ALGEBRAISCHE FUNKTIONENKÖRPER UND RIEMANNSCHE FLÄCHEN

Von

Mikao MORIYA

EINLEITUNG

Im Gange der historischen Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen traten die funktionentheoretische und die geometrische Methode ziemlich früh, zur Zeit von ABEL und JACOBI, in die Erscheinung; dagegen wurde die arithmetische Methode verhältnismäßig spät, erst gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, eingeführt. Obwohl man schon in den Arbeiten von R. DEDEKIND—H. WEBER(1) und K. HENSEL—G. LANDSBERG(2) den Keim der heutigen algebraischen und arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen spürt, so ist sie doch als eine eigene Theorie erwachsen, erst nachdem die Algebra in diesem Jahrhundert einen großen Aufschwung erfahren hat. Heute versteht man im weitesten Sinne unter der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, ohne Benutzung des Kontinuitätsbegriffes, die Arithmetik in den Körpern vom Transzendenzgrad 1 über einem Grundkörper. Während sich aber diese Theorie selbständig entwickelt hat, hat man es ziemlich vernachläßigt, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Theorien klar hervortreten zu lassen.

Die vorliegende Arbeit soll als ein kleiner Beitrag zur Überbrückung der modernen arithmetischen und klassischen Theorie der algebraischen Funktionen dienen. Im ersten Paragraphen zeige ich, wie man, von einem algebraischen Funktionenkörper ausgehend, zum Begriff der topologischen RIEMANNschen Fläche gelangen kann. Dazu

---

(1) R. DEDEKIND und H. WEBER, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 92 (1882), S. 181-290; DEDEKIND's gesammelte math. Werke, 1. Bd. (1930), S. 238-349.

(2) K. HENSEL und G. LANDSBERG, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, Leipzig (1902).

ist es unentbehrlich, manche wichtige geometrische Begriffe—z.B. der Flächen, Kurven, u.s.w.—nicht so wie in der klassischen Literatur als anschaulich evident einzuführen, sondern mengentheoretisch streng zu definieren. Dabei erscheint, wie schon Herr H. WEYL in seinem berühmten Buch(1) bemerkt, die Betrachtungsweise, daß eine RIEMANNsche Fläche eine Überlagerungsfläche der komplexen Zahlkugel ist, als das Sekundäre; primär ist aber die Auffassung, daß sie, ganz gelöst von der Beziehung zum dreidimensionalen Punktraum, ein triangulierbares, zweidimensionales Gebiet bildet, auf dem sich die eindeutigen analytischen Funktionen definieren lassen. Die in diesem Paragraphen bewiesenen Tatsachen findet man im wesentlichen in dem WEYLschen Buch; nur gebe ich sie aus systematischen Gründen wieder.

Im zweiten Paragraphen wird die Beziehung der endlichen algebraischen Erweiterungen eines algebraischen Funktionenkörpers zu den Überlagerungsflächen über einer geschlossenen RIEMANNschen Fläche behandelt. Allgemeiner als im WEYLschen Buch muß man dabei nicht nur unverzweigte Überlagerungsflächen sondern auch verzweigte Überlagerungsflächen in Betracht ziehen. Nach dem bekannten Existenzsatz von B. RIEMANN ist durch eine geschlossene RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{S}$ ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriger Funktionenkörper definiert, welcher seinerseits aus den sämtlichen auf $\mathfrak{S}$ eindeutigen analytischen Funktionen besteht. Wenn $\mathfrak{S}$ in einer geschlossenen RIEMANNschen Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ enthalten ist, so ist der zu $\mathfrak{S}$ gehörige, algebraische Funktionenkörper ein Teilkörper des zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörigen Funktionenkörpers.

Ein Spezialfall, daß die Erweiterungen *galoissch* sind, ist im dritten Paragraphen eingehend untersucht. Ich will dort zeigen, daß einer regulären, unbegrenzten Überlagerungsfläche einer geschlossenen RIEMANNschen Fläche eine galoissche Erweiterung eines algebraischen Funktionenkörpers zugeordnet wird und umgekehrt. Es soll hier noch bemerkt werden, daß die letzte Hälfte dieser Tatsache schon von Herrn M. DEURING(2) ohne Beweis ausgesprochen ist.

Im Schlußparagraphen betrachte ich endliche *unverzweigte abelsche* Erweiterungen und *abelsche* Überlagerungsflächen. Der Begriff der abelschen Überlagerungsflächen, die zum erstenmal von Herrn H.

(1) H. WEYL, Die Idee der RIEMANNschen Fläche, Leipzig—Berlin (1923).

(2) M. DEURING, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper, Math. Ann., Bd. 106 (1932), S. 77–102.

WEYL als die Analoga zu den *HILBERTschen Klassenkörpern*[1] in die algebraische Funktionentheorie eingeführt wurde, läßt vom heutigen arithmetischen Standpunkte aus eine solche Tragweite erkennen, daß durch Heranziehung der abelschen Überlagerungsflächen einige Aussagen über die *Wurzelfunktionen* rein arithmetisch hergeleitet werden können.

§ 1. Absolute RIEMANNsche Fläche und ihre Topologie.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{k}$ durchweg den Körper aller komplexen Zahlen und K einen algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen mit $\mathfrak{k}$ als Konstantenkörper; es gibt daher in K eine Erzeugung x, y von K über $\mathfrak{k}$: $K=\mathfrak{k}(x, y)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dabei x als über $\mathfrak{k}$ *transzendent* und y als über $\mathfrak{k}(x)$ *algebraish* angenommen werden.

Wir betrachten zunächst eine *diskrete Exponentenbewertung* von K, welche $\mathfrak{k}$ trivial bewertet[2]. Die Gesamtheit aller einer derartigen Bewertung äquivalenten Bewertungen von K nennen wir wie üblich einen Primdivisor aus K[3]. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ einen Primdivisor aus K und $K_{\mathfrak{p}}$ die perfekte Hülle von K in bezug auf $\mathfrak{p}$, so lassen sich x, y in $K_{\mathfrak{p}}$ als formale *LAURENTsche* Reihen nach einem beliebigen Primelement von $\mathfrak{p}$ entwickeln, welche höchstens endlich viele negative Potenzen besitzen. Wenn man dabei ein geeignetes Primelement t von $\mathfrak{p}$ nimmt, so kann man durch Majorantenbildung beweisen, daß die LAURENTschen Reihen $x=P(t)$, $y=Q(t)$ in einem Kreisring konvergieren[4]. Bekanntlich kann man als t etwa ein Element entweder von der Form $\sqrt[\nu]{x-a}$ oder $\sqrt[\nu]{\frac{1}{x}}$ auswählen, wobei a eine komplexe Zahl bedeutet.

Aus der Tatsache, daß t ein Primelement von $\mathfrak{p}$ ist, folgt ohne weiteres, daß $x=P(t)$, $y=Q(t)$ in einem Kreis $|t|<r (r>0)$ *gültig* ist; d.h. die beiden Reihen sind, vielleicht abgesehen vom Mittel-

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 175–176.

(2) Für die allgemeine Theorie über die Bewertung vergleiche man VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, I. Teil, Berlin (1937), S. 245-266.

(3) Als eine beste ausführliche Darstellung über die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen verweise ich auf eine Arbeit von Herrn F. K. SCHMIDT, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen I, Math. Zeitschr., Bd. 41 (1936), S. 415–438.

(4) K. HENSEL, Neue Begründung der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, Math. Zeitschr., Bd. 5 (1919), S. 118–131.

punkt $t=0$, stets im Kreis $|t|<r$ konvergent und für $t_1 \neq t_2$, $|t_1|<r$ und $|t_2|<r$ sind niemals gleichzeitig $P(t_1)=P(t_2)$, $Q(t_1)=Q(t_2)$. $x=P(t)$, $y=Q(t)$ heißt dann *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Funktionselement* von x, y[1].

Da ein Element $r(x, y)$ aus K eine rationale Funktion von x, y mit Zahlenkoeffizienten ist, so ist $r(P(t), Q(t))$ eine LAURENTsche Reihe von t mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen. Wenn man daher jedem Element $(\neq 0)$ aus K den Exponenten von t des Anfangsgliedes seiner t-Entwicklung zuordnet, so wird dadurch eine Bewertung bestimmt, welche zum Primdivisor $\mathfrak{p}$ gehört. Hieraus sieht man ohne Schwierigkeit ein, daß aus einem Primdivisor ein einziges Funktionselement entsteht, aber aus verschiedenen Primdivisoren auch verschiedene Funktionselemente entstehen.

Wenn umgekehrt in einer gewissen Umgebung $|t|<r$ $(r>0)$ des Nullpunktes der komplexen t-Ebene ein Funktionselement $x=P(t)$, $y=Q(t)$, welches, eingesetzt in alle algebraischen Relationen zwischen x und y, sie als Relationen von t identisch erfüllt, gegeben ist, so ist jedes Element aus dem Körper $\mathfrak{k}(x, y)$ als LAURENTsche Reihe in t mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen entwickelbar. Der Exponent von t des Anfangsgliedes dieser Entwicklung definiert eine Bewertung von K. Mithin ist gezeigt:

Den Primdivisoren aus K entsprechen umkehrbar eindeutig die zu ihnen gehörigen Funktionselemente von x, y.

