. A chaque point q de E_2 on peut faire correspondre un voisinage $V(q)$ ne contenant pas p. L'ensemble E_2 étant complètement compact, on peut extraire de ces voisinages un système fini couvrant E_2. Ce système définira un voisinage de E_2 ne contenant pas E_1. Inversement il existe un voisinage de E_1 ne contenant pas E_2. En effet, soit

---

(3) Nous appellerons ensemble complètement compact tout ensemble compact ayant la propriété de Heine-Borel.

$$O_1, O_2, O_3, \ldots\ldots, O_n$$

un système quelconque couvrant E_1. Ajoutons à ce système un ensemble ouvert O contenant p mais aucun point de E_2, cela est possible puisque E_2 est complètement compact. Le système

$$O, O_1, O_2, \ldots\ldots, O_n$$

définira un voisinage de E_1 ne contenant pas E_2. Considérons maintenant deux voisinages $V_1(E_o)$ et $V_2(E_o)$ définis respectivement par les systèmes

$$O_1, O_2, \ldots\ldots, O_n;$$

$$O_1', O_2^1, \ldots\ldots, O_{n'}'.$$

Parmi les ensembles ouverts O_iO_k' ceux qui contiennent au moins un point de E_0 seront désignés par $O_i''(i = 1, 2, \ldots\ldots, n'')$. Le système

$$O_1'', O_2'', \ldots\ldots, O_{n''}''$$

définira un voisinage $V_3(E_0)$ contenu dans $V_1(E_0)\ V_2(E_0)$. Ainsi le système des ensembles complètement compacts est un espace accessible. Cet espace sera appelé espace d'ensembles complètement compacts (dans $\mathfrak{A}$).

Supposons, en particulier, que $\mathfrak{A}$ est un espace régulier. Alors l'espace $\mathfrak{E}$ est aussi régulier. En effet, soit E_0 un ensemble complètement compact n'appartenant pas à un ensemble fermé $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}$. Il existe alors un voisinage $V(E_0)$ ne contenant aucun élément de $\mathfrak{E}_0$. Supposons le voisinage $V(E_0)$ défini par le système

$$O_1, O_2, \ldots\ldots, O_n.$$

Grace à la régularité de l'espace $\mathfrak{A}$ on peut faire correspondre à chaque point p de E_0 un voisinage $V(p)$ tel que

$$\overline{V}(p) < O_i$$

pour les O_i contenant p. E_0 étant un ensemble complètement compact, on peut extraire de ces voisinages $V(p)$ un système fini couvrant E_0:

$$V_1, V_2, \ldots\ldots, V_m.$$

Soit $V_0(E_0)$ le voisinage défini par ce système. Soit E un élément quelconque de $\mathfrak{E}_0$. Deux cas seuls peuvent se présenter.

1°. E contient un point p n'appartenant pas à $\sum_{i=1}^{n} O_i$.

2°. Il existe un O_i, soit O_1, ne contenant aucun point de E.

Dans le premier cas il existe un ensemble ouvert O tel que

$$p \in O, \qquad O \sum_{i=1}^{m} V_i = 0$$

Prenons un système fini quelconque couvrant E: $O'_1, O'_2, \ldots\ldots, O'_{n'}$. Le système $O, O'_1, O'_2, \ldots\ldots, O'_{n'}$ définira un voisinage ne contenant pas aucun élément de $V_0(E_0)$. Dans le second cas, il existe un V_i appartenant à O_1, soit V_1. On aura alors $\overline{V}_1 < O_1$. A chaque point p de E on peut faire correspondre un voisinage $V(p)$ ne contenant aucun point de V_1. De l'ensemble de ces voisinages $V(p)$ on peut extraire un système fini couvrant E. Ce système définira un voisinage de E ne contenant aucun élément de $V_0(E_0)$. Ainsi dans tous les cas il existe un voisinage $V(E)$ $(E \in \mathfrak{E}_0)$ tel que $V(E)V_0(E_0) = 0$. Soit $V(\mathfrak{E}_0) = \sum_{E \in \mathfrak{E}_0} V(E)$. On aura $V(\mathfrak{E}_0)V_0(E_0) = 0$. L'espace $\mathfrak{E}$ est donc régulier.

Théorème 6. *L'espace d'ensembles complètement compacts dans un espace régulier est aussi régulier*[4].

7. Séparabilité de l'espace d'ensembles complètement compacts. Supposons l'espace $\mathfrak{A}$ parfaitement séparable et désignons par $\mathfrak{B}$ le système dénombrable de voisinages définissant $\mathfrak{A}$. Prenons un système fini de voisinages appartenant à $\mathfrak{B}$: $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Nous désignerons par $U(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ (ou U) l'ensemble des ensembles complètement compacts E tels que

$$\sum_{i=1}^{n} V_i > E, \qquad V_i E \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

Le système des ensembles U est dénombrable. Nous le désignerons par $\mathfrak{U}$. Nous allons démontrer que le système $\mathfrak{U}$ peut définir l'espace

(4) On verra sans peine que si $\mathfrak{A}$ est un espace de Hausdorff, $\mathfrak{E}$ est aussi un espace de Hausdorff.

d'ensembles complètement compacts $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire que si E est un ensemble complètement compact et si $V(E)$ est un voisinage de E, il existe dans $\mathfrak{U}$ un élément U tel que

$$E \epsilon U, \qquad U < V(E).$$

Supposons le voisinage $V(E)$ défini par le système

$$O_1, O_2, \ldots, O_n.$$

A chaque point p de E on peut faire correspondre un voisinage $V(p)$ tel que

$$V(p) \epsilon \mathfrak{V}, \qquad V(p) < O_i$$

pour les O_i contenant p. De l'ensemble de ces voisinages $V(p)$ on peut extraire un système fini couvrant E auquel correspond un ensemble U. L'ensemble U contient E et contenu dans $V(E)$. C. Q. F. D.

L'espace $\mathfrak{C}$ est donc parfaitement séparable.

Théorème 7. *L'espace d'ensembles complètement compacts dans un espace parfaitement séparable est aussi parfaitement séparable.*

8. Composition de deux espaces. Soient X et Y deux ensembles quelconques. L'ensemble de tous les systèmes (x, y) où $x \epsilon X$, $y \epsilon Y$, est par définition l'ensemble composé des ensembles X et Y. Nous le désignerons par $Z = \mathbf{E}(X, Y)$. Si X et Y sont des espaces accessibles, nous predrons pour le voisinage d'un point $z = (x, y)$ de Z l'ensemble composé $\mathbf{E}(V(x), V(y))$ où $V(x)$ et $V(y)$ sont des voisinages de x et de y respectivement. On pourra vérifier sans peine les propositions suivantes.

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des espaces parfaitement séparables, l'espace composé $\mathbf{E}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est aussi parfaitement séparable.

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des espaces réguliers, l'espace composé $\mathbf{E}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est aussi régulier.

9. Espace de fonctions continues. Considérons le système $\tilde{\mathfrak{F}}$ des fonctions continues $f(x)$ définies sur un ensemble parfaitement compact[5] dans un espace accessible $\mathfrak{X}$, l'espace dépendant $\mathfrak{Y}$ étant aussi accessible. Considérons l'ensenble F des points $(f(x), x)$ dans l'espace composé $Z = \mathbf{E}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. C'est le graphe de la fonction $f(x)$[6]. Il est clair que l'ensemble F est complètement compact. Par suite le système $\tilde{\mathfrak{F}}$ est un ensemble dans l'espace d'ensembles complètement compacts dans Z. Le système $\tilde{\mathfrak{F}}$ forme donc un espace accessible que nous appellerons espace de fonctions continues. Si les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont parfaitement séparables, Z est aussi parfaitement séparable. Donc l'espace $\tilde{\mathfrak{F}}$ est parfaitement séparable. De même, si les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont réguliers, l'espace de fonctions continues est aussi régulier.

D'une maière plus générale considérons une famille $\mathfrak{F}$ dans $\tilde{\mathfrak{F}}$ et désignons par $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ la région remplie par les graphes des fonctions de $\mathfrak{F}$. Alors la famille $\mathfrak{F}$ peut être considérée comme un espace accessible, régulier, parfaitement séparable suivant que la region $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est un espace accessible, régulier, parfaitement séparable.

10. Convergence uniforme. Soit une suite de fonctions continues dans un ensemble complètement compact E:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_n(x), \ldots\ldots \tag{3}$$

E étant indépendant de n. Soit $f(x)$ une fonction continue dans E. Désignons par F_n et F les graphes des fonctions $f_n(x)$ et $f(x)$. Pour que le point représentatif f_n de la fonction $f_n(x)$ converge, dans l'espace de fonctions continues, vers le point représentatif f de la fonction $f(x)$, il faut et il suffit qu'à chaque ensemble ouvert O contenant F on peut faire correspondre un entier positif N tel que $F_n \subset O$ pour $n \geq N$. La nécessité de la condition est évidente. Montrons donc la suffisance de la condition. Considérons un voisinage $V(F)$ de F défini par un système d'ensembles ouverts

(5) L'ensemble sur lequel la fonction continue est définie peut varier avec la fonction.

(6) Dans le cas où l'espace indépendant est un segment de droite, le graphe d'une fonction continue $f(x)$ sera appelée la courbe représentée par $f(x)$ où plus brièvement courbe $f(x)$. Nous dirons aussi souvent une courbe d'une famille au lieu de la courbe représentée par une fonction d'une famille, etc.

$$O_1, O_2, \ldots, O_m.$$

Désignons par $\mathfrak{f}(x_i) = (f(x_i), x_i)$ un point quelconque de FO_i et par A_i l'ensemble des points appartenant à $\sum_{j=1}^{m} O_j - O_i$ et ayant les abscisses égales à x_i. $O = \sum_{i=1}^{m} O_i - \sum_{i=1}^{m} A_i$ est un ensemble ouvert appartenant à $\sum_{i=1}^{m} O_i$. Supposons $F_n < O$. Alors $F_n < \sum_{i=1}^{m} O_i$. De plus $F_n O_i \neq 0$, car le point $\mathfrak{f}_n(x_i)$ appartient nécessairement à O_i. Donc f_n appartient au voisinage $V(f)$. C. Q. F. D.

Nous dirons que la suite de fonctions continues (3) converge uniformément vers la fonction $f(x)$ si le point f_n converge vers f pour $n \to \infty$.

Théorème 8. *Pour que la suite* (3) *converge uniformément vers une fonction continue* $f(x)$, *il faut et il suffit qu'à chaque ensemble ouvert* O *contenant* F *on peut faire correspondre un entier* N *tel que* $F_n < O$ *pour* $n \geq N$.

11. Déformation. Soient E un ensemble dans un espace accessible $\mathfrak{X}$ et $f(x)$ une fonction continue définie dans E, l'espace dépendant étant un espace accessible $\mathfrak{Y}$. Soit E_1 l'ensemble des points $f(x)$. E_1 est par définition déformée continue de E. Il peut arriver que la fonction $f(x)$ fait correspondre à E l'ensemble E_1 d'une manière biunivoque et bicontinue. Dans ce cas, l'ensemble E_1 est dit la déformée topologique de E.

Soient $\mathfrak{T}$ l'intervalle $0 \leq t \leq 1$ et E un ensemble dans un espace accessible $\mathfrak{X}$. Considérons une fonction continue $f(x, t)$ définie dans $\mathbf{E}(E, \mathfrak{T})$, l'espace dépendant étant aussi $\mathfrak{X}$. Supposons que $f(x, 0) = x$ et désignons par E_t l'ensemble des points $f(x, t)$ où $x \varepsilon E$. E_t est une déformée continue de l'ensemble E_0. Le passage de E_0 à E_1 est par définition une déformation continuelle. Si tout l'ensemble E_t appartient à un ensemble U, nous dirons que la déformation continuelle est faite dans U.

CHAPITRE II

FAMILLES DE FONCTIONS GÉNÉRALES À UNE VARIABLE RÉELLE

Soit un système d'équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les seconds membres sont des fonctions continues et bornées dans le domaine

$$(D) \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \qquad |y_i| < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est facile de construire n suites de fonctions continues et bornées dans D, satisfaisant aux conditions de Lipschitz relatives aux y et convergeant respectivement vers $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; soient

$$f_i^{(1)}(x, y_1, \ldots y_n), f_i^{(2)}(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

ces n suites. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des courbes intégrales du système (1) et par $\mathfrak{F}_k$ la famille des courbes intégrales du système

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous pouvons facilement vérifier que la famille $\mathfrak{F}$ est une famille sans-manque[7] contenant la limite supérieure de la suite des familles $\mathfrak{F}_k$. Or la famille $\mathfrak{F}_k$ est telle que par chaque point de D il ne passe qu'une courbe de $\mathfrak{F}$. Une telle famille sera appelée régulière. Par conséquent, la famille $\mathfrak{F}$ des courbes intégrales du système (1) est une famille sans-manque contenant la limite supérieure d'une suite de familles régulières. D'autre part, le théorème 3 montre qu'il existe une suite partielle convergente de la suite des $\mathfrak{F}_k$. Nous pouvons donc dire que

(7) Pour la définition de la famille sans-manqe, voir n° 13.

la famille $\mathfrak{F}$ est une famille sans-manque contenant la limite d'une suite convergente de familles règulières. Par suite les propositions que nous établirons sur une telle famille s'appliquent immédiatement à la famille des courbes intégrales du système (1),

I.—FAMILLES KNESERIENNES

12. Familles kneseriennes. Le théorème de H. Kneser nous conduit à considérer la famille $\mathfrak{F}$ de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$[8] jouissant de la propriété suivante.

(K) Si C est un continu dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$[9] et si τ est une valeur dans $\mathfrak{T}$, l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$[9] est toujours un continu.

A cette occasion, il est naturel d'introduire les conditions moins restrictives.

(K_d) Si C est un continu dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ situé à gauche de l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$, l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$ est un continu.

(K_g) Si C est un continu dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ situé à droite de l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$, l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$ est un continu.

Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{F}$ est kneserienne si elle remplie la condition (K) et kneserienne à droite ou à gauche suivant qu'elle remplie la condition (K_d) ou (K_g).

Théorème 9. *La famille quasi-compacte*[10] *et kneserienne à droite et à gauche est une famille kneserienne.*

---

(8) Dans la suite, nous désignerons toujours par $\mathfrak{T}$ l'intervalle $o \leqq t \leqq 1$.

(9) Nous désignerons par $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ la région remplie par les courbes de $\mathfrak{F}$ et par $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ l'ensemble $\mathbf{E}(\mathfrak{F}, \tau)\ \mathbf{R}(\mathfrak{F})$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ dont les abscisses sont égales à τ (l'abscisse d'un point (y, t) est le nombre t). $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ s'appelle la région fondamentale de la famille $\mathfrak{F}$. Soit A un ensemble dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. La famille des courbes de $\mathfrak{F}$ passant par un au moins des points de A sera désignée par $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ et les ensembles $\mathbf{R}(\mathbf{F}(A, \mathfrak{F}))$ et $\mathbf{S}_\tau(\mathbf{F}(A, \mathfrak{F}))$ seront désignés par $\mathbf{R}(A, \mathfrak{F})$ et $\mathbf{S}_\tau(A, \mathfrak{F})$.

(10) Si la limite supérieure d'une suite d'ensembles est nulle, nous dirons que la suite s'évanouit. Si une suite de foncions continues est telle que la suite des courbes représentées par ces fonctions s'évanoui, nous dirons que la suite de fonctions continues s'évanouit. Si de toute suite extraite d'une famille on peut extraire une suite partielle uniformément convergente ou s'évanouissant, la famille est dite quasi-compacte. Considérons une suite de familles de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2, \ldots\ldots,\ \mathfrak{F}_n, \ldots\ldots$$

et extrayons de $\mathfrak{F}_n$ une fonction $f_n(t)$ d'une manière arbitraire. Si de la suite des fonctions $f_n(t)$ on peut toujours extraire une suite partille uniformément convergente ou s'évanouissant, la suite est dite quasi-compacte.

Soient $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte et kneserienne à droite et à gauche et C un continu dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. La famille $\mathfrak{F}$ étant supposée quasi-compacte, l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$ est fermé. S'il était la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2, il existerait dans C un point p tel que

$$S_i \mathbf{S}_\tau (p, \mathfrak{F}) \neq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Supposons, par exemple, que l'abscisse du point p est inférieure à τ. D'après l'hypothèse que la famille $\mathfrak{F}$ est kneserienne à droite, $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ doit être un continu. Mais les relations écrites ci-dessue montrent que $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est la some de deux ensembles fermés et disjoints $S_1 \mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ et $S_1 \mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$. C'est absurde. C. Q. F. D.

13. Familles sans-manques. La famille des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires vérifie évidemment la condition : Si deux courbes $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de la famille rencontrent en un point p de l'abscisse τ (i.e. $f_1(\tau) = f_2(\tau)$), la courbe qui coïncide avec l'une d'elles à droite du point p et avec l'autre à gauche du point p appartient aussi à la famille. La famille vérifiant cette condition s'appelle famille sans-manque.

Théorème 10. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte et sans-manque de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$. Soient $f_1(t), f_2(t), \ldots\ldots, f_n(t)$ des fonctions de $\mathfrak{F}$. Si $f(t)$ est une fouction continue telle que quelle que soit la valeur t, le point $f(t)$ coïncide avec un des n points $f_1(t), \ldots\ldots, f_n(t)$, la fonction $f(t)$ appartient à la famille.*

La fonction (ou courbe) $f(t)$ sera appelée fonction (ou courbe) déduite des fonctions $f_1(t), \ldots\ldots, f_n(t)$. Soit τ une valeur quelconque dans $\mathfrak{T}$ et désignons par E_τ l'ensemble des valeurs t telles que par le point $(f(t), t)$ et le point $(f(\tau), \tau)$ il passe au moins une courbe de $\mathfrak{F}$ déduite des courbes $f_i(t)$. La famille $\mathfrak{F}$ étant supposé quasi-compacte, l'ensemble E_τ est fermé. Si l'ensemble E_τ ne contenait pas entièrement l'intervalle $\mathfrak{T}$, désignons par (τ', τ'') un intervalle contigu à E_τ. Si $\tau < \tau'$, le point $(f(\tau'), \tau')$ appartiendrait à E_τ. Il existerait donc une courbe $\varphi(t)$ de $\mathfrak{F}$ passant par les points $(f(\tau), \tau)$ et $(f(\tau'), \tau')$.

D'autre part, l'une des courbes $f_i(t)$, soit $f_1(t)$, contiendrait une suite de points $(f(t_1), t_1)$, ..., $(f(t_k), t_k)$, ... telle que

$$\lim_{i=\infty} t_i = \tau', \qquad \tau' < t_i < \tau''.$$

La courbe $f_1(t)$ passerait par le point $(f(\tau'), \tau')$ et la courbe qui coïncide avec la courbe $\varphi(t)$ à gauche du point $(f(\tau'), \tau')$ et avec la courbe $f_1(t)$ à droite du point $(f(\tau'), \tau')$ appartiendrait à la famille $\mathfrak{F}$ et passerait par les points $(f(\tau), \tau)$ et $(f(t_k), t_k)$ contrairement à l'hypothèse. Nous pouvons discuter de la même manière le cas de $\tau > \tau''$. L'ensemble E_τ coïncide donc avec $\mathfrak{T}$. Cela posé, considérons un ensemble dénombrable τ_1, τ_2, ..., τ_k, ... dense dans l'intervalle $\mathfrak{T}$. Il est maintenant facile de montrer qu'il existe dans $\mathfrak{F}$ une courbe $\varphi_k(t)$ passant par les points $(f(\tau_1), \tau_1)$, ..., $(f(\tau_k), \tau_k)$. La suite des courbes $\varphi_k(t)$ converge vers la courbe $f(t)$. La famille $\mathfrak{F}$ étant quasi-compacte, la courbe $f(t)$ appartient à la famille.

14. Points kneseriens. On peut se proposer la question : Les propriétés introduites au numéro précédent peuvent-elles être remplacees par les propriétés locales ? En traitant cette question, on arrive à la notion de points kneseriens. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$. Nous dirons qu'un point p dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est point kneserien de $\mathfrak{F}$ si la condition suivante est vérifiée.

(k) $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est un continu quelle que soit la valeur τ dans $\mathfrak{T}$. De même, nous pouvons définir le point kneserien à droite ou à gauche par les conditions suivantes.

(k_d) $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est un continu quelle que soit la valeur τ plus grande que l'abscisse du point p.

(k_g) $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est un continu quelle que soit la valeur τ moindre que l'abscisse du point p.

Théorème 11. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte de fonctious continues dans $\mathfrak{T}$. Si tout point de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est un point kneserien à droite, la famille $\mathfrak{F}$ est kneserien à droite.*

Soit C un continu quelconque dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ situé à gauche de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. La famille $\mathfrak{F}$ étant quasi-compacte, l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$ est fermé quelle que soit la valeur τ. S'il était la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2, C contiendrait au moins un point p tel que

$$S_i \mathbf{S}_\tau (p, \mathfrak{F}) \neq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Le point p ne saurait être un point kneserien à droite contrairement à l'hypothèse.

Un point p est appelé point localement kneserien d'une famille $\mathfrak{F}$ si $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est un continu pour la valeur τ assez voisine de l'abscisse du point p. Nous pouvons de même définir le point localement kneserien à droite ou à gauche.