Aus einem Funktionselement $\mathfrak{e}$ von x, y entsteht stets seine Normaldarstellung[2]:

$$x=\alpha+t^{\nu}, \qquad y=Q(t),$$

wo $Q(t)$ eine LAURENTsche Reihe mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen von t bezeichnet. Wir nennen dabei der Einfachheit halber $\mathfrak{e}$ ein über α oder ∞ liegendes Funktionselement, je nachdem $t=\sqrt[\nu]{x-\alpha}$ oder $t=\sqrt[\nu]{\frac{1}{x}}$ ist; ebenso können wir den $\mathfrak{e}$ zugeordneten Primdivisor aus K einen über α oder ∞ liegenden Primdivisor nennen.

Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor aus K und $\mathfrak{e}=(x=\alpha+t^{\nu},\ y=Q(t))$ die Normaldarstellung des zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Funktionselementes von x, y, so heißt $\mathfrak{p}$ *verzweigt*, falls $\nu>1$ ist; sonst heißt $\mathfrak{p}$ unverzweigt[3].

(1) H. WEYL loc. cit., S. 6.
(2) H. WEYL, loc. cit., S. 8.
(3) H. WEYL, loc. cit., S. 9.

Nach einem Analogon zum Differenten-Diskriminantensatz der algebraischen Zahlentheorie überzeugt man sich davon, daß es in K endlich viele verzweigte Primdivisoren gibt (1). Zu fast allen komplexen Zahlen α existieren daher genau n verschiedene, über α liegende (unverzweigte) Primdivisoren von K, wenn n den Grad von K über $\mathfrak{k}(x)$ bezeichnet; dementsprechend liegen über α genau n verschiedene Funktionselemente von x, y.

Zwischen den Elementen x und y besteht bekanntlich eine algebraische Relation $F(x, y)=0$ mit Zahlenkoeffizienten. Dabei kann man ohne Einschränkung voraussetzen, daß $F(x, y)$ im Polynomring $\mathfrak{k}(x)[y]$ irreduzibel und der höchste Koeffizient von y in $F(x, y)$ gleich 1 ist. Aus der Bewertungstheorie schließt man leicht, daß y höchstens für diejenigen Primdivisoren, welche wenigstens einem Koeffizienten von $F(x, y)$ negativen Wert angeben, negative Bewertungen besitzen kann. Solche Primdivisoren gibt es aber nur endlich viel, weil jeder Koeffizient von $F(x, y)$ eine rationale Funktion von x ist. Abgesehen von endlich vielen Ausnahmepunkten liegen daher über jedem Punkt der x-Kugelfläche $\mathfrak{F}$ genau n verschiedene reguläre Funktionselemente (2). Wir schließen nun auf $\mathfrak{F}$ alle diejenigen Punkte, über denen mindestens ein nicht-reguläres Funktionselement von x, y liegt, und die unendliche Stelle $x=\infty$ aus, und bezeichnen die so entstehende Fläche mit $\mathfrak{F}'$.

Es sei $x=\alpha$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{p}_\alpha$ ein über α liegender Primdivisor von K. Ferner sei $x=\alpha+t$, $y=Q(t)$ die Normaldarstellung des zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Funktionselementes. Dann kann man die Potenzreihe $Q(t)=Q(x-\alpha)$ bis nach einem beliebigen Punkt $x=\beta$ auf $\mathfrak{F}'$ längs einer stetigen Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{F}'$ analytisch fortsetzen. Um dies zu beweisen, nehmen wir wie üblich an, daß $\mathfrak{c}$ als eine eindeutige stetige Funktion x eines reellen Parameters λ definiert ist, wobei λ das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ durchläuft, x_λ ein Punkt auf $\mathfrak{F}'$ und insbesondere für $\lambda=0$ bzw. $\lambda=1$ $x_0=\alpha$ bzw. $x_1=\beta$ ist. Wir nennen der Kürze wegen $\mathfrak{c}$ eine durch das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definierte Kurve. Wenn die analytische Fortsetzung längs der Kurve $\mathfrak{c}$ unmöglich ist, so gibt es einen reellen Wert λ^* mit $0 < \lambda^* < 1$ derart, daß sich für jedes λ $(0<\lambda<\lambda^*)$ $Q(x-\alpha)$ längs der Kurve $\mathfrak{c}$ bis nach x_λ analytisch fortsetzen läßt, aber nicht mehr bis x^*_λ. Da nach dem bekannten Satz von der Permanenz der Funktionalgleichung die algebraische

(1) R. DEDEKIND und H. WEBER, loc. cit., S. 223-228.

(2) H. WEYL, loc. cit., S. 8.

Relation $F(x, y)=0$ bei der obigen analytischen Fortsetzung erhalten bleibt, so bildet das Endelement $y=Q(x-x_\lambda)$ bei $x=x_\lambda$ mit $x=x_\lambda+(x-x_\lambda)$ zusammen ein Funktionselement von x, y. Nun bestimmen wir eine positive Konstante ε so, daß für jedes λ mit $0<\lambda^*-\lambda<\varepsilon$ der Punkt x_λ auf $\mathfrak{c}$ einem gemeinsamen Konvergenzkreis der sämtlichen n verschiedenen, über x_{λ^*} liegenden Funktionselemente von x, y angehört. Zu solchen n verschiedenen Funktionselementen besitzt y genau n verschiedene Potenzreihen $Q_1(x-x_{\lambda^*}), \ldots\ldots, Q_n(x-x_{\lambda^*})$ nach $x-x_{\lambda^*}$, aus denen durch eine unmittelbare analytische Fortsetzung auch n verschiedene Potenzreihen $Q_1(x-x_\lambda), \ldots\ldots, Q_n(x-x_\lambda)$ entstehen, solange λ das Intervall $0<\lambda^*-\lambda<\varepsilon$ durchläuft. Unter den Potenzreihen $Q_1(x-x_\lambda), \ldots., Q_n(x-x_\lambda)$ befindet sich sicher die oben angegebene Potenzreihe $y=Q(x-x_\lambda)$. Man kann also eine Potenzreihe $Q(x-x_{\lambda^*})$ so bestimmen, daß zu jedem Wert λ des Intervalls $0<\lambda^*-\lambda<\varepsilon$ das oben angegebene $Q(x-x_\lambda)$ die unmittelbare analytische Fortsetzung von $Q(x-x_{\lambda^*})$ bei $x=x_\lambda$ bildet; d.h. die Potenzreihe $Q(x-\alpha)$ ist entgegen der Annahme längs der Kurve $\mathfrak{c}$ bis nach $x=x_{\lambda^*}$ analytisch fortsetzbar, w.z.b.w.

Da man jede analytische Fortsetzung von $Q(x-\alpha)$ bei $x=\beta$ stets als längs einer, zwischen α und β verlaufenden, stetigen Kurve auf $\mathfrak{F}'$ entstanden annehmen kann, so gibt es höchstens n verschiedene Potenzreihen nach $x-\beta$, welche die analytischen Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$ bei $x=\beta$ darstellen; denn solche analytischen Fortsetzungen müssen mit $x=\beta+(x-\beta)$ zusammen Funktionselemente von x und y über β bilden. Wir bezeichnen nun mit $Q_1(x-\beta), \ldots., Q_m(x-\beta)$ die sämtlichen verschiedenen Potenzreihen, welche analytische Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$ bei $x=\beta$ ausmachen. Dann existieren bei einem beliebigen Punkte $x=\gamma$ auf $\mathfrak{F}'$ auch genau m verschiedene analytische Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$. Verbindet man nämlich β mit γ durch eine stetige Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{F}'$, so entstehen aus $Q_1(x-\beta), \ldots.,$ $Q_m(x-\beta)$ längs der Kurve $\mathfrak{c}$ m verschiedene analytische Fortsetzungen bei $x=\gamma$, welche ihrerseits analytische Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$ bei $x=\gamma$ darstellen. Gibt es aber bei $x=\gamma$ mehr als m verschiedene analytische Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$, so erhält man bei $x=\beta$ auch mehr als m verschiedene analytische Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$, indem man solche Fortsetzungen bei $x=\gamma$ in umgekehrter Richtung von γ bis nach β längs $\mathfrak{c}$ analytisch fortsetzt, was aber ein Widerspruch ist.

Bezeichnet man nun mit $Q_1(x-\alpha)=Q(x-\alpha), \ldots., Q_m(x-\alpha)$ die sämtlichen verschiedenen analytischen Fortsetzungen von $Q(x-\alpha)$

bei $x=a$, so ist eine symmetrische Funktion $S(Q_1(x-a), \ldots, Q_m(x-a))$ von $Q_1(x-a), \ldots, Q_m(x-a)$ mit Zahlenkoeffizienten offenbar eine reguläre Funktion auf $\mathfrak{F}'$. Da eine solche symmetrische Funktion auf einem jeden früher ausgeschlossenen Punkt der x-Kugelfläche höchstens einen Pol besitzen kann, so schließt man in geläufiger Weise, daß die Funktion eine rationale Funktion von x darstellt.

Nach dem eben Bemerkten ist $F^*(x, y)=(y-Q_1(x-a))\cdot\ldots\cdot(y-Q_m(x-a))$ ein Polynom von y mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten, weil die Koeffizienten aller Potenzen von y in $F^*(x, y)$ elementare symmetrische Funktionen von $Q_1(x-a), \ldots, Q_m(x-a)$ sind. Wenn $F^*(x, y)$ nicht durch $F(x, y)$ teilbar ist, so sind die beiden Polynome teilerfremd, weil $F(x, y)$ im Polynomring $\mathfrak{k}(x)[y]$ irreduzibel ist. Es existieren also zwei Polynome $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in x, y, und ein Polynom $f(x)$ von x derart, daß die Identität

$$F(x, y)\,u(x, y)+F^*(x, y)\,v(x, y)=f(x)$$

erfüllt wird. Da die rechte Seite der obigen Identität für alle x-Werte im Konvergenzkreis der Potenzreihe $Q(x-a)$ stets verschwindet, so müsste $f(x)$ identisch Null sein. $F^*(x, y)$ ist daher durch $F(x, y)$ teilbar; wegen $n \geqq m$ ist $F(x, y) = F^*(x, y)$.

Die oben bewiesene Tatsache kann nach Herrn H. WEYL auf folgende Weise formuliert werden:

Sind a, β beliebige Punkte auf der Fläche $\mathfrak{F}'$ und ist $\mathfrak{p}_a$ bzw. $\mathfrak{p}_\beta$ ein beliebiger, über a bzw. β liegender Primdivisor aus K, so verbinden sich die zu $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{p}_\beta$ gehörigen Funktionselemente von x, y stets durch eine analytische zusammenhängende Reihe[1].

Nun beweisen wir folgenden

Satz 1. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit $\mathfrak{k}$ als Konstantenkörper und x, y eine Erzeugung von K über $\mathfrak{k}$. Dann bildet die Gesamtheit aller Funktionselemente von x, y, welche zu den sämtlichen Primdivisoren aus K gehören, ein analytisches Gebilde.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{e}^{(1)}$ und $\mathfrak{e}^{(2)}$ Funktionselemente von x, y, welche zu zwei beliebigen Primdivisoren aus K gehören. Dann kann man eine analytische Umgebung[2] C_1 bzw. C_2 von $\mathfrak{e}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{e}^{(2)}$ so bestimmen, daß C_1 bzw. C_2, eventuell abgesehen von $\mathfrak{e}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{e}^{(2)}$, aus lauter Funktionselementen von x, y besteht, welche über den Punk-

---

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 11.

(2) H. WEYL, loc. cit., S. 9.

ten von $\mathfrak{F}'$ liegen, weil es nur endlich viele irreguläre Funktionselemente von x, y gibt. Dabei bezeichnet $\mathfrak{F}'$ wieder diejenige Fläche, welche aus der x-Kugelfläche durch Ausschließung der unendlichen Stelle und aller derjenigen Punkte, über denen wenigstens ein irreguläres Funktionselement von x, y liegt, entsteht.

Ist nun $\mathfrak{e}_0^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{e}_0^{(2)}$ ein reguläres Funktionselement von x, y in C_1 bzw. C_2, so sind $\mathfrak{e}_0^{(1)}$ und $\mathfrak{e}_0^{(2)}$ nach dem oben Bewiesenen durch eine analytische zusammenhängende Reihe verbunden. Da offenbar $\mathfrak{e}^{(1)}$ mit $\mathfrak{e}_0^{(1)}$ und $\mathfrak{e}^{(2)}$ mit $\mathfrak{e}_0^{(2)}$ resp. durch analytische zusammenhängende Reihen verbunden sind, so ist es auch $\mathfrak{e}^{(1)}$ mit $\mathfrak{e}^{(2)}$.

Es sei $\mathfrak{e}$ ein beliebiges Funktionselement von x, y, welches durch eine analytische zusammenhängende Reihe $\mathfrak{c}$ mit einem Funktionselement $\mathfrak{e}^{(1)}$ aus $\mathfrak{G}$ verbunden ist, wo $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit aller Funktionselemente von x, y bedeutet, welche zu den sämtlichen Primdivisoren aus K gehören. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{c}$, abgesehen von $\mathfrak{e}$ selbst, aus lauter Funktionselementen besteht, welche über den Punkten von $\mathfrak{F}'$ liegen. Ein Funktionselement $\mathfrak{e}_0 \neq \mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{c}$ besitzt offenbar die Normaldarstellung $\mathfrak{e}_0=(x=a_0+(x-a_0),\ y=Q_0(x-a_0))$, wo a_0 eine komplexe Zahl bedeutet. Wenn $\mathfrak{e}^{(1)}=(x=a_1+(x-a_1),\ y=Q_1(x-a_1))$ die Normaldarstellung von $\mathfrak{e}^{(1)}$ ist, so genügt $y=Q_1(x-a_1)$ der definierenden Gleichung $F(x,y)=0$ von K über $\mathfrak{k}(x)$ identisch: $F(x, Q_1(x-a_1))=0$. Hieraus folgt nach dem Satz der Permanenz der Funktionalgleichung:

$$F(x,\ Q_0(x-a_0)) = 0\ ;$$

d.h. in einer gewissen analytischen Umgebung von $\mathfrak{e}$ ist die Gleichung $F(x,y)=0$ identish erfüllt. Das Funktionselement $\mathfrak{e}$ erzeugt also einen Primdivisor aus K, und $\mathfrak{e}$ ist das zu diesem Primdivisor gehörige Funktionselement; d.h. $\mathfrak{e}$ gehört zu $\mathfrak{G}$, w.z.b.w.

Die Gesamtheit aller Primdivisoren aus K heißt nach R. DEDEKIND und H. WEBER die *absolute RIEMANNsche Fläche* von K. Um die absolute RIEMANNsche Fläche im topologischen Sinne als eine Fläche aufzufassen, greift man aus K eine Erzeugung x, y über $\mathfrak{k}$ heraus. Die Gesamtheit der Funktionselemente von x, y, welche zu den sämtlichen Primdivisoren aus K gehören, bildet nach Satz 1 ein analytisches Gebilde $\mathfrak{S}_x$, welches seinerseits im topologischen Sinne als eine RIEMANNsche Fläche aufgefasst werden kann(1).

Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor aus K und $\mathfrak{e}=(x=P(t),\ y=Q(t))$ das zu

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 30–34.

$\mathfrak{p}$ gehörige Funktionselement von x, y, so heiße die Gesamtheit aller derjenigen Primdivisoren aus K, welche den Funktionselementen in einer analytischen t-Umgebung(1) von $\mathfrak{e}$ zugeordnet sind, eine *Umgebung* von $\mathfrak{p}$. Den komplexen Parameter t nenne ich dabei eine *Ortsuniformisierende* von $\mathfrak{p}$. Wenn man nun jeden Primdivisor aus K als einen Punkt betrachtet, und den Begriff der Umgebung eines Punktes wie oben einführt, so wird die absolute RIEMANNsche Fläche von K eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$(2). Dabei ist $\mathfrak{S}$ definitionsgemäß der Fläche $\mathfrak{S}_x$ homöomorph; d.h. $\mathfrak{S}$ läßt sich als eine Fläche auffassen. Wenn man auf $\mathfrak{S}$ eine, bei dem Punkt $\mathfrak{p}$, reguläre Funktion mit Hilfe der Ortsuniformisierenden t von $\mathfrak{p}$ in geläufiger Weise definiert, so wird $\mathfrak{S}$ sicher eine geschlossene RIEMANNsche Fläche, weil $\mathfrak{S}_x$ geschlossen ist.

Es sei nun x', y' eine beliebige, von x, y verschiedene Erzeugung von K über $\mathfrak{k}$. Dann werden bekanntlich x, y und x', y' durch birationale Transformationen in einander übergeführt:

$$\left.\begin{aligned} x'&=\varphi'(x,y)\\ y'&=\psi'(x,y)\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} x&=\varphi(x',y')\\ y&=\psi(x',y')\end{aligned}\right\},$$

wo φ', ψ' bzw. φ, ψ rationale Funktionen von x, y bzw. x', y', bezeichnen.

Wenn man das zu einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K gehörige Funktionselement von x, y mit $\mathfrak{e}=(x=P(t),\ y=Q(t))$ bezeichnet, so erhält man durch Einsetzung von $x=P(t)$, $y=Q(t)$ in $x'=\varphi'(x,y)$, $y'=\psi'(x,y)$ die Relationen:

$$x'=P'(t),\qquad y'=Q'(t),$$

wobei $P'(t)$, $Q'(t)$ LAURENTsche Reihen von t mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen bezeichnen. Da jedes Element aus K eine rationale Funktion von x', y' ist, so wird mit Hilfe von $x'=P'(t)$, $y'=Q'(t)$ eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung von K definiert. Berücksichtigt man dabei, daß t ein Primelement von $\mathfrak{p}$ in der perfekten Hülle von K in bezug auf $\mathfrak{p}$ ist, so bestätigt man ohne weiteres, daß $\mathfrak{e}'=(x'=P'(t),\ y'=Q'(t))$ ein Funktionselement von x', y' nach dem komplexen Parameter t bildet; ferner ist $\mathfrak{e}'$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Funktionselement von x', y'.