Théorème 12. *Si tout point de $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$[11] est un point localement kneserien à droite d'une famille sans-manque et quasi-compacte $\mathfrak{F}$, le point p est un point kneserien à droite.*

Soit τ une valeur quelconque plus grande que l'abscisse du point p. Si $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ était la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2, désignons par A l'ensemble des points q situés dans $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ et à gauche de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et tels que

$$S_i \mathbf{S}_\tau (p, \mathfrak{F}) \neq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

L'ensemble A serait évidemment compact et contiendrait donc un point q_0 ayant la plus grande abscisse $\tau_0 (< \tau)$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $\mathbf{S}_{\tau_0+\varepsilon}(q_0, \mathfrak{F})$ est un continu puisque q_0 est localement kneserien à droite. $\mathbf{S}_{\tau_0+\varepsilon}(q_0, \mathfrak{F})$ contiendrait donc un point q_1 tel que

$$S_i \mathbf{S}_\tau (q_1, \mathfrak{F}) \neq 0 \qquad (i = 1, 2).$$

L'ensemble A contiendrait un point ayant l'abscisse plus grande que q_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. *Si tout point de la région fondamentale d'une famille sans-manque et quasi-compacte est localement kneserien à droite, la famille est kneserienne à droite.*

---

(11) Soit A un ensemble dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Nous désignerons par $\mathbf{F}_d(A, \mathfrak{F})$ la famille des fonctions $f(t)$ telles que la courbe $f(t)$ ait son extrémité gauche a dans A et coïncide avec une des courbe de $\mathfrak{F}$ à droite du point a. La région remplie par les courbes de $\mathbf{F}_d(A, \mathfrak{F})$ sera désignée par $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$. Les notations $\mathbf{F}_g(A, \mathfrak{F})$, $\mathbf{R}_g(A, \mathfrak{F})$ ont les significations analogues.

15. Suite de familles kneseriennes. Soit une suite convergente de familles de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{F}_n,\ \ldots\ldots \to \mathfrak{F}.$$

Parmi les propriétés que possèdent les familles $\mathfrak{F}$ quelques-une seront conservées dans la famille $\mathfrak{F}$; c'est ce que nous examinerons dans le cas des familles kneseriennes.

Théorème 13. *La limite $\mathfrak{F}$ d'une suite*[12] *quasi-compacte et convergente de familles kneseriennes à droite $\mathfrak{F}_i$ est une famille kneserienne à droite si la région fondamentale commune R est normale, parfaitement séparable et localement compacte*[13] *et connexe.*

Soient p un point quelconque dans R et τ une valeur quelconque dan $\mathfrak{T}$ plus grande que l'abscisse du point p. Soit E un ensemble compact dans R contenant le point p intérieurieurement. On aura alors $\underline{\lim}\ \mathbf{F}(E, \mathfrak{F}_i) > \mathbf{F}(p, \mathfrak{F})$. Le théorème 4 montre qu'il existe une suite convergente de familles finies

$$\mathfrak{F}'_1,\ \mathfrak{F}'_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{F}'_i,\ \ldots\ldots \to \mathfrak{F},\quad \mathfrak{F}'_i < \mathbf{F}(E, \mathfrak{F}_i).$$

Il est clair que cette suite est compacte. Considérons une suite de voisinages convergeant vers p :

$$V_1(p),\ \ldots\ldots,\ V_i(p),\ \ldots\ldots$$

Nous pouvons supposer que $V_i(p) < E$. A chaque $V_i(p)$ on peut faire correspondre un voisinage $V'_i(p)$ tel que deux points de $V'_i(p)$ peuvent se joindre par un continu dans $V_i(p)$. En prenant une suite partielle s'il est nécessaire, nous pouvons supposer que chaque courbe de la famille $\mathfrak{F}'_i$ contienne au moins un point dans $V'_i(p)$. Nous pouvons alors prendre un continu C_i dans $V_i(p)$ de manière que chaque courbe de la famille $\mathfrak{F}'_i$ contienne au moins un point de C_i. Il est clair que la suite des familles $\mathbf{F}(C_i, \mathfrak{F}_i)$ est compacte et converge vers $\mathfrak{F}$. Les en-

(12) Dans ce qui suit nous ne considérerons que la suite de familles dont les régions fondamentales coïncident. Donc je ne ferai pas cette remarque chaque fois que nous considérerons des suites des familles.

(13) Un ensemble E est dit localement compact si l'on peut faire correspondre à chaque point p de E un ensemble compact le contenant intérieurement.

sembles $\mathbf{F}_\tau(C_i, \mathfrak{F}_i)$ sont des continus et la suite de ces continus est compacte et converge vers $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$. L'ensemble $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est donc un continu. Par suite tout point de R est un point kneserien à droite et l famille $\mathfrak{F}$ est kneserienne à droite d'après le théorème 11.

Théorème 14. *Toute famille $\bar{\mathfrak{F}}$ sans-manque, quasi-compacte, contenant une famille kneserienne à droite $\mathfrak{F}$ et dont la région fondamentale coïncide avec celle de $\mathfrak{F}$ est aussi kneserienne à droite.*

En effet, soient p un point quelconque dans $\mathbf{R}(\bar{\mathfrak{F}})$ et τ une valeur dans $\mathfrak{T}$ plus grande que l'abscisse du point p. $\mathbf{R}_d(p, \bar{\mathfrak{F}}) = A$ est un continu. Par suite $\mathbf{S}_\tau(A, \mathfrak{F}) = S$ est un continu. Il est clair que S coïncide avec $\mathbf{S}_\tau(p, \bar{\mathfrak{F}})$. Le point p est donc kneserien à droite. p étant un point quelconque dans $\mathbf{R}(\bar{\mathfrak{F}})$, la famille $\bar{\mathfrak{F}}$ est kneserienne à droite d'après le théorème 11.

Les théorèmes 13 et 14 entraînent immédiatement le théorème cité au début de ce mémoire, car la famille régulière peut être considérée comme une famille kneserienne.

16. Ensembles de troncature. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$. Nous appellerons ensemble de troncature de $\mathfrak{F}$ tout ensemble E jouissant des propriétés suivantes :

1°. E est fermé dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$;

2°. Toute courbe de $\mathfrak{F}$ rencontre E en un seul point ;

3°. Si l'on désigne par E_d la partie de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ située à droite de E (c'est-à-dire l'ensemble des points p tels que par p il passe au moins une courbe de $\mathfrak{F}$ rencontrant E en un point situé à gauche du point p) et par E_g la partie de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ située à gauche de E, les deux ensembles E_d et E_g sont disjoints.

Si la famille $\mathfrak{F}$ est sans-manque, la condition 2° entraîne la troisième. Car si $E_d E_g \neq 0$, il existerait un point p par lequel il passe deux courbes de $\mathfrak{F}$, l'une $f_1(t)$ rencontrant E à gauche de p et l'autre $f_2(t)$ rencontrant E à droite de p. Puisque la famille $\mathfrak{F}$ est sans-manque, la courbe qui coïncide avec $f_1(t)$ à gauche de p et avec $f_2(t)$ à droite de p appartiendrait à $\mathfrak{F}$ et rencontrerait E en deux points.

Théorème 15. *Soient $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte et sans-manque et E un ensemble de troncature de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ est kneserienne à droite et si C est un continu situé à gauche de E, l'ensemble $E\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})$ est un continu. Si $\mathfrak{F}$ est kneserienne, l'ensemble $E\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})$ est un continu quel que soit le continu situé dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$.*

Il suffit de démontrer la première partie du théorème dans le cas où C ne contient qu'un point unique p, car si $E\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})$ était la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2, C contiendrait au moins un point p tel que $S_i\mathbf{R}(p, \mathfrak{F}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ et le point p ne saurait être dans E. Supposons donc que $E\mathbf{R}(p, \mathfrak{F})$ était la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2. Désignons par A l'ensemble des points q situés dans $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ et tels que $S_i\mathbf{R}_d(q, \mathfrak{F}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$. L'ensemble A serait compact. Il contiendrait donc un point q_0 ayant la plus grande abscisse τ_0. Si ε est un nombre positif assez petit, l'ensemble $\mathbf{S}_{\tau_0+\varepsilon}(q_0, \mathfrak{F})$ serait à gauche de E. Cet ensemble étant un continu par hypothèse, il contiendrait un point q' tel que $S_i\mathbf{R}_d(q', \mathfrak{F}) \neq 0$ $(i = 1, 2)$, ce qui est absurde. Le théorème est donc établi.

II.—FAMILLES SERRÉES

17. Familles serrées. Nous avons déjà remarqué que toute famille sans-manque contenant une famille kneserienne $\mathfrak{F}$ et dont la région fondamentale coïncide avec celle de $\mathfrak{F}$ est une famille kneserienne. Donc le problème suivant se pose naturellement : chercher les conditions auxquelles la famille $\mathfrak{F}$ doit satisfaire pour que toute famille quasi-compacte, sans-manque, contenant $\mathfrak{F}$ et ayant la même région fondamentale que $\mathfrak{F}$ soit toujours kneserienne. La condition que la famille $\mathfrak{F}$ soit kneserienne est suffisante mais n'est pas nécessaire. En effet, toute famille $\mathfrak{F}$ contenant une famille kneserienne $\mathfrak{F}_0$ et ayant la même région fondamentale que $\mathfrak{F}_0$ possède aussi la propriété voulue, mais n'est pas nécessairement kneserienne. Nous pouvons indiquer une condition suffisante moins restrictive ; c'est la condition suivante.

(S) Soit A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. S'il existe dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ deux points p_1 et p_2 tels que tout continu situé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et contenant les points p_1 et p_2 contient au moins un point de A, tout continu situé dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ et contenant les points p_1 et p_2 contient au moins un point de $\mathbf{R}(A, \mathfrak{F})$.

La famille $\mathfrak{F}$ vérifiant cette condition sera appelée serrée. Il est clair qu'une famille contenant une famille serrée $\mathfrak{F}_0$ et ayant la même région fondamentale que $\mathfrak{F}_0$ est aussi serrée. Nous démontrerons au numéro suivant qu'une famille quasi-compacte, sans-manque et serrée est kneserienne, en admettant de certaines conditions relatives à la région fondamentale.

Introduisons maintenant la condition (S_d) que nous obtenons en remplaçant dans la condition (S) la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ par $\mathbf{R}_d(S_\tau, \mathfrak{F})$ (où $S_\tau = \mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$). La famille vérifiant cette condition (S_d) sera appelée semi-serrée à droite. Nous pouvons de même définir la famille semi-serrée à gauche.

Théorème 16. *Une famille kneserienne à droite est semi-serrée à gauche. Une famille kneserienne est serrée.*

En effect, soit $\mathfrak{F}$ une famille kneserienne à droite. Soit A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et supposons qu'il existe dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ deux points p_1 et p_2 tels que tout continu situé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et contenant les points p_1 et p_2 contienne au moins un point de A. Si C est un continu situé dans $\mathbf{R}_g(S_\tau, \mathfrak{F})$ où $S_\tau = \mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$, $\mathbf{S}_\tau(C, \mathfrak{F})$ sera un continu puisque $\mathfrak{F}$ est kneserienne à droite. Il contient donc un point p de A. Par le point p et par un point q de C il passe une courbe de $\mathfrak{F}$. Le point q est alors un point commun des ensembles C et $\mathbf{R}_g(A, \mathfrak{F})$. Nous pouvons de même démontrer qu'une famille kneserienne est serrée.

Nous avons introduit au n° 16 la notion d'ensembles de troncature et nous avons vu qu'ils peuvent jouer un rôle analogue à celui des ensembles $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Ici encore le théorème suivant donne un exemple de même nature.

Théorème 17. *Soient $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte, sans-manque et kneserienne (à droite) et E un ensemble de troncature de $\mathfrak{F}$. Soit A un ensemble fermé dans E et supposons qu'il existe dans E deux points p_1 et p_2 tels que tout continu dans E contenant p_1 et p_2 ait au moins un point* *de A. Alors tout continu situé dans* $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ $(\mathbf{R}_g(E, \mathfrak{F}))$ *et contenant* p_1 *et* p_2 *contient au moins un point de* $\mathbf{R}(A, \mathfrak{F})$ $(\mathbf{R}_g(A, \mathfrak{F}))$.

Pour établir ce théorème, il suffit de remarquer que si C est un continu dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ $(\mathbf{R}_g(E, \mathfrak{F}))$ l'ensemble $E\,\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})$ est un continu. Alors la démonstration s'achève comme ci-dessus.

18. Familles sans-manques et serrées. Nous allons maintenant établir le théorème suivant.

Théorème 18. *Une famille* $\mathfrak{F}$ *quasi-compacte, sans-manque et serrée (sermi-serrée à droite) est kneserienne (à gauche) si l'ensemble* $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ *est normal et connexe quelle que soit la valeur* τ.

Si $\mathfrak{F}$ n'était pas kneserienne, il existerait un point p non kneserien. Soit τ une valeur telle que $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ soit la somme de deux ensembles fermés et disjoints S_1 et S_2. L'ensemble $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ contiendrait un ensemble fermé F contenant S_1 intérieurement et n'ayant aucun point de S_2. Désignons par B la frontière de F. B serait un ensemble fermé non nul car $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est supposé connexe. Tout continu situé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et contenant un point p_1 de S_1 et un point p_2 de S_2 contiendrait au moins un point de B. Désignons par A la partie située entre p et p_i de la courbe de $\mathfrak{F}$ passant par p et p_i $(i=1, 2)$. A_1+A_2 est un continu contenant les points p_1 et p_2. Il contiendrait donc un point q de $\mathbf{R}(B, \mathfrak{F})$ puisque $\mathfrak{F}$ est serrée par hypothèse. Soit q' le point de B tel qu'il passe par q et q' une courbe de $\mathfrak{F}$. La famille $\mathfrak{F}$ étant sans-manque, il existerait une courbe de F passant par p et q'. L'ensemble $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ contiendrait donc un point q' n'appartenant pas à S_1+S_2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Toute famille sans-manque et serrée possède encore une propriété remarquable. Les familles ayant cette propriété seront étudiées dans la section suivante.

III.—FAMILLES BORDÉES

19. Familles bordées. J'ai établi autrefois que la famille $\mathfrak{F}$ des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire possède la propriété suivante.

(B) Si E est un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et si p est un point de $\mathbf{R}(E, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, il existe une courbe de $\mathbf{F}(E, \mathfrak{F})$ passant par p et dont la partie située entre p et q se trouve sur la frontière de $\mathbf{R}(E, \mathfrak{F})$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, q désignant le point de rencontre de la courbe avec E.

La famille ayant cette propriété sera appelée bordée. Introduisons ensuite comme d'habitude la condition (B_d) que nous obtenons en assujettissant, dans (B), le point p à être situé à droite de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. La famille ayant cette propriété sera appelée semi-bordée à droite. On peut de même définir la famille semi-bordée à gauche.

Théorème 19. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte, sans-manque et semi-bordée à droite. Soient E un ensemble de troncanture de $\mathfrak{F}$ et A un ensemble fermé dans E. Alors par un point p de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ il passe au moins une courbe de $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ telle que si q est le point de rencontre de la courbe avec E, la partie de la courbe située entre p et q se trouve sur la frontière de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$.*

En effet, désignons par m_p les points situés à droite de E et tels qu'il existe une courbe de $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ passant par p et m_p et dont la partie située entre p et m_p se trouve sur la frontière de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$. La famille étant supposée quasi-compacte, l'ensemble M_p des points m_p est compact. Il existe donc dans M_p un point $\overline{m}_p$ ayant la plus petite abscisse. Il suffit de montrer que le point $\overline{m}_p$ appartient à E. Et pour cela, il suffit de montrer que l'ensemble M_p contient un point dont l'abscisse est moindre que celle du point p. Car si $\overline{m}_p$ n'appartenait pas à A, l'ensemble $M_{\overline{m}_p}$ contiendrait un point m dont l'abscisse est moindre que celle du point $\overline{m}_p$. La famille $\mathfrak{F}$ étant sans-manque, il serait facile de trouver une courbe de $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ dont la partie située entre p et m se trouve sur la frontière de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$. L'ensemble M_p contiendrait donc un point m ayant l'abscisse moindre que celle de $\overline{m}_p$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il nous reste à montrer que M_p contient un point dont l'abscisse est moindre que celle de p. Soit τ l'abscisse du point p. Si ε est un nombre positif assez petit et si A_ε est l'ensemble des points de A dont les abscisses sont au moins égales à $\tau-\varepsilon$, le point p n'appartient pas à $\mathbf{R}_d(A_\varepsilon, \mathfrak{F})$. Désignons par A l'ensemble des points de A dont les abscisses sont au plus égales à $\tau-\varepsilon$ et par S_ε l'ensemble $\mathbf{S}_{\tau-\varepsilon}(A'_\varepsilon, \mathfrak{F})$. D'après l'hypothèse, il passe par p une courbe de $\mathbf{F}(S_\varepsilon, \mathfrak{F})$ dont la partie située entre p et le point de l'sbscisse $\tau-\varepsilon$ se trouve sur la frontière de $\mathbf{R}_d(S_\varepsilon, \mathfrak{F})$. La famille étant sans-manque, nous pouvons supposer que cette courbe appartient à $\mathbf{F}(A'_\varepsilon, \mathfrak{F})$. Si ε' est un nombre positif assez petit ($\varepsilon' < \varepsilon$), les points de la courbe dont les abscisses sont $< \tau$ et $> \tau-\varepsilon'$ se trouvent sur la frontière de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$, car le point p n'appartenant pas à $\mathbf{R}_d(A_\varepsilon . \mathfrak{F})$, les régions $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ et $\mathbf{R}_d(A'_\varepsilon, \mathfrak{F})$ coïncident dans le voisinage du point p.

20. **Familles sans-manques et serrées** (suite). Une famille $\mathfrak{F}$ qusi-compacte, sans-manque et serrée est, comme on l'a vu, une famille kneserienne si $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est connexe. Si $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est localement connexe, $\mathfrak{F}$ est une famille bordée, c'est ce que nous allons montrer dans la suite.

Théorème 20. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille quasi-compacte, sans-manque et semi-serrée à droite. Si $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est localement connexe, la famille $\mathfrak{F}$ est semi-bardée à droite.*

Soit A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et soit B la frontière de A par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Soit p un point de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Démontrons d'abord $\mathbf{R}(B, \mathfrak{F})$ contient p. p étant un point de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, il existe un point p' de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ n'appartenant pas à $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ mais aussi voisin de p que l'on voudra. Si $\mathbf{R}_d(B, \mathfrak{F})$ ne contenait pas p, il existerait un voisinage $V(p)$ n'ayant aucun point de $\mathbf{R}_d(B, \mathfrak{F})$. Si p' est assez voisin de p, on pourrait trouver, d'après la connexité locale de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, un continu C_0 contenant p et p' et contenu dans $V(p)$. Désignons par C_1 la partie située entre p et A de la courbe de $\mathfrak{F}$ passant par p et un point q de A et par C_2 la partie située entre p' et $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ de la courbe de $\mathfrak{F}$ passant par p' et un point q' de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. $C_0+C_1+C_2$ serait un continu situé à droite de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et n'ayant pas de point commun avec $\mathbf{R}_d(B, \mathfrak{F})$. Mais tout continu contenant q et q' et situé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ contiendrait au moins un point de B, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{F}$ est une famille semi-serrée à droite.

Il existe donc une courbe de $\mathfrak{F}$ passant par p et un point de A frontière par rapport à $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Soit τ' l'abscisse du point p et intercalons entre τ et τ' une suite de nombres croissants

$$\tau = \tau_0, \tau_1, \ldots\ldots, \tau_k, \ldots\ldots, \tau_n = \tau'$$

et désignons par A_k l'ensemble $\mathbf{S}_{\tau_k}(A, \mathfrak{F})$. La famille $\mathfrak{F}$ étant sans-manque, les régions $\mathbf{R}_d(A_k, \mathfrak{F})$ et $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ coïncident à droite de $\mathbf{S}_{\tau_k}(\mathfrak{F})$. Par suite d'après ce qui a été démontré tout à l'heure, il existe une courbe $f_1(t)$ de $\mathfrak{F}$ passant par p et un point p_{n-1} de la frontière de A_{n-1} par rapport à $\mathbf{S}_{\tau_{n-1}}(\mathfrak{F})$. p_{n-1} étant un point de $\mathbf{R}_d(A_{n-2}, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, il existe une courbe $f_2(t)$ de $\mathfrak{F}$ passant par p_{n-1} et un point p_{n-2} de la frontière de A_{n-2} par rapport à $\mathbf{S}_{\tau_{n-2}}(\mathfrak{F})$, et ainsi de suite. Nous pouvons donc obtenir n points p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ tels que p_k se trouve sur la frontière de A_k par rapport à $\mathbf{S}_{\tau_k}(\mathfrak{F})$ et qu'il existe une courbe $f_k(t)$ de $\mathfrak{F}$ passant par p_k et p_{k-1} $(p_n = p)$. Puisque $\mathfrak{F}$ est une famille sans-manque, on peut déduire des n courbes $f_k(t)$ une courbe de $\mathfrak{F}$ passant par les $n+1$ points $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Cette courbe appartient à $\mathbf{F}(B, \mathfrak{F})$ puisque p_0 est un point de B. Cela posé, considérons un ensemble dénombrable de nombres dense dans l'intervalle (τ, τ')

$$t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n, \ldots\ldots$$

D'après ce qui précède, on pourra trouver une courbe $g_n(t)$ de $\mathbf{F}(B, \mathfrak{F})$ et rencontrant $\mathbf{S}_{t_k}(\mathfrak{F})$ en un point de $\mathbf{S}_{t_k}(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{S}_{t_k}(\mathfrak{F})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Puisque $\mathfrak{F}$ est une famille quasi-compacte, de la suite des courbes $g_n(t)$ on peut extraire une suite partielle convergeant vers une courbe $g(t)$ de $\mathfrak{F}$. Cette courbe répond à la question.

21. Familles presque bordées. Suites de familles presque bordées. Pour établir le théorème 20, nous avons démontré d'abord que la famille $\mathfrak{F}$ vérifie la propriéte suivante :

(B'_d) Soit A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Si p est un point de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ et n'appartenant pas à A, il existe une courbe de $\mathfrak{F}$ passant par p et un point de A frontière par rapport à $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$.

Puis nous avons démontré qu'une famille, quasi-compacte, sans-manque et vérifiant cette condition est néceesairement semi-bordée à droite. Nous appellerons famille presque semi-bordée à droite toute famille vérifiant la condition (B'_d). Nous pouvons de même définir la famille presque semi-bordée à gauche. Une famille presque semi-bordée à droite et à gauche sera appelée presque bordée. Nous avons donc le théorème suivant.