Bezeichnet nun $\mathfrak{S}_x$ bzw. $\mathfrak{S}_{x'}$ diejenige RIEMANNsche Fläche,

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 10.
(2) H. WEYL, loc. cit., S. 17-18.

welche das analytische Gebilde der Funktionselemente von x, y bzw. x', y' bildet, so ist durch einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K stets eindeutig der $\mathfrak{p}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{p}_x$ auf $\mathfrak{S}_x$ bzw. $\mathfrak{p}_{x'}$ auf $\mathfrak{S}_{x'}$ bestimmt. Weil nach dem oben Gezeigten eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}_x$ auf $\mathfrak{S}_x$ gleichzeitig als eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}_{x'}$ auf $\mathfrak{S}_{x'}$ benutzt werden kann, so überzeugt man sich leicht davon, daß $\mathfrak{S}_x$ und $\mathfrak{S}_{x'}$ konform-äquivalent sind[1].

Die absolute RIEMANNsche Fläche von K ist definitionsgemäß eine Körperinvariante, dagegen ist ihre topologische Realisierung $\mathfrak{S}_x$ keine Körperinvariante, weil man aus einer von x, y verschiedenen Erzeugung von K über $\mathfrak{k}$ stets eine andere topologische Realisierung erhalten kann. Weil aber solche topologische Realisierungen der absoluten RIEMANNschen Fläche einander konform-äquivalent sind, und die konform-äquivalenten RIEMANNschen Flächen als die Verwirklichungen einer einzigen idealen RIEMANNschen Fläche aufgefasst werden können, so ist *die absolute RIEMANNsche Fläche von K ein algebraisches Äquivalent einer geschlossenen RIEMANNschen Fläche.*

Wir werden später der Kürze wegen von der RIEMANNschen Fläche eines Funktionenkörpers sprechen, indem man die dem Körper zugehörige, absolute RIEMANNsche Fläche in obiger Weise als eine topologische Fläche auffasst. Dabei kann man auch ohne Mißverständnis durch einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K schlechthin einen Punkt der RIEMANNschen Fläche von K bezeichnen.

Auf den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ einer RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$ seien die Funktionen $f(\mathfrak{p})$, $f(\mathfrak{q})$ gegeben, welche bzw. bei $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ analytisch sind; d.h. $f(\mathfrak{p})$ bzw. $f(\mathfrak{q})$ ist eine LAURENTsche Reihe nach einer Ortsuniformisierenden von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$, welche höchstens endlich viele negative Potenzen enthält. Dann heißt $f(\mathfrak{q})$ eine analytische Fortsetzung von $f(\mathfrak{p})$ auf $\mathfrak{S}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Jedem reellen Wert λ im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ist in stetiger Weise ein Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ und mindestens eine bei $\mathfrak{p}$ analytische Funktion $f(\mathfrak{p})$ zugeordnet; insbesondere sind dabei $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$, $f(\mathfrak{p}_0) = f(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}$, $f(\mathfrak{p}_1) = f(\mathfrak{q})$.

2) Ist t^* eine beliebige Ortsuniformisierende eines Punktes $\mathfrak{p}_{\lambda^*}$ $(0 \leqq \lambda^* \leqq 1)$ und $P(t^*)$ die LAURENTsche Entwicklung von $f(\mathfrak{p}_{\lambda^*})$ nach t^*, so läßt sich ein offenes Teilintervall $0 < |\lambda - \lambda^*| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ von $0 \leqq \lambda \leqq 1$ so bestimmen, daß für jedes λ in $0 < |\lambda - \lambda^*| < \varepsilon$ die Funktion $f(\mathfrak{p}_\lambda)$, dargestellt als eine LAURENTsche

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 36.

Reihe nach t^*-t_λ, mit der Umbildung von $P(t^*)$ nach t^*-t_λ übereinstimmt. Dabei bedeutet t_λ den $\mathfrak{p}_\lambda$ entsprechenden t^*-Wert in der komplexen t^*-Ebene, und infolgedessen t^*-t_λ eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}_\lambda$.

Wenn $f(\mathfrak{q})$ eine analytische Fortsetzung von $f(\mathfrak{p})$ ist, dann sagen wir auch, $f(\mathfrak{p})$ sei auf $\mathfrak{S}$ bis nach $\mathfrak{q}$ analytisch fortsetzbar. Wenn einmal der Begriff der analytischen Fortsetzung eingeführt ist, so wird es klar, was die analytische Fortsetzung einer Funktion *längs einer stetigen Kurve* auf $\mathfrak{S}$ bedeutet. Die analytische Fortsetzung längs einer stetigen Kurve ist, wenn überhaupt, nur auf eine Weise möglich. Nun beweisen wir

Satz 2. Der allgemeine Permanenzsatz der Funktionalgleichung.

Es seien $f_1(\mathfrak{p}),\ldots\ldots, f_m(\mathfrak{p})$ die bei einem Punkt $\mathfrak{p}$ auf einer RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$, analytischen Funktionen, welche alle längs einer stetigen Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{S}$ bis nach einem Punkt $\mathfrak{q}$ analytisch fortsetzbar sind. Besteht dann zwischen $f_1(\mathfrak{p}),\ldots\ldots, f_m(\mathfrak{p})$ eine algebraische Relation

$$G(f_1(\mathfrak{p}),\ldots\ldots, f_m(\mathfrak{p})) = 0$$

mit Zahlenkoeffizienten, so bleibt diese Relation bei der analytischen Fortsetzung längs $\mathfrak{c}$ stets erhalten.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, daß $G(f_1(\mathfrak{p}),\ldots\ldots, f_m(\mathfrak{p}))$ ein Polynom in $f_1(\mathfrak{p}),\ldots\ldots, f_m(\mathfrak{p})$ ist.

Ist nun t_0 eine Ortsuniformisierende des Anfangspunktes $\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{c}$, so läßt sich jede Funktion $f_i(\mathfrak{p})$ $(1\leqq i\leqq m)$ als eine LAURENTsche Reihe nach t_0 darstellen: $f_i(\mathfrak{p})=P_i(t_0)$. Dann kann man um den Nullpunkt der komplexen t_0-Ebene einen Kreis C_0 derart abgrenzen, daß in C_0 jede Funktion $P_i(t_0)$, abgesehen vom Mittelpunkt $t_0=0$, regulär ist. Ist also $t_0'\neq 0$ ein beliebiger Punkt in C_0, so erfüllen die Umbildungen $P_1'(t_0-t_0'),\ldots\ldots, P_m'(t_0-t_0')$ von $P_1(t_0),\ldots\ldots, P_m(t_0)$ nach t_0-t_0' die Funktionalgleichung

$$G(P_1'(t_0-t_0'),\ldots\ldots, P_m'(t_0-t_0')) = 0\,.$$

Nun existiert auf $\mathfrak{S}$ eine Umgebung von $\mathfrak{p}_0$, welche ins Innere von C_0 homöomorph abgebildet wird. Diese Umgebung enthält offenbar einen Teilbogen $\mathfrak{c}_0$ von $\mathfrak{c}$. Dabei entspricht einem beliebigen Punkt $\mathfrak{p}_{\lambda'}$ auf $\mathfrak{c}_0$ ein einziger Wert t_0' der komplexen t_0-Ebene, und die Umbildung $P_i'(t_0-t_0')$ von $P_i(t_0)$ nach t_0-t_0' stellt eine Entwicklung von $f_i(\mathfrak{p}_{\lambda'})$ nach der Ortsuniformisierenden t_0-t_0' von $\mathfrak{p}_{\lambda'}$ dar $(1 \leqq i \leqq m)$. Nach dem oben Gezeigten gilt daher:

$$G(f_1(\mathfrak{p}_{\lambda'}),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_{\lambda'})) = 0\,.$$

Wenn also die analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{c}$ bis nach $\mathfrak{q}$ unmöglich ist, so muß ein positives $\lambda^* < 1$ vorhanden sein, daß für jedes λ mit $0 \leqq \lambda < \lambda^*$ die Funktionalgleichung $G(f_1(\mathfrak{p}_\lambda),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_\lambda))=0$ stets erfüllt, aber $G(f_1(\mathfrak{p}_{\lambda^*}),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_{\lambda^*})) \neq 0$ ist. In der komplexen t^*-Ebene einer Ortsuniformisierenden t^* von $\mathfrak{p}_{\lambda^*}$ kann man offenbar einen solchen Kreis C^* mit $t^*=0$ als Mittelpunkt abgrenzen, daß in C^* die Darstellungen $P_1(t^*),\ldots, P_m(t^*)$ von $f_1(\mathfrak{p}_{\lambda^*}),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_{\lambda^*})$ nach t^*, bis auf den Punkt $t^*=0$, überall regulär sind. Im Kreis C^* kann man stets eine abgeschlossene Punktmenge S derart bestimmen, daß jedem Punkt t_λ^* aus S ein Punkt $\mathfrak{p}_\lambda$ auf $\mathfrak{c}$ mit $0<\lambda<\lambda^*$ entspricht. Nach Voraussetzung über λ^* gilt dann sicher:

$$G(f_1(\mathfrak{p}_\lambda),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_\lambda)) = 0\,;$$

d.h. für die Ortsuniformisierende $t^*-t_\lambda^*$ von $\mathfrak{p}_\lambda$ gilt:

$$G(P_1'(t^*-t_\lambda^*),\ldots, P'_m(t^*-t_\lambda^*)) = 0\,,$$

wenn $P_1'(t^*-t_\lambda^*),\ldots, P'_m(t^*-t_\lambda^*)$ die Umbildungen von $P_1(t^*),\ldots, P_m(t^*)$ bezeichnen. Da $G(f_1(\mathfrak{p}_{\lambda^*}),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_{\lambda^*})) = G(P_1(t^*),\ldots, P_m(t^*))$ eine LAURENTsche Reihe nach t^* mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen ist, so schließt man aus dem eben Gezeigten in geläufiger Weise, daß $G(P_1(t^*),\ldots, P_m(t^*)) = 0$ ist; d.h. $G(f_1(\mathfrak{p}_{\lambda^*}),\ldots, f_m(\mathfrak{p}_{\lambda^*}))=0$, was aber ein Widerspruch ist.