Théorème 21. *Une famille quasi-compacte, sans-manque et presque semi-bordée à droite est semi-bordée à droite.*

Considérons maintenant une suite quasi-compacte et convergente de familles presque semi-bordées à droite :

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{F}_n,\ \ldots\ldots \to \mathfrak{F}.$$

Soit A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. D'après les théorèmes 4, 6, 7 on peut extraire de $\mathfrak{F}_n$ une sous-famille finie $\mathfrak{F}'_n$ de manière que la suite des $\mathfrak{F}'_n$ converge vers $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ (pourvu que $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ soit un espace régulier et parfaitement séparable). Il existe dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ une suite décroissante d'ensembles ouverts telle que

$$O_1 \supset O_2 \supset \ldots\ldots \supset O_n \supset \ldots\ldots \supset F, \quad \lim_{n=\infty} O_n = F.$$

Soit $\bar{O}_n$ l'ensemble de fermeture de O_n. Nous supposerons que $\mathbf{F}(\bar{O}_n, \mathfrak{F}_n) \supset \mathfrak{F}'_n$, ce qui est toujours possible. La famille $\mathbf{F}(\bar{O}_n, \mathfrak{F}_n)$ converge vers $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ lorsque $n \to \infty$. Soit p un point de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Si $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ est localement connexe, on peut choisir un point p_n de $\mathbf{R}_d(\bar{O}_n, \mathfrak{F}_n)$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ de manière que la suite des points p_n converge vers p. Ecartons le cas banal où l'abscisse du point p est égale à τ. Alors l'abscisse du point p_n est plus grande que τ pourvu que n soit assez grand. Puisque $\mathfrak{F}$ est presque semi-bordée à droite, il existe une courbe $f_n(t)$ de $\mathfrak{F}_n$ passant par p_n et un point de $\bar{O}_n - O_n$. De la suite des courbes $f_n(t)$ on peut extraire une suite partielle convergeant vers une courbe $f(t)$ de $\mathfrak{F}$. La courbe $f(t)$ passe par p et un point de A frontière par rapport à $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Par suite la famille $\mathfrak{F}$ est aussi presque semi-bordée à droite.

Théorème 22. *Si $\mathfrak{F}$ est la limite d'une suite quasi-compacte et convergente de familles presque semi-bordées à droite et si* $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ *est un espace régulier, parfaitement séparable et localement connexe,* $\mathfrak{F}$ *est une famille presque semi-bordée à droite.*

22. Famille sans-manque contenant une famille presque bordée. Nous allons maintenant établir le théorème suivant plus général que le théorème 21.

Théorème 23. *Soit* $\overline{\mathfrak{F}}$ *une famille sans-manque, quasi-compacte et contenant une famille presque semi-bordée à droite dont la région fondamentale coïncide avec celle de* $\overline{\mathfrak{F}}$. *Alors* $\overline{\mathfrak{F}}$ *est une famille semi-bordeé à droite.*

Soient A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et p un point de $\mathbf{R}_d(A, \overline{\mathfrak{F}})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Supposons que l'abscisse du point p est plus grande que τ. Pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'il existe une courbe de $\overline{\mathfrak{F}}$ passant par p et un point de la frontière B de A par rapport à $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Car alors la famille $\overline{\mathfrak{F}}$ est presque semi-bordée à droite et par suite, d'après le théorème 21, semi-bordée à droite. Si $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ contient p, p est nécessairement un point de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, car $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F}) \subset \mathbf{R}_d(A, \overline{\mathfrak{F}})$. $\mathfrak{F}$ étant une famille presque semi-bordée à droite, il existe une courbe appartenant à $\mathfrak{F}$ et passant par p et un point de B. Cette courbe appartient à $\overline{\mathfrak{F}}$. Le théorème est donc établi dans ce cas. Si $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ ne contient pas p, prenons une courbe quelconque $f(t)$ de $\mathbf{F}(A, \overline{\mathfrak{F}})$ passant par p. Si $(f(\tau), \tau)$ n'est pas un point de B, la courbe $f(t)$ passe par un point q de $\mathbf{R}_d(A, \mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. La famille $\mathfrak{F}$ contient une courbe $f_1(t)$ passant par q et un point de B. La courbe qui coïncide avec $f(t)$ à droite du point q et avec $f_1(t)$ à gauche du point q appartient à la famille $\overline{\mathfrak{F}}$ et passe par p et un point de B. C. Q. F. D.

D'après les théorèmes 22, 23, nous voyons que la famille des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire est une famille bordée.

23. Suites de familles bordées. La limite d'une suite quasi-compacte et convergente de familles bordées est-elle bordée ? Il n'en est rien. Mais dans de certains cas particuliers on peut affirmer que la limite est aussi bordée ; c'est par exemple le cas d'une suite décroissante. Il y a donc lieu d'introduire la convergence plus stricte que la convergence ordinaire. Considérons une suite convergente de familles[14]

$$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots \to \mathfrak{F}.$$

Soit $\mathfrak{F}'$ une famille fermée quelconque dans $\mathfrak{F}$. Si l'espace dépendant est régulier et parfaitement séparable, on peut extraire de $\mathfrak{F}_n$ une sous-famille $\mathfrak{F}'_n$ de manière que la suite des $\mathfrak{F}'_n$ converge vers $\mathfrak{F}'$. Alors l'ensemble $\mathbf{R}(\mathfrak{F}'_n)$ converge vers $\mathbf{R}(\mathfrak{F}')$ lorsque $n \to \infty$. Mais la frontière B_n de $\mathbf{R}(\mathfrak{F}'_n)$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_n)$ ne converge pas en général vers la frontière B de $\mathbf{R}(\mathfrak{F}')$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. S'il est toujours possible de choisir $\mathfrak{F}'_n$ de manière que la suite des B_n converge vers B, nous dirons que la convergence est complète. Cela posé, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 24. *La limite d'une suite quasi-compacte et complètement convergente de familles semi-bordées à droite, est une famille semi-bordée à droite, si les régions fondamentales sont localement connexes.*

En effet, soit une suite quasi-compacte et complètement convergente de familles semi-bordées à droite :

$$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots \to \mathfrak{F}.$$

Soient A un ensemble fermé dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et p un point de $\mathbf{R}_d(\mathfrak{F})$ frontière par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. D'après l'hypothèse, on peut extraire de $\mathfrak{F}_n$ une famille $\mathfrak{F}'_n$ telle que

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{F}'_n = \mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$$

$$\lim_{n=\infty} B_n = B$$

en désignant par B la frontière de $\mathbf{R}(A, \mathfrak{F})$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ et par B_n la frontière de $\mathbf{R}(\mathfrak{F}'_n)$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_n)$. Posons

$$A_n = \mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F}'_n).$$

(14) Ici on ne suppose pas que $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_1) = \mathbf{R}(\mathfrak{F}_2) = \ldots\ldots = \mathbf{R}(\mathfrak{F})$.

La famille $\mathbf{F}(A_n, \mathfrak{F}_n)$ converge vers $\mathbf{F}(A, \mathfrak{F})$ et la frontière B'_n de $\mathbf{R}(A_n, \mathfrak{F}_n)$ par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ converge vers B. En écartant le cas banal où l'abscisse du point p est égale à τ, on peut trouver une suite de points : $p_1, p_2, \ldots\ldots$ $(p_n \in B'_n)$ convergeant vers p. Si n est assez grand, l'abscisse du point p_n est plus grande que τ. Puisque la famille $\mathfrak{F}_n$ est semi-bordée à droite, il existe une courbe $f_n(t)$ de $\mathfrak{F}_n$ passant par p_n et un point q_n de $B'_n\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F}_n)$ et dont la partie située entre p_n et q_n se trouve dans B'_n. On peut extraire de la suite des $f_n(t)$ une suite partielle convergeant vers une courbe $f(t)$ de $\mathfrak{F}$. La courbe $f(t)$ passe par p et un point q de $B\,\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ et la partie de la courbe située entre p et q se trouve dans B puisque la suite des B'_n converge vers B. Le théorème est donc établi.

Corollaire. *La limite d'une suite décroissante de familles quasi-compactes et semi-bordées à droite est une famille semi-bordée à droite si les régions fondamentales sont localement connexes.*

En effet, on voit aisément que la suite est quasi-compacte et complètement convergente.

IV.—QUELQUES REMARQUES

24. Points singuliers. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues dans $\mathfrak{T}$. Nous appellerons semi-régulier à droite (gauche) le point p de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ tel que $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ ne contienne qu'un point pourvu que τ soit plus (moins) grand que l'abscisse du point p. Si $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ ne contienne qu'un point pourvu que τ soit plus (moins) grand que l'abscisse t du point p et assez voisin de t, nous dirons que le point p est localement semi-régulier à droite (gauche). Le point (localement) semi-régulier à droite et à gauche sera appelé (localement) régulier. Le point non localement semi-régulier à droite (gauche) sera appelé point semi-singulier à droite (gauche); le point semi-singulier à droite et à gauche sera appelé point singulier.

Soit $f(t)$ une courbe d'une famille sans-manque. Désignons par E_d l'ensemble des points semi-singuliers à droite situés sur la courbe, par E_g l'ensemble des points semi-singuliers à gauche et par E_s l'ensemble des points singuliers : $E_s = E_d E_g$. L'ensemble linéaire E_d est semi-fermé à gauche et l'ensemble linéaire E_g est semi-fermé à droite. Par suite l'ensemble E_s est fermé. Il est à remarquer qu'il peut arriver, même dans le cas d'une famille des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire, que deux courbes quelconques de la famille passant par un point singulier p coïncident nécessairement dans le voisinage du point p.

25. **Familles régulières.** La famille $\mathfrak{F}$ telle que tout point de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ soit un point semi-régulier à droite (gauche) sera appelée famille semi-régulière à droite (gauche). La famille semi-régulière à droite et à gauche sera appelée famille régulière.

Soient $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ des familles régulières dont les régions fondamentales sont les mêmes. Soit $\mathfrak{F}$ une famille contenant les familles $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ et dont la région fondamentale coïncide avec celles des $\mathfrak{F}_i$. La famille ne peut être semi-régulière sans qu'elle soit régulière, car par un point semi-singulier il passerait nécessairement au moins deux courbes d'une famille régulière, ce qui est absurde. Il me semble intéressant à rechercher les propriétés que possède la famille $\mathfrak{F}$ ou la distribution de ses points singuliers. Car cette recherche est intiment liée à celle des familles régulières primitives qui est la généralisation naturelle de la recherche des fonctions primitives.

26. **Familles conjuguées.** Nous avons remarqué plusieurs fois que l'ensemble de troncature d'une famille $\mathfrak{F}$ peut jouer un rôle analogue à celui de l'ensemble $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Il serait donc naturel d'introduire de certaines familles d'ensembles de troncature pouvant jouer un rôle analogue à celui de la famille des ensembles $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. Par exemple, considérons la famille $\mathfrak{S}$ d'ensembles de troncature ayant les propriétés suivantes :

1°. Par chaque point de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$, il passe au moins un ensemble de la famille ;

2°. La famille $\mathfrak{S}$ est compacte, c'est-à-dire de toute suite d'ensembles extraite de la famille $\mathfrak{S}$ on peut extraire une suite partielle convergeant vers un ensemble de la famille.

Une telle famille sera appelée famille conjuguée à $\mathfrak{F}$. Les diverses propositions établies jusqu'ici restent encore valable même si l'on remplace les ensembles $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ par les ensembles S de $\mathfrak{S}$. Mais les démonstrations deviendrons plus compliquées parce que l'on ne peut en général ordonner les ensembles de la famille.

CHAPITRE III

FAMILLES DE SYSTÈMES DE FONCTIONS RÉELLES

L'espace dépendant que nous considérerons dans ce chapitre est l'espace cartésien à un nombre n de dimensions. Cet espace sera désigné par $\mathfrak{W}_n$. Alors la fonction que nous considérerons n'est autre qu'un système de n fonctions continues à une variable réelle prenant des valeurs réelles.

I.—LIEUS DES POINTS SINGULIERS(15)

27. **Points singuliers de mesure positive.** Soient $\mathfrak{F}$ une famille de foctions continues dans $\mathfrak{T}$ et p un point de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Soit τ l'abscisse du point p. Si, quelque petit que soit le nombre positif ε, l'ensemble des points de $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ dont les abscisses sont $< \tau + \varepsilon$ est de mesure positive, le point p est appelé point semi-singnlier de mesure positive à droite. On peut de même définir le point semi-singulier de mesure positive à gauche. Le point semi-singulier de mesure positive à droite et à gauche s'appelle point singulier de mesure positive.

Théorème 25. *Soient $\mathfrak{F}$ une famille sans-manque et quasi-compacte et $f(t)$ une courbe de $\mathfrak{F}$ dont les points sont des points semi-singuliers de mesure positive à droite. Soit E_g l'ensmble des points semi-singuliers à gauche non situés sur la courbe $f(t)$. Si l'ensemble $\overline{E}_g$ des points d'accumulation de E_g situés sur la courbe $f(t)$ est dénombrable, la courbe $f(t)$ appartient à la famille $\mathfrak{F}$.*

(15) Les familles des courbes intégrales d'une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ont été étudiées par Mlle. Charpentier. Voir en particulier: Mathematika, Cluj, Vol. 5 (1931) p. 65-99.

Soit p un point de la courbe $f(t)$ n'apprtenant pas à $\bar{\bar{E}}_g$. Soit τ l'abscisse du point p et désignons par $\mathfrak{F}_0$ la famille $\mathbf{F}_g(S_{\tau+\varepsilon}, \mathbf{F}_d(A, \mathfrak{F}))$, où $S_{\tau+\varepsilon} = \mathbf{S}_{\tau+\varepsilon}(A, \mathfrak{F})$, $\varepsilon > 0$ et A est l'ensemble des points $(f(t), t)$ tels que $\tau < t \leqq \tau+\varepsilon$. Si ε est suffisamment petit, $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$ ne contient aucun point de $\bar{\bar{E}}_g$. Si q est un point de $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$, il existe un point p' dans A tel que $\mathbf{R}_d(p', \mathfrak{F}_0)$ contient q. Supposons qu'il existe deux points p' et p'' dans A tels que

$$q \in \mathbf{R}_d(p', \mathfrak{F}), \qquad q \in \mathbf{R}_d(p'', \mathfrak{F}).$$

Si $f_i(t)$ est la courbe passant par q et $p^{(i)}$ $(i = 1,2)$, les deux courbes $f_1(t)$ et $f_2(t)$ doivent se rencontrer sur la courbe $f(t)$. Si donc l'abscisse du point p'' est moindre que celle du point p', $\mathbf{R}_d(p'', \mathfrak{F}_0)$ contient p', et par suite $\mathbf{R}_d(p', \mathfrak{F}_0)$. D'autre part, si une suite de points $p^1, p^2, \ldots, p^\varkappa$, $\ldots$ converge vers un point p^ω et si toutes les régions $\mathbf{R}_d(p^\varkappa, \mathfrak{F}_0)$ contiennent q, la région $\mathbf{R}_d(p^\omega, \mathfrak{F}_0)$ contient aussi q puisque la famille est quasi-compacte. D'après ces remarques, on voit que la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$ se partage en un certain nombre d'ensembles disjoints, fermés et de mesure positive. Ces ensembles étant de mesure positive, le nombre doit être dénombrable au plus. Or $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$ est évidemment un continu. Ce nombre est donc égal à 1; et la région $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F}_0)$ coïncide avec $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$, c'est-à-dire $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F}_0)$ contient A. Cela indique qu'il existe dans $\mathfrak{F}$ une fonction qui coïncide avec $f(t)$ dans l'intervalle $(\tau, \tau+\varepsilon)$. Soit maintenant (τ', τ'') un intervalle contigu à l'ensemble dérivé A_g' de A_g. Dans un intervalle $(\bar{\tau}', \bar{\tau}'')$ intérieur à (τ', τ'') il n'existe qu'un nombre fini de points de A_g. $\mathfrak{F}$ étant une famille sans-manque, il existe une fonction de $\mathfrak{F}$ qui coïncide avec $f(t)$, dans l'intervalle $(\bar{\tau}', \bar{\tau}'')$. Puisque la famille $\mathfrak{F}$ est quasi-compacte, il existe donc une fonction de $\mathfrak{F}$ qui coïncide avec $f(t)$ dans (τ', τ''). D'une manière générale, on verra sans peine que si (τ', τ'') est un intervalle contigu à l'ensemble dérivé $A_g^{(\alpha)}$ d'ordre α, où α est un nombre transfini de classe I ou II, il existe une fonction de $\mathfrak{F}$ qui coïncide avec $f(t)$ dans l'intervalle (τ', τ''). Mains l'ensemble A_g étant fermé et dénombrable, les ensembles dérivés A_g sont nuls à partir d'un certain rang. Le théorème est donc établi.

Soit $f(t)$ une fonction continue définie dans un intervalle (τ', τ'') telle que tout point de la courbe $f(t)$ soit un point semi-singulier de mesure positive à droite (gauche). Nous appellerons, pour simplifier l'exposition, la courbe $f(t)$ ligne de $m_d > o$ $(m_g > o)$. La ligne de $m_d > o$ et de $m_g > o$ sera appelée ligne de $m > o$.

Théorème 26. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, l'enesemble des points de rencontre droit de la ligne $f(t)$ de $m_d > o$ avec les autres lignes de $m_d > o$ est au plus dénombrable.*

Soit R_d l'ensemble des points p tels que si τ est l'abscisse du point p, il existe une ligne $g(t)$ de $m_d > o$ satisfaisant aux conditions:

$$f(\tau) = g(\tau) \quad \text{et} \quad f(t) \neq g(t)$$

pour $t-\tau$ positif et assez petit. R_d est par définition l'ensemble des points de rencontre droit. On peut attacher à chaque point p de R_d un nombre positif $\delta(p)$ en sorte qu'il existe une ligne $g(t)$ de $m_d > o$ tell que

$$g(t) = f(t) \qquad \text{pour } t = \tau$$

$$g(t) = f(t) \qquad \text{pour } \tau < t \leqq \tau + \delta(p),$$

τ étant l'abscisse du point p. Nous désignerons par R^{ε}_{d} l'ensemble des points p de R_d pour lesquels on a $\delta(p) > \varepsilon$. Supposons que R_d n'était pas dénombrable. Il existerait alors un nombre positif ε tel que l'ensemble $R^{2\varepsilon}_{d}$ ne soit pas dénombrable. L'ensemble $\bar{E}_g$ étant dénombrable, $R^{2\varepsilon}_{d}$ contiendrait un point p_o n'appartenant pas à $\bar{E}_g$ et dont chaque voisinage contient un nombre non dénombrable de points de $R^{2\varepsilon}_{d}$. Soit A l'ensemble des points de la courbe $f(t)$ dont les abscisses sont au plus égales à $\tau_o + \varepsilon$ et au moins égales à $\tau_o - \varepsilon$, τ_o étant l'abscisse du point p_0. Soit $\mathfrak{F}_0$ la famille $\mathbf{F}_g(S_{\tau_0+\varepsilon}, \mathbf{F}_d(A, \mathfrak{F}))$, où $S_t = S_t(A, \mathfrak{F})$. Si ε est assez petit, la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$ ne contiendrait aucun point de E_g. A contenant un nombre non dénombrable de points de $R^{2\varepsilon}_{d}$, $S_{\tau_0+\varepsilon}$ contiendrait un nombre non dénombrable de points de rencontre du plan avec les lignes de $m_d > 0$. Ces points de rencontre seraient des points semi-singuliers de mesnre positive à droite. Or cela est impossible comme le montre le théorème suivant.

Théorème 27. *Soit E un ensemble de troncature d'une famille quasi-compacte $\mathfrak{F}$. Soit E_g l'ensemble des points semi-singuliers à gauche situés à droite de E. Si l'ensemble $\overline{E}_g$ des points d'accumulation de E_g situés dans E est dénombrable, l'ensemble E ne peut contenir qu'un nombre dénombrable de points semi-singuliers de mesure positive à droite.*

En effet, si l'ensemble S des points semi-singuliers de mesure positive à droite n'était pas dénombrable, il existerait dans E un point p n'appartenant pas à $\overline{E}_g$ et dont chaque voisinage contient un nombre non dénombrable de points de S. Soit τ l'abscisse du point p. On pourrait choisir un voisinage $V(p)$ et un nombre positif ε de manière que si $\mathfrak{F}_0$ désigne la famille $\mathbf{F}_g(S_{\tau+\varepsilon}, \mathbf{F}_d(EV(p), \mathfrak{F}))$, où $S_t = \mathbf{S}_t(EV(p), \mathfrak{F})$, la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_0)$ ne contienne aucun point de E_g. Si $p_1 \epsilon EV(p)$, $p_2 \epsilon EV(p)$, $p_1 \neq p_2$, les régions $\mathbf{R}_d(p_1, \mathfrak{F}_0)$ et $\mathbf{R}_d(p_2, \mathfrak{F}_0)$ ne contiendraient aucun point commun. $EV(p)$ ne pourrait donc contenir qu'un nombre dénombrable de points de S contrairement à l'hypothèse.

Remarque. Dans le cas de l'espace $\mathfrak{W}_1$ (i.e. le cas de la famille de fonctions réelles) tout point semi-singulier d'une famille sans-manque est de mesure positive, et l'hypothèse sur la mesure est inutile.

28. Points non-réguliers de mesure positive. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continue dans $\mathfrak{T}$. Un point p de $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ sera appelé point semi-non-régulier de mesure positive à droite (gauche) si la mesure de $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ $(\mathbf{R}_g(p, \mathfrak{F}))$ est positive. Le point p tel que $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ et $\mathbf{R}_d(p, \mathfrak{F})$ sont de mesure positive sera appelé point non-régulier de mesure positive. Soit $f(t)$ une fonction continue dans un intervalle (τ', τ'') et telle que tout point de la courbe $f(t)$ soit un point semi-non-régulier de mesure positive à droite (gauche); alors la courbe $f(t)$ sera appelée ligne de $M_d > 0$ $(M_g > 0)$. On obitent comme au numéro précédent les théorèmes suivants.