Ein System $\{f(\mathfrak{p})\}=f$ von Funktionen $f(\mathfrak{p})$, welche bei den einzelnen Punkten $\mathfrak{p}$ einer RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$ definiert sind, heißt *eine analytische Funktion* auf $\mathfrak{S}$, wenn

1) bei jedem Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ die $f(\mathfrak{p})$ analytisch sind,

2) für je zwei verschiedene Funktionen aus $\{f(\mathfrak{p})\}$ die eine stets eine analytische Fortsetzung der andern ist,

3) alle analytischen Fortsetzungen einer jeden Funktion aus dem System auch dem System angehören.

Wenn insbesondere zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ nur ein einziges $f(\mathfrak{p})$ aus $\{f(\mathfrak{p})\}$ vorhanden ist, so heißt f *eindeutig analytisch.*

Aus der obigen Definition schließt man folgendes:

Ist x, y eine Erzeugung von K über $\mathfrak{k}$, so sind x und y eindeutige analytische Funktionen auf der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$ von K.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß x, y auf der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}_x$, welche das analytische Gebilde der Funktionselemente von x, y bildet, eindeutig analytisch sind.

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{S}_x$, so ist dem $\mathfrak{p}$ eindeutig ein Funktionselement $\mathfrak{e}=(x=P(t),\ y=Q(t))$ zugeordnet, wo t eine Ortsuniformisierende des Punktes $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}_x$ bedeutet. Setzt man dabei $P(t)=f(\mathfrak{p})$, $Q(t)=g(\mathfrak{p})$, so sind $x=\{f(\mathfrak{p})\}$, $y=\{g(\mathfrak{p})\}$ auf $\mathfrak{S}$ eindeutig analytisch. Denn berücksichtigt man zunächst, daß die Gesamtheit aller Funktionselemente von x, y ein analytisches Gebilde bildet, so bestätigt man leicht, daß $\{f(\mathfrak{p})\}$ und $\{g(\mathfrak{p})\}$ auf $\mathfrak{S}$ analytisch sind; daß $\{f(\mathfrak{p})\}$, $\{g(\mathfrak{p})\}$ eindeutig ist, folgt ohne weiteres aus der Definition.

§ 2. Endliche algebraische Erweiterungen und Überlagerungsflächen.

Über einem algebraischen Funktionenkörper K einer Veränderlichen mit dem komplexen Zahlkörper $\mathfrak{k}$ als Konstantenkörper betrachten wir eine endliche algebraische Erweiterung $\bar{K}$ vom Grade n. Dann ist bekanntlich $\bar{K}$ auch ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen mit $\mathfrak{k}$ als Konstantenkörper. Ist nun $\bar{\mathfrak{S}}$ bzw. $\mathfrak{S}$ die RIEMANNsche Fläche von $\bar{K}$ bzw. K, so wird $\bar{\mathfrak{S}}$ eine Überlagerungsfläche[1] von $\mathfrak{S}$, indem man jedem Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ denjenigen Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ zuordnet, welcher, aufgefasst als Primdivisor aus K, durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Diese Zuordnung von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ wird im folgenden mit φ bezeichnet. Wenn die Primdivisoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ aus $\bar{K}$ Primteiler eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ aus K bezeichnen, so sagen wir, die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ liegen über $\mathfrak{p}$ und seien einander *konjugiert*. Über fast allen Punkten auf $\mathfrak{S}$ liegen bekanntlich genau n verschiedene, konjugierte Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}$. Ein in bezug auf K unverzweigter bzw. verzweigter Primdivisor aus $\bar{K}$ heiße auch ein unverzweigter bzw. verzweigter Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$.

Es sei x, z eine solche Erzeugung von $\bar{K}$ über $\mathfrak{k}$, daß x in K enthalten und über $\mathfrak{k}$ transzendent ist. Dann existiert eine Erzeugung x, y von K über $\mathfrak{k}$, wo y als ein Polynom von z mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten dargestellt wird. Geht ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ aus $\bar{K}$ in einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K mit dem genauen Exponenten e auf, so kann man in der perfekten Hülle von $\bar{K}$ in bezug

(1) H. WEYL, lcc. cit., S. 47.

auf $\mathfrak{P}$ stets ein Primelement τ von $\mathfrak{P}$ so bestimmen, daß $t=\tau^e$ ein Primelement von $\mathfrak{p}$ in der perfekten Hülle von K in bezug auf $\mathfrak{p}$ wird. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß τ eine Ortsuniformisierende des Punktes $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ und t eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ ist[1]. Offenbar kann man um den Nullpunkt der komplexen τ-bzw. t-Ebene einen Kreis $C_\tau(0 \leqq |\tau| < r)$ bzw. $C_t(0 \leqq |t| < r^e)$ so abgrenzen, daß die Parameterdarstellung $x=P(\tau)$, $z=Q(\tau)$ von x, z nach τ bzw. $x=\Pi(t)$, $y=K(t)$ von x, y nach t in C_τ bzw. in C_t gültig ist.

Wenn $\mathfrak{P}_0$ den einem τ-Wert τ_0 in C_τ entsprechenden Punkt auf $\overline{\mathfrak{S}}$ bezeichnet, so ist $\tau-\tau_0$ eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_0$; d.h. $\tau-\tau_0$ ein Primelement des Primdivisors $\mathfrak{P}_0$ aus $\overline{K}$. Ebenso entspricht $\tau=\tau_0$ ein einziger t-Wert $t_0=\tau_0{}^e$ in C_t und infolgedessen ein Punkt $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{S}$, welcher, aufgefasst als Primdivisor aus K, $t-t_0$ als ein Primelement besitzt. Wegen der Relation

$$t-t_0=(\tau-\tau_0+\tau_0)^e-\tau_0{}^e=(e+\ldots.+(\tau-\tau_0)^{e-1})(\tau-\tau_0)$$

ist $\tau-\tau_0$ auch ein Primelement von $\mathfrak{p}_0$.

Weil x, y beide als rationale Funktionen von x, z mit Zahlenkoeffizienten dargestellt sind, so überzeugt man sich leicht davon, daß eine zu $\mathfrak{P}_0$ gehörige Bewertung von $\overline{K}$ eine zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Bewertung von K induziert; $\mathfrak{P}_0$ ist ein Primteiler von $\mathfrak{p}_0$. Also ist $\mathfrak{p}_0$ der Spurpunkt von $\mathfrak{P}_0$ durch φ. Ferner existieren zu einem von Null verschiedenen t-Wert in C_t genau e verschiedene τ-Werte aus C_τ.

Wenn man nach der üblichen Terminologie aus der Funktionentheorie den oben betrachteten Punkt $\mathfrak{P}_0$ einen Verzweigungspunkt von der Ordnung $e-1$ (in bezug auf $\mathfrak{S}$) nennt, so folgt aus dem eben Bewiesenen folgendes:

Satz 3. *Die Zuordnung φ von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ induziert eine stetige Abbildung von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{P}$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $e-1$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{p}$ sein Spurpunkt auf $\mathfrak{S}$, so existiert eine Umgebung $\overline{U}$ von $\mathfrak{P}$ bzw. U von $\mathfrak{p}$ derart, daß, vielleicht abgesehen vom Punkt $\mathfrak{p}$ selbst, auf jedem Punkt $\mathfrak{p}_0$ aus U genau e verschiedene, einander konjugierte Punkte aus $\overline{U}$ liegen. Wenn insbesondere $\mathfrak{P}$ unverzweigter Punkt ist, so gibt es die Umgebungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$, welche einander homöomorph sind.*

Nun schließen wir aus der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$ von K alle

(1) K. HENSEL, loc. cit.

diejenigen Punkte aus, über denen mindestens ein Verzweigungspunkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ liegt; die dadurch entstehende Fläche $\mathfrak{S}^*$ nennen wir die *Stammfläche* von $\mathfrak{S}$. Der Fläche $\mathfrak{S}^*$ entsprechend, können wir auch eine Fläche $\bar{\mathfrak{S}}^*$ konstruieren, indem wir aus $\bar{\mathfrak{S}}$ alle Verzweigungspunkte nebst ihren konjugierten Punkten ausschließen; die Fläche $\bar{\mathfrak{S}}^*$ heiße auch die *Stammfläche* von $\bar{\mathfrak{S}}$. Offenbar wird $\bar{\mathfrak{S}}^*$ als eine Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}^*$ durch die oben definierte Zuordnung φ stetig auf $\mathfrak{S}^*$ abgebildet, und zwar ist $\bar{\mathfrak{S}}^*$ eine unverzweigte Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}^*$(1).