Théorème 28. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille saus-manque, quasi-compacte et semi-régulière à gauche. Alors toute ligne de $M_d > 0$ appartient à la famille.*

Théorème 29. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, une ligne de* $M_d > 0$ *ne rencontre qu'un nombre dénombrable de lignes de* $M_d > 0$.

Théorème 30. *Tout ensemble de troncature d'une famille semi-régulière et quasi-compacte contient au plus un nombre dénombrable de points semi-non-réguliers de mesure positive.*

II.—SUITES DE FAMILLES RÉGULIÈRES

Supposons qu'une suite de familles régulières converge vers une famille $\mathfrak{F}$. Cette famille est kneserienne et la section $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F})$ est un continu. Mais peut-elle être un continu quelconque ? Plus précisément, étant donné dans un plan $t = \tau$ un continu quelconque C, peut-on trouver une suite de familles régulières telle que $\mathbf{S}_\tau(p, \mathfrak{F}) = C$, $\mathfrak{F}$ désignant sa limite ? C'est ce que nous étudierons dans cette section. Mais avant cet étude il est commode de classifier les continus. Nous désignerons par $\overline{\mathfrak{W}}_n$ l'espace que l'on obtient en adjoutant à $\mathfrak{W}_n$ un point à l'infini. L'espace $\overline{\mathfrak{W}}_n$ est équivalent, au point de vue topologique, à une sphère dans $\mathfrak{W}_{n+1}$. Par l'emploie de $\overline{\mathfrak{W}}_n$ au lieu de $\mathfrak{W}_n$, nous pouvons éviter de faire des remarques annuyeux. Nous supposerons donc que l'espace dépendant que nous considérerons dans cette section est $\overline{\mathfrak{W}}_n$.

29. Classification des continus. Un continu C est dit de la classe 1 s'il peut se réduire à un point par déformation continuelle dans un ensemble ouvert quelconque contenant C. Soit k un entier plus grand que 1 et supposons définis les continus des classes inférieures à k. Un continu C est dit de la classe k s'il n'est pas de la classe inférieure à k et si à chaque ensemble ouvert O contenant C correspondent des continus $C_1, C_2, \ldots.$ jouissant des propriétés suivantes :

1°. $\quad C_1 + C_2 + \ldots . < C$;

2°. $\quad \sum_i \mathrm{cls}\,(C_i) = k - 1$ (16) ;

(16) Nous désignerons par cls (C) la classe du continu C.

3°. Tout ensemble fermé contenu dans $C-\sum_i C_i$ peut se réduire à un point par une déformation continuelle faite dans O.

Théorème 31. *Si deux continus E et E' ont des points communs, le continu $E+E^1$ est de la classe au plus égale à* cls $(E)+$cls (E').

Soit O un ensemble ouvert quelconque contenant $E+E'$. Il existe un ensemble ouvert O_0 contenu dans O et contenant E. Par définition, il existe des continus C_1, C_2, ... jouissant des propriétés 1°, 2°, 3° relatives à E et à O_0. Tout ensemble fermé contenu dans

$$E+E'-(\sum_i C_i+E')=E-\sum_i C_i$$

peut se réduire à un point par déformation continuelle dans O (puisque $O>O_0$). Donc

$$\begin{aligned}\text{cls}\,(E+E') &\leqq \sum \text{cls}\,(C_i)+\text{cls}\,(E')+1\\ &\leqq \text{cls}\,(E)+\text{cls}\,(E').\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Grace à cette propriété, on peut supposer que dans la définition de la classe les continus C_i sont disjoints.

30. Invariance de la classe du continu.

Théorème 32. *La classe du continu est indépendante du nombre de dimensions de l'espace qui le contient.*

Soint C un continu dans $\overline{\mathfrak{W}}_n$, et désignons par k la classe du continu C. On peut le considérer comme un continu dans $\overline{\mathfrak{W}}_{n+1}$; la classe de C considéré comme un continu dans $\overline{\mathfrak{W}}_{n+1}$ sera désignée par k'. Il est à démontrer que $k=k'$. Dans le cas où C contient tous les points de $\overline{\mathfrak{W}}_n$, il east visible que $k=k'=2$. Excluons ce cas. Nous pouvons alors supposer que le point à l'infini n'appartient pas à C, car le point à l'infini ne joue aucun rôle spécial dans $\overline{\mathfrak{W}}_n$. Nous considérerons donc le cas où C est un continu borné dans $\mathfrak{W}_n$. Prenons dans $\mathfrak{W}_{n+1}$ un système de coordonnées cartésiennes x_1, x_2, ..., x_{n+1} de manière que $\mathfrak{W}_n$ soit le plan représenté par $x_{n+1}=0$. Si O est un ensemble ouvert dans $\mathfrak{W}_{n+1}$ contenant C, il existe un ensemble ouvert O_1 dans $\mathfrak{W}_n$ contenant C et contenu dans O. Une déformation continuelle dans O_1 est aussi une déformation continuelle dans O. Il suit de là que $k' \leqq k$. Inversement soit O_1 un ensemble ouvert dans $\mathfrak{W}_n$ contenant C. Il existe alors un ensemble O ouvert dans $\mathfrak{W}_{n+1}$ contenant C et dont la projection faite parallèlement à l'axe des x sur le plan $\mathfrak{W}_n$ est contenu dans O. Considérons une déformation continuelle dans O

$$x_i = f_i(p, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

La déformation représentée par

$$x_i = f_i(p, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_{n+1} = 0$$

est une déformation continuelle faite dans O_1. Il suit de là que $k \leqq k'$. On aura donc

$$k = k'. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

31. **Suites convergentes de familles régulières.** Nous allons maintenant établir le théorème suivant.

Théorème 33. *Supposons qu'une suite compacte de familles compactes et régulières: $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ converge vers une famille $\mathfrak{F}$. Soient E_g l'ensemble des points semi-singuliers à gauche de la famille $\mathfrak{F}$ et E'_g son ensemble dérivé. Soit C un continu de la classe k dans $\mathbf{S}_0(\mathfrak{F})$. Si $\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})$ se trouve à l'intérieur de la région fondamentale $\mathbf{R}(\mathfrak{F}) = \mathbf{R}(\mathfrak{F}_i)$ par rapport à $\mathbf{E}(\mathfrak{W}_n, \mathfrak{T})$ et si l'on a*

$$\mathbf{R}(C, \mathfrak{F})\, E'_g = 0, \qquad \mathbf{R}(C, \mathfrak{F})\, E_g < \mathbf{S}_1(C, \mathfrak{F}),$$

$\mathbf{S}_1(C, \mathfrak{F})$ est un continu de la classe au plus égale à $k + m$, m désignant le nombre des points de E_g contenus dans $\mathbf{S}_1(C, \mathfrak{F})$.

D'une manière générale, soit C la somme des continus disjoints: $C^1, C^2, \ldots, C^{\mu}$ des classes $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\mu)}$ respectivement $(k = \sum_{i=1}^{\mu} k^{(i)})$. La section $\mathbf{S}_1(C, \mathfrak{F})$ est alors la somme de continus disjoints $S^1, S^2, \ldots$ en nombre μ' au plus égal à μ[17]. On aura alors

(17) La section $\mathbf{S}_\tau(C^i, \mathfrak{F})$ est un continu d'après le théorème du n° 10.

$\sum_{i=1}^{\mu'} \text{cls}\,(S^i) \leqq k + m$. Nous supposerons le théorème établi pour $k < k_0$ sous la forme généralisée et montrons que le théorème reste vrai pour $k = k_0$. Considérons d'abord la cas de $\mu' > 1$ Alors on aura par hypothèse

$$\text{cls}\,(S^i) \leqq \sum_j{}^{(i)} k^{(j)} + m^{(i)}$$

m$^{(i)}$ désignant le nombre des points de E_g situés dans S^i et $\sum_j^{(i)}$ désignant la somme étendue aux indices j tels que $\mathbf{S}_1(C^j, \mathfrak{F}) < S^i$. On en déduit

$$\sum_{i=1}^{\mu'} \text{cls}\,(S^i) \leqq k + m.$$

Considérons ensuite le cas de $\mu^1 = 1$, c'est-à-dire le cas où $\mathbf{S}_1(C, \mathfrak{F})$ est un continu S. C^i étant de la classe $k^{(i)}$, il existe dans C^i des continus disjoints C_1^i, C_2^i, ... tels que $\sum_j \text{cls}\,(C_j^i) = k^{(i)} - 1$ et que tout ensemble fermé dans $C^i - \sum_j C_j^i$ peut se réduire à un point par une déformation continuelle dans un ensemble ouvert quelconque contenant C^i. Désignons par p^1, p^2, ..., $p_{m'}$ les points de $E_g\,(S - \sum_{i,j} \mathbf{S}_1\,(C_j^i, \mathfrak{F}))$ et par $p_{m'+1}$, ..., p_m les points de $E_g\,\mathbf{S}_1(\sum_{i,j} C_j^i, \mathfrak{F})$. Le théorème étant admis pour $k < k_0$, $\mathbf{S}_1\,(\sum C_j^i, \mathfrak{F})$ est la somme des continus disjoints S_1, S_2, ... tels que

$$\sum_i \text{cls}\,(S_i) \leqq \sum_i (k^{(i)} - 1) + (m - m') \leqq k_0 + m - m' - 1.$$

Il suffit donc de démontrer que tout ensemble fermé contenu dans $S - (\sum_j S_j + \sum_{j=1}^{\mu'} p_j)$ peut se réduire à un point par une déformation continuelle dans un ensemble ouvert quelconque contenant S. Mais il est évident que si deux continus $\mathbf{S}_1(C^i, \mathfrak{F})$ et $\mathbf{S}_1(C^j, \mathfrak{F})$ ont des points communs, ces points communs appartiennent à E_g. Par suite, les μ ensembles[18]

$$A_i = \mathbf{S}_1\,(C^i, \mathfrak{F}) - (\sum_j S_j + \sum_{j=1}^{m'} p_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, \mu')$$

sont disjoints et il suffit de montrer que tout ensemble fermé contenu dans l'ensemble A_i peut se réduire à un point par une déformation contiuelle dans un ensemble ouvert quelconque contenant $\mathbf{S}_1(C^i, \mathfrak{F})$.