Es sei $\mathfrak{p}_0$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{S}^*$ und $\mathfrak{c}$ eine von $\mathfrak{p}_0$ ausgehende stetige Kurve, welche durch das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ definiert ist. Ist dann $\mathfrak{P}_0$ ein über $\mathfrak{p}_0$ liegender Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$, so existiert nach Satz 3 eine Umgebung $\bar{U}_0$ von $\mathfrak{P}_0$ derart, daß das durch φ auf $\mathfrak{S}$ entworfene Bild U_0 von $\bar{U}_0$ der Umgebung $\bar{U}_0$ homöomorph ist. Wenn also $\mathfrak{c}_0$ ein ganz in U_0 enthaltener Teilbogen von $\mathfrak{c}$ ist, so existiert in $\bar{U}_0$ eine einzige stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}_0$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0$, deren Spurkurve gerade $\mathfrak{c}_0$ ist; d.h. es existiert ein Teilintervall I_0 von $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und eine einzige durch I_0 definierte stetige Kurve auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$, deren Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0$ ist und deren Spurkurve auf $\mathfrak{S}^*$ der durch I_0 definierte Teilbogen von $\mathfrak{c}$ ist. Dabei erstreckt sich das möglichst große Intervall I_0 über das ganze Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Nämlich sonst gibt es einen positiven reellen Wert $\kappa < 1$ derart, daß für jedes positive $\lambda_1 < \kappa$ eine einzige durch $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ definierte, stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}_{\lambda_1}$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0$, deren Spurkurve der durch $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ definierte Teilbogen $\mathfrak{c}_{\lambda_1}$ von $\mathfrak{c}$ ist, existiert, aber für das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq \kappa$ keine solche Kurve auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ existiert. Es seien nun $\mathfrak{P}_\kappa^{(1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{P}_\kappa^{(n)}$ die sämtlichen verschiedenen Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$, welche über $\mathfrak{p}_\kappa$ liegen. Dann lassen sich die Umgebungen $\bar{U}^{(1)}, \ldots, \bar{U}^{(n)}$ von $\mathfrak{P}_\kappa^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_\kappa^{(n)}$ so bestimmen, daß je zwei verschiedene von diesen Umgebungen keinen Punkt gemeinsam haben. Ferner kann jede Umgebung $\bar{U}^{(i)}$ von vornherein so gewählt werden, daß $\bar{U}^{(i)}$ dem durch φ entworfenen Bild $U^{(i)}$ homöomorph ist. Offenbar enthält jede Umgebung $\bar{U}^{(i)}$ eine durch $\mathfrak{P}_\kappa{}^{(i)}$ verlaufende stetige Kurve, deren Spurkurve durch φ einen in $U^{(i)}$ enthaltenen Teilbogen von $\mathfrak{c}$ darstellt.

Wenn also die Differenz $0 < \kappa - \lambda_1$ hinreichend klein ist, so liegt der Punkt $\mathfrak{p}_{\lambda_1}$ in jeder Umgebung $U^{(i)}$ von $\mathfrak{p}_\kappa$, und in jeder Umgebung $\bar{U}^{(i)}$ existiert ein einziger, über $\mathfrak{p}_{\lambda_1}$ liegender Punkt $\mathfrak{P}_{\lambda_1}^{(i)}$. Da

(1) H. WEYL, loc. cit., S, 34.

über $\mathfrak{p}_{\lambda_1}$ genau n verschiedene Punkte liegen, so machen $\mathfrak{P}_{\lambda_1}^{(1)}, \ldots,$ $\mathfrak{P}_{\lambda_1}^{(n)}$ die sämtlichen über $\mathfrak{p}_{\lambda_1}$ liegenden, konjugierten Punkte aus. Hierbei können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\mathfrak{P}_{\lambda_1}^{(1)}$ der Endpunkt der oben angegebenen stetigen Kurve $\bar{\mathfrak{c}}_{\lambda_1}$ ist. Da $\bar{U}^{(1)}$ dem $U^{(1)}$ homöomorph ist, so kann man in $\bar{U}^{(1)}$ sicher eine stetige Kurve mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_{\lambda_1}^{(1)}$ und dem Endpunkt $\mathfrak{P}_{\kappa}^{(1)}$ finden, welche mit $\bar{\mathfrak{c}}_{\lambda_1}$ zusammen eine einzige stetige Kurve mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0$ bildet, deren Spurkurve gerade mit dem durch $0 \leqq \lambda \leqq \kappa$ definierten Teilbogen von $\mathfrak{c}$ übereinstimmt. Dies widerspricht der Annahme über κ, w.z.b.w.

Aus dem oben Bewiesenen folgt nun:

Die Stammfläche $\bar{\mathfrak{S}}^*$ ist eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}^*$. Wenn insbesondere $\bar{K}$ über K unverzweigt ist, so ist $\bar{\mathfrak{S}}=\bar{\mathfrak{S}}^*$ und $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^*$, und infolgedessen ist die RIEMANNsche Fläche von $\bar{K}$ selb t eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche über der RIEMANNschen Fläche von K.

Bisher haben wir zunächst die algebraischen Funktionenkörper herangezogen und dann die Eigenschaften ihrer RIEMANNschen Flächen untersucht. Von jetzt an geben wir umgekehrt die RIEMANNschen Flächen vorher und untersuchen die Eigenschaften der zu den Flächen gehörigen Funktionenkörper.

Es liege eine *geschlossene* RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{S}$ und eine Überlagerungsfläche $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ vor, welche ihrerseits auch geschlossen ist. Wir sagen dann, die Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ *enthalte* $\mathfrak{S}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Durch eine Zuordnung φ ist die Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ auf die ganze Fläche $\mathfrak{S}$ abgebildet.

2) Ist $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{p}=\varphi(\mathfrak{P})$ sein Spurpunkt durch φ, so besteht zwischen den Ortsuniformisierenden τ und t von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ die Relation:

$$t=\tau^e(c_0+c_1\tau+\ldots\ldots) \quad \text{mit } c_0 \neq 0,\ e \geqq 1,$$

wo die Potenzreihe in τ der rechten Seite einen positiven Konvergenzradius besitzt. Ferner läßt sich in der komplexen τ-Ebene ein Kreis C mit dem Mittelpunkt $\tau=0$ so abgrenzen, daß für einen τ-Wert τ_0 in C der τ_0 entsprechende Punkt $\mathfrak{P}_{\tau_0}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ stets durch φ auf den Punkt $\mathfrak{p}_{t_0}$ abgebildet ist, wobei $t_0=\tau_0{}^e(c_0+\ldots)$ ist.

Wenn zwischen einer Ortsuniformisierenden t eines Punktes $\mathfrak{p}$

auf $\mathfrak{S}$ und einer Ortsuniformisierenden τ eines über $\mathfrak{p}$ liegenden Punktes $\mathfrak{P}$ die Relation

$$t=\tau^e(c_0+\ldots\ldots) \quad \text{mit } c_0\neq 0,\ e\geqq 1$$

besteht, so ist der Exponent e von der Wahl der Ortsuniformisierenden unabhängig. Ferner kann man eine Umgebung U bzw. $\overline{U}$ von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ so bestimmen, daß über einem beliebigen Punkt aus U, abgesehen vom Punkt $\mathfrak{p}$, genau e verschiedene Punkte aus $\overline{U}$ liegen; d.h. $\mathfrak{P}$ ist ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $e-1$.

Nach dem bekannten Existenzsatz von B. RIEMANN(1) existieren auf $\mathfrak{S}$ zwei eindeutige analytische Funktionen x, y derart, daß die Gesamtheit aller auf $\mathfrak{S}$ eindeutigen analytischen Funktionen mit der Gesamtheit K aller rationalen Funktionen von x, y mit Zahlenkoeffizienten übereinstimmt. Offenbar bildet K einen algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen mit $\mathfrak{k}$ als Konstantenkörper; im folgenden wird also *K der zu $\mathfrak{S}$ gehörige algebraische Funktionenkörper genannt.*

Es sei $R(x, y)$ eine eindeutige analytische Funktion auf $\mathfrak{S}$. Dann ist $R(x, y)$ bei einem Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ stets als eine LAURENTsche Reihe $P(t)$ nach einer Ortsuniformisierenden t von $\mathfrak{p}$ darstellbar: $R(x, y) = P(t)$. Wenn zwischen einer Ortsuniformisierenden τ eines über $\mathfrak{p}$ liegenden Punktes $\mathfrak{P}$ und t die Relation

$$t=\tau^e(c_0+\ldots\ldots) \quad \text{mit } c_0\neq 0 \text{ und } e\geqq 1$$

besteht, so erhält man aus $P(t)$ eine LAURENTsche Reihe nach τ: $R(x, y)=P(t)=P'(\tau)$. Ordnet man jetzt dem Punkt $\mathfrak{P}$ die Funktion $P'(\tau)$ zu, so erhält man dadurch eine eindeutige analytische Funktion auf $\overline{\mathfrak{S}}$. $R(x, y)$ stellt also auf obige Weise eine eindeutige Funktion $\overline{\mathfrak{S}}$ dar.

Wenn man wie oben x als eine Funktion auf $\overline{\mathfrak{S}}$ auffasst, so erhält man eine Funktion z auf $\overline{\mathfrak{S}}$ derart, daß die Gesamtheit $\overline{K}$ aller rationalen Funktionen von x, z mit Zahlenkoeffizienten den zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehörigen algebraischen Funktionenkörper bildet. Da jede algebraische Relation zwischen endlich vielen, eindeutigen analytischen Funktionen auf $\mathfrak{S}$ stets erhalten bleibt, wenn solche Funktionen alle als Funktionen auf $\overline{\mathfrak{S}}$ aufgefasst werden, so kann man sich ohne Mißverständnis denken, daß $\overline{K}$ den Körper K als Teilkörper enthält.

Betrachtet man nun das analytische Gebilde $\mathfrak{S}_x$, welches aus

(1) Hierzu vergleiche etwa H. WEYL, loc. cit., S. 117–141.

den sämtlichen Funktionselementen von x, y besteht, so ist $\mathfrak{S}_x$ als eine RIEMANNsche Fläche der Fläche $\mathfrak{S}$ konform-äquivalent[1]. Ist also $\mathfrak{p}$ ein Punkt auf $\mathfrak{S}$, so ist stets dem $\mathfrak{p}$ eindeutig ein Funktionselement $\mathfrak{e}$ von x, y zugeordnet. Dabei sind x, y als LAURENTsche Reihen nach einer Ortsuniformisierenden von $\mathfrak{p}$ darstellbar, und infolgedessen ist wie in § 1 eindeutig ein Primdivisor von K bestimmt. Ferner ist eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$ ein Primelement des $\mathfrak{p}$ entsprechenden Primdivisors. Ist $\mathfrak{q}$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedener Punkt auf $\mathfrak{S}$, so entspricht $\mathfrak{q}$ ein von $\mathfrak{e}$ verschiedenes Funktionselement. Denn sonst besäße jede eindeutige analytische Funktion auf $\mathfrak{S}$, welche bei $\mathfrak{p}$ einen Pol besitzt, stets auch bei $\mathfrak{q}$ einen Pol, weil sie eine rationale Funktion von x, y ist; dies ist aber nach dem *RIEMANN-ROCHschen* Satz unmöglich[2]. Somit ist bewiesen: *Verschiedenen Punkten auf $\mathfrak{S}$ entsprechen auch verschiedene Primdivisoren und umgekehrt.*

Ebenso kann man zwischen den Punkten auf $\overline{\mathfrak{S}}$ und den Primdivisoren aus $\overline{K}$ eine eineindeutige Zuordnung herstellen. Wir können also ohne Mißverständnis mit einem Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ den ihm zugeordneten Primdivisor aus K bzw. $\overline{K}$ bezeichnen. Ist nun $\mathfrak{P}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegender Punkt auf $\overline{\mathfrak{S}}$ und besteht zwischen den Ortsuniformisierenden τ und t von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{p}$ die Relation $t=\tau^e(c_0+\ldots.)$ mit $c_0 \neq 0$, so geht $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{p}$ mit dem genauen Exponenten e auf, weil t, τ bzw. Primelemente von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{P}^{(1)},\ldots., \mathfrak{P}^{(r)}$ die sämtlichen verschiedenen, über $\mathfrak{p}$ liegenden Punkte und mit $e_1-1\ldots., e_r-1$ bzw. ihre Verzweigungsordnungen, so gilt

$$\sum_{i=1}^{r} e_i \leqq \text{Grad von } \overline{K} \text{ über } K,$$

weil $\mathfrak{P}^{(1)},\ldots., \mathfrak{P}^{(r)}$, aufgefasst als Primdivisoren, Primteiler von $\mathfrak{p}$ sind.

Wenn die Funktion x bei einem Punkt $\mathfrak{p}$ einen Zahlwert a annimmt, so gilt offenbar für eine Ortsuniformisierende t von $\mathfrak{p}$:

$$x=a+a_\nu t^\nu+\ldots\ldots \qquad (a_\nu \neq 0)^{(3)}.$$

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 138.

(2) Vgl. etwa H. WEYL, loc. cit., S. 122.

(3) Für $x=\infty$ kann man bekanntlich

$$\frac{1}{x}=a_\nu t^\nu+\cdots\cdots\cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

setzen.

Dann gilt für einen über $\mathfrak{p}$ liegenden Punkt $\mathfrak{P}$ mit τ als Ortsuniformisierender:

$$x = a + a'_\nu \tau^{e\nu} + \ldots\ldots \qquad (a'_\nu \neq 0);$$

d.h. $\mathfrak{P}$ ist ein Punkt auf $\overline{\mathfrak{S}}$, welcher über dem Punkt $x=a$ liegt, wenn $\overline{\mathfrak{S}}$ als eine Überlagerungsfläche über der x-Kugelfläche aufgefasst wird. Nimmt umgekehrt die Funktion x bei einem Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ den Wert a an, so muß x als Funktion auf $\mathfrak{S}$ definitonsgemäß bei dem Spurpunkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ (durch φ) den Wert a annehmen; $\mathfrak{P}$ ist daher ein über $\mathfrak{p}$ liegender Punkt.

Nun bezeichnen wir mit n und m bzw. die Grade von K und $\overline{K}$ über dem Körper $\mathfrak{k}(x)$. Sind dann $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die sämtlichen, über $x=a$ (oder ∞) liegenden Punkte auf $\mathfrak{S}$, deren Verzweigungsordnungen bzw. $\nu_1-1, \ldots, \nu_s-1$ sind, so ist bekanntlich

$$\nu_1 + \ldots + \nu_s = n.$$

Es bezeichnen nun $\mathfrak{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{P}_{r_i}^{(i)}$ die sämtlichen verschiedenen, über $\mathfrak{p}_i$ liegenden Punkte auf $\overline{\mathfrak{S}}$ und $e_1^{(i)}-1, \ldots, e_{r_i}^{(i)}-1$ bzw. ihre Verzweigungsordnungen $(1 \leqq i \leqq s)$. Dann gilt offenbar

$$m = \sum_{i=1}^{s} \nu_i (e_1^{(i)} + \ldots\ldots + e_{r_i}^{(i)}),$$

weil die $\mathfrak{P}_{j_i}^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq s,\ 1 \leqq j_i \leqq r_i)$ die sämtlichen über $x=a$ liegenden Punkte auf $\overline{\mathfrak{S}}$ ausmachen. Da nach dem oben Bewiesenen für jedes i $e_1^{(i)} + \ldots + e_{r_i}^{(i)} \leqq \frac{m}{n}$ ist, so folgt ohne weiteres, daß $e_1^{(i)} + \ldots + e_{r_i}^{(i)} = \frac{m}{n}$ ist; d.h. $\overline{\mathfrak{S}}$ ist eine $\frac{m}{n}$-blättrige Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$. Hierbei ist zu bemerken, daß die Blätterzahl $\frac{m}{n}$ als der Relativgrad von $\overline{K}$ über K eindeutig bestimmt ist, aber von der Wahl der Erzeugung x, y von K und x, z von $\overline{K}$ unabhängig ist. Ferner schließt man ohne Schwierigkeit, daß $\mathfrak{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{P}_{r_i}^{(i)}$ die sämtlichen verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{p}_i$ bezeichnen.

Da die RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{S}$ mit der zum Körper K gehörigen RIEMANNschen Fläche konform-äquivalent ist, so brauchen wir in unserer weiteren Untersuchung als ideale RIEMANNsche Flächen die beiden Flächen nicht zu unterscheiden, und wir nennen $\mathfrak{S}$ schlechthin die RIEMANNsche Fläche des zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Funktionenkörpers. Ebenso nennen wir $\overline{\mathfrak{S}}$ die RIEMANNschen Fläche des zn $\overline{\mathfrak{S}}$ gehörigen Funktionenkörpers.

§ 3. Galoissche Erweiterungen und reguläre Überlagerungsflächen.

Ist $\overline{\mathfrak{S}}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche und $\mathfrak{S}$ eine in $\overline{\mathfrak{S}}$ enthaltene, geschlossene RIEMANNche Fläche, so existiert, wie im vorigen Paragraphen gezeigt, der zu $\overline{\mathfrak{S}}$ bzw. $\mathfrak{S}$ gehörige algebraische Funktionenkörper $\overline{K}$ bzw. K, dessen RIEMANNsche Fläche gerade $\overline{\mathfrak{S}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{S}}$ ist. Da die Stammfläche $\overline{\mathfrak{S}}^*$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ über der Stammfläche $\mathfrak{S}^*$ von $\mathfrak{S}$ unverzweigt, unbegrenzt ist, so kann man die *Regularität* von $\overline{\mathfrak{S}}^*$ über $\mathfrak{S}^*$ in geläufiger Weise definieren, und zwar heißt $\overline{\mathfrak{S}}^*$ über $\mathfrak{S}^*$ regulär, wenn es niemals vorkommt, daß von zwei stetigen Kurven auf $\overline{\mathfrak{S}}^*$, welche dieselbe Spurkurve auf $\mathfrak{S}^*$ besitzen, die eine geschlossen, die andere ungeschlossen ist. Wir definieren nun die Regularität von $\overline{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ folgendermaßen:

$\overline{\mathfrak{S}}$ heiße über $\mathfrak{S}$ regulär, wenn die Stammfläche von $\overline{\mathfrak{S}}$ über der Stammfläche von $\mathfrak{S}$ regulär ist.