(18) Soient A et B deux ensembles. Nous désignerons par $A - B$ l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

Soit O_1^i un ensemble ouvert par rapport au plan $t=1$ et contenant $\mathbf{S}_1(C^i, \mathfrak{F})$. La famille $\mathfrak{F}$ étant compacte, il existe dans $\mathbf{S}_0(\mathfrak{F})$ un ensemble fermé O_0^i contenant intérieurement C^i et tel que $\mathbf{S}_1(O_0^i, \mathfrak{F})$ appartient à O_0^i. Soit F_i un ensemble fermé quelconque dans A_i. $\mathbf{R}(F_i, \mathfrak{F})$ ne contient aucun point semi-singulier à gauche; par suite $\mathbf{S}_0(F_i, \mathfrak{F})$ est un ensemble fermé dans $C^i - \sum_j C_j^i$. Il existe donc un ensemble fermé B_i contenant intérieurement l'ensemble $\mathbf{S}_0(F_i, \mathfrak{F})$ et pouvant se réduire à un point par une déformation continuelle dans O_0^i. On verra sans peine que pour j suffisamment grand on a

$$\mathbf{S}_1(O_0^i, \mathfrak{F}_i) < O_1^i,$$

$$\mathbf{S}_1(B_i, \mathfrak{F}_j) > F_i$$

Puisque la famille $\mathfrak{F}_j$ est régulière et compacte et que O_0^i appartient à la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F}_j)$, on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les ensembles O_0^i et $\mathbf{S}_1(O_0^i, \mathfrak{F}_j)$; et par cette correspondance, l'ensemble B_i correspondra à un ensemble contenant F_i. Puisque B_i peut se réduire à un point par une déformation continuelle dans O_0^i, $\mathfrak{F}_i$ peut se réduire à un point par une déformation continuelle dans O_1^i. Le théorème est donc établi.

Du théorème établi tout à l'heure découle immédiatement ce théorème.

Théorème 34. *Soit $\overline{\mathfrak{F}}$ une famille sans-manque contenant la limite $\mathfrak{F}$ d'une suite compacte et convergente de familles compactes et régulières $\overline{\mathfrak{F}_i}$. Soient E_g l'ensemble des points semi-singuliers à gauche de la famille $\overline{\mathfrak{F}}$ et E_g^1 son ensemble dérivé. Soit C un continu de la classe k dans $\mathbf{S}(\overline{\mathfrak{F}})$. Si $\mathbf{R}(C, \overline{\mathfrak{F}})$ se trouve à l'intérieur par rapport à $\mathbf{E}(\overline{\mathfrak{W}}_n, \mathfrak{T})$ de la région fondamentale $\mathbf{R}(\mathfrak{F}) = \mathbf{R}(\mathfrak{F}_i)$ et si $\mathbf{R}(C, \overline{\mathfrak{F}})$ ne contient aucun point de E_g^1, $\mathbf{S}_1(C, \overline{\mathfrak{F}})$ est un continu de la classe au plus égale à $k+m$, m désignant le nombre des points de E_g contenus dans $\mathbf{R}(C, \overline{\mathfrak{F}})$.*

Supposons que $\mathbf{S}_{t_i}(C, \overline{\mathfrak{F}})$ contient m_i points de E_g $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_s = 1;\ \sum_{i=1}^{s} m_i = m)$. Désignons par S_i la section $\mathbf{S}_{t_i}(C, \overline{\mathfrak{F}})$ et par k_i la classe du continu S_i. La famille $\overline{\mathfrak{F}}$ étant sans-manque, $\mathbf{F}_d(S_i, \mathfrak{F})$ coïncide avec la famille $\mathbf{F}_d(S_i, \overline{\mathfrak{F}})$; on aura donc en particulier

$$S_{i+1} = \mathbf{F}_d(S_i, \overline{\mathfrak{F}}).$$

Or on verra sans peine que

$$\mathbf{F}_g(S_{i+1}, \mathbf{F}_d(S_i, \overline{\mathfrak{F}})) = \mathbf{F}_g(S_{i+1}, \mathbf{F}_d(S_i, \mathfrak{F})).$$

On peut donc appliquer le théorème précédent et obtiendra

$$k_{i+1} \leqq k_i + m_{i+1}.$$

Par suite

$$k_s \leqq k + \sum_1^s m_i = k + m. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

III.—QUELQUES REMARQUES

Nous supposerons dans cette section que l'espace dépendant est $\overline{\mathfrak{W}}_n$.

32. **Familles serrées.** La classe d'un continu dans $\overline{\mathfrak{W}}_1$ est 2 ou 1 suivant qu'il coïncide avec $\overline{\mathfrak{W}}_1$ ou non. Cela posé, on obtient ce théorème.

Théorème 35. *Si l'espace dépendant est $\overline{\mathfrak{W}}_1$, toute famille compacte telle que la section $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est un continu dont la classe ne dépend pas de τ est une famille serrée.*

Dans le cas où la classe de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est égale à 2 $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ coïncide avec $\mathbf{E}(\overline{\mathfrak{W}}_1, \mathfrak{T})$. Si un ensemble F dans $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ sépare deux points p_1, p_2, $\mathbf{R}(F, \mathfrak{F})$ divise la région $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ en plusieurs parties parmi lesquelles il existe deux contenant p_1 et p_2 respectivement. Le théorème est donc évident dans ce cas. Considérons ensuite le cas où la classe de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est égale à 1. Dans ce cas, $\mathbf{S}(\mathfrak{F})$ est un segment de droite (pouvant contenir le point à l'infini). Désignons par $G(\tau)$ et $g(\tau)$ les ordonnées des extrémités du segment $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$. On verra sans peine que $G(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues[19]. On peut donc construire facilement une fonction continue dans $\mathfrak{T}$: $\psi(t)$ telle que tout point de la courbe $\psi(t)$ soit extérieur à $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$. Supposons qu'un point p de $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ sépare deux points p_1 et p_2 de $\mathbf{S}(\mathfrak{F})$. Soit $f(t)$ une courbe passant par

(19) Nous dirons qu'une fonction $f(t)$ est continue pour $t = t_0$ si $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$, $f(t_0)$ pouvant être ∞.

p. Les deux courbes $f(t)$ et $\psi(t)$ divisent $\mathbf{E}(\overline{\mathfrak{W}}_1, \mathfrak{F})$ en deux parties dont l'une contient p_1 et l'autre p_2. Donc tout continu situé dans $\mathbf{R}(\mathfrak{F})$ et contenant p_1 et p_2 rencontre nécessairement la courbe $f(t)$. Le théorème est complètement établi.

Ce théorème ne se généralise pas dans le cas de $\overline{\mathfrak{W}}_n$ où $n \geqq 2$, comme le montre l'exemple suivant.

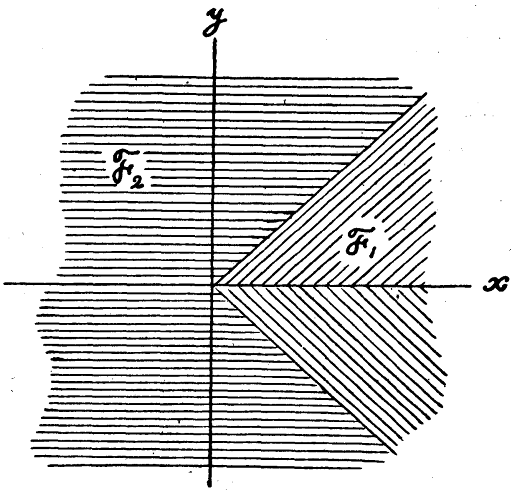
Exemple. Prenons dans un espace à trois dimensions trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Considérons les trois familles de demi-droites[20].

$$\mathfrak{F}_1: \quad y = \pm (x-a), \quad z = 0, \quad x \geqq a, \quad (a \geqq 0).$$

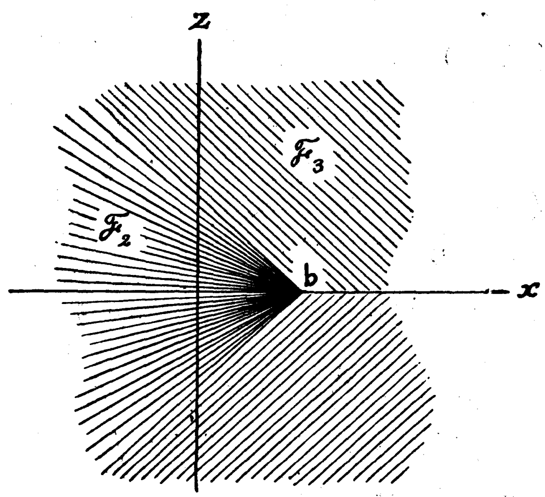
$$\mathfrak{F}_2: \quad y = \pm b, \quad z = \pm c\,(x-b), \quad x \leqq b, \quad (|c| \leqq 1, \quad -\infty < b < +\infty).$$

$$\mathfrak{F}: \quad y = \pm b, \quad z = \pm (x-b-h), \quad x \leqq b+h, \quad (h \geqq 0, \quad -\infty < b < +\infty).$$

Soit $\mathfrak{F}$ la famille sans-manque des fonctions $f(x)$ continues dans $0 \leqq x \leqq 1$ et telles que chaque $f(x)$ représente une courbe composée de parties des demi-droites des trois familles $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$. Si l'on ajoute à la famille $\mathfrak{F}$ la fonction : $f_0(x) = \infty$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, on obtient une famille compacte



La section par le plan $z = 0$.



La section par le plan $y = b$.

(20) Nous prendrons ici pour la variable indépendante la variable x au lieu de t.

et sans-manque $\overline{\mathfrak{F}}$ telle que $\mathbf{R}(\overline{\mathfrak{F}}) = \mathbf{E}(\overline{\mathfrak{W}}_2, \mathfrak{T}_x)$, où $\mathfrak{T}_x$ désigne l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Si E est l'ensemble des points de la droite $x = 0$, $z = 0$, E divise le plan $x = 0$ en deux parties P_1 et P_2. Mais $\mathbf{R}(E, \overline{\mathfrak{F}})$ est l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant les relations

$$z = 0, \qquad y \geqq x; \qquad 0 \leqq x \leqq 1,$$

ou

$$z = 0, \qquad y \leqq -x, \qquad 0 \leqq x \leqq 1.$$

On peut donc joindre un point de P_1 à un point de P_2 par une courbe de jordan ne contenant aucun point de $\mathbf{R}(E, \overline{\mathfrak{F}})$.

33. Familles kneseriennes. Familles bordées. Soit $\mathfrak{F}$ une famille sans-manque et compacte. L'exemple du numéro précédent montre que $\mathfrak{F}$ peut ne pas être une famille kneserienne même dans le cas où $\mathbf{R}(\mathfrak{F}) = \mathbf{E}(\overline{\mathfrak{W}}_n, \mathfrak{T})$. Mais dans le cas de $n = 1$ on obtient facilement ce théorème.

Théorème 36. *Si l'espace est $\overline{\mathfrak{W}}_1$, toute famille $\mathfrak{F}$ compacte, sans-manque et telle que la section $\mathbf{S}_\tau(\mathfrak{F})$ est un continu dont la classe ne dépend pas de τ est une famille kneserienne. Par suite $\mathfrak{F}$ est une famille bordée.*

La famille considérée dans l'exemple du numéro précédent est bordée. On peut donc se proposer la question : Toute famille sans-manque et compacte est-elle toujours une famille bordée[21] ?

(21) En faisant quelques hypothèses subsidiaires sur la région fondamentale : par exemple

$$\mathbf{R}(\mathfrak{F}) = \mathbf{E}(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{T}).$$