Wenn $\overline{\mathfrak{S}}^*$ über $\mathfrak{S}^*$ regulär ist, so ist es klar, was eine Decktransformation von $\overline{\mathfrak{S}}^*$ auf sich bedeutet[1]. Durch eine Decktransformation T^* ist $\overline{\mathfrak{S}}^*$ auf sich selbst homöomorph abgebildet und ein Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}^*$ geht in einen zu ihm konjugierten Punkt $\mathfrak{P}'$ über. Ferner gibt es nur eine einzige Decktransformation, welche $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ überführt. Mit Hilfe der Decktransformation T^* definieren wir eine Abbildung T von $\overline{\mathfrak{S}}$ *in sich* folgendermaßen:

Wenn $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf $\overline{\mathfrak{S}}^*$ ist, so definieren wir den Bildpunkt $\mathfrak{P}T^*$ von $\mathfrak{P}$ durch T^* als den Bildpunkt von $\mathfrak{P}$ durch T: $\mathfrak{P}T^*=\mathfrak{P}T$.

Gehört aber ein Punkt $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ nicht zu $\overline{\mathfrak{S}}^*$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}$ den Spurpunkt von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{S}$ und mit $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_r$ die sämtlichen verschiedenen, über $\mathfrak{p}$ liegenden Punkte auf $\overline{\mathfrak{S}}$. Da die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ die Fläche $\mathfrak{S}$ enthält, so lassen sich die Umgebungen $\overline{U}_1,\ldots,\overline{U}_r$ von $\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_r$ und eine Umgebung U von $\mathfrak{p}$ mit folgenden Eigenschaften bestimmen:

1) Jede Umgebung $\overline{U}_i$ besteht, abgesehen von $\mathfrak{P}_i$, aus lauter Punkten von $\overline{\mathfrak{S}}^*$.

2) Die Bilder von $\overline{U}_1,\ldots,\overline{U}_r$ in $\mathfrak{S}$ enthalten die Umgebung U.

3) Je zwei verschiedene von $\overline{U}_1,\ldots,\overline{U}_r$ haben keinen Punkt gemeinsam.

4) Ist $\mathfrak{p}_0$ ein beliebiger Punkt in U und $\mathfrak{P}_0$ ein beliebiger, über

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 50.

$\mathfrak{p}_0$ liegender Punkt auf $\mathfrak{S}$, so gibt es eine Umgebung $\bar{U}_i$, welche $\mathfrak{P}_0$ enthält.

Nun greifen wir aus $\mathfrak{S}^*$ einen Punkt $\mathfrak{Q}$ heraus und verbinden $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}$ durch eine stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$, welche, abgesehen vom Punkt $\mathfrak{P}$, ganz in $\mathfrak{S}^*$ gelegen ist. Dann existiert in $\bar{U}_1$ ein solcher Teilbogen $\bar{\mathfrak{c}}_0$ von $\bar{\mathfrak{c}}$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0$ und dem Endpunkt $\mathfrak{P}$, daß seine Spurkurve ganz in U enthalten ist. Dabei ist $\mathfrak{P}_0$ durch T in einen zu ihm konjugierten Punkt $\mathfrak{P}_0 T^*$ übergeführt, welcher sicher in irgendeinem von den $\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_r$ enthalten ist. Wir bezeichnen nun mit $\bar{U}_i$ die den Punkt $\mathfrak{P}_0 T^*$ enthaltende Umgebung und behaupten, daß der Teilbogen $\bar{\mathfrak{c}}_0$, abgesehen vom Punkt $\mathfrak{P}$, durch T in eine in $\bar{U}_i$ gelegene stetige Kurve übergeführt wird. Denn sonst gibt es einen Punkt $\mathfrak{P}'$ auf $\bar{\mathfrak{c}}_0$ derart, daß auf $\bar{\mathfrak{c}}_0$ alle Punkte zwischen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}'$, abgesehen von $\mathfrak{P}'$, durch T in $\bar{U}_i$ abgebildet sind, aber der Bildpunkt $\mathfrak{P}'T$ zu einer von $\bar{U}_i$ verschiedenen Umgebung $\bar{U}_j$ gehört; dies ist aber ein Widerspruch, weil $\mathfrak{P}'$ ein Punkt auf $\mathfrak{S}^*$ ist und infolgedessen stets eine ganz in $\bar{U}_j$ gelegene Umgebung von $\mathfrak{P}'T$ existiert, welche das durch T entworfene Bild einer Umgebung von $\mathfrak{P}'$ enthält.

Nun ordnen wir dem Punkt $\mathfrak{P}$ als Bildpunkt durch T den Punkt $\mathfrak{P}_i$ zu. Dann ist $\mathfrak{P}_i$ durch die Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ eindeutig bestimmt, aber es ist unabhängig sowohl von der Wahl der Umgebungen $\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_r$ und U als auch von der Wahl der Teilbogen $\bar{\mathfrak{c}}_0$, soweit $\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_r$ und U die Eigenschaften 1), 2), 3), 4) besitzen und die Spurkurven von den $\bar{\mathfrak{c}}_0$ ganz in U enthalten sind. Ferner können wir auch beweisen, daß der Bildpunkt $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}T$ von der Wahl der Kurven $\bar{\mathfrak{c}}$ unabhängig ist, solange solche Kurven, abgesehen vom Endpunkt $\mathfrak{P}$, ganz in $\mathfrak{S}^*$ gelegen sind. Zum Beweis betrachten wir eine von $\bar{\mathfrak{c}}$ verschiedene stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}'$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{Q}'$ und dem Endpunkt $\mathfrak{P}$, welche, abgesehen vom Punkt $\mathfrak{P}$, in $\mathfrak{S}^*$ verläuft. Aus den Kurven $\bar{\mathfrak{c}}$ und $\bar{\mathfrak{c}}'$ greifen wir bzw. die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_0'$ derart heraus, daß die Spurkurve des zwischen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ bzw. zwischen $\mathfrak{P}_0'$ und $\mathfrak{P}$ gelegenen Teilbogens von $\bar{\mathfrak{c}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{c}}'$ ganz in U liegt. Ferner verbinden wir $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ durch eine in $\mathfrak{S}^*$ verlaufendene Kurve $\mathfrak{d}_4$, und $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_0'$ durch eine solche stetige Kurve $\mathfrak{d}_2$, daß die Spurkurve von $\mathfrak{d}_2$ ganz in U enthalten ist. Bezeichnen wir den Teilbogen von $\bar{\mathfrak{c}}$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{Q}$ und dem Endpunkt $\mathfrak{P}_0$ durch $\mathfrak{d}_1$, und den Teilbogen von $\bar{\mathfrak{c}}'$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_0'$ und dem Endpunkt $\mathfrak{Q}'$ durch $\mathfrak{d}_3$, so bildet $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3 + \mathfrak{d}_4$ offenbar eine geschlossene stetige Kurve auf $\mathfrak{S}^*$, und folglich ist sie durch T in eine geschlossene

Kurve auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ übergeführt. Da der Bildpunkt $\mathfrak{P}_0T$ von $\mathfrak{P}_0$ in $\bar{U}_i$ liegt und die Spurkurve von $\mathfrak{d}_2$ ganz in U gelegen ist, so beweisen wir ohne Schwierigkeit, daß $\mathfrak{d}_2$ durch T in die Umgebung $\bar{U}_i$ abgebildet wird; d. h. der Bildpunkt $\mathfrak{P}_0'T$ von $\mathfrak{P}_0'$ liegt auch in $\bar{U}_i$. Somit ist bewiesen, daß $\mathfrak{P}$ durch Vermittelung der Kurve $\bar{\mathfrak{c}}'$ auch in $\mathfrak{P}_i$ übergeführt wird. Nach dem oben Gezeigten ist eine Abbildung von $\bar{\mathfrak{S}}$ in sich konstruiert, welche in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ eine vorgegebene Decktransformation von $\bar{\mathfrak{S}}^*$ auf sich induziert.

Durch die oben definierte Abbildung T ist eine stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ auch in eine stetige Kurve übergeführt. Gehört nämlich ein Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\bar{\mathfrak{c}}$ zu $\bar{\mathfrak{S}}^*$, so gibt es eine ganz in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ gelegene Umgebung von $\mathfrak{P}$, welche durch T in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ homöomorph abgebildet wird. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß die Bildkurve von $\bar{\mathfrak{c}}$ durch T beim Punkt $\mathfrak{P}T$ stetig ist. Ist aber $\mathfrak{P}$ kein Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$, so kann man auf $\bar{\mathfrak{c}}$ einen $\mathfrak{P}$ enthaltenden Teilbogen $\bar{\mathfrak{d}}$ derart abgrenzen, daß $\bar{\mathfrak{d}}$, abgesehen von $\mathfrak{P}$, aus lauter Punkten auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ besteht. Es sei $\bar{U}$ eine beliebige Umgebung $\mathfrak{P}T$. Nimmt man dann auf $\bar{\mathfrak{d}}$ einen Punkt $\mathfrak{P}_0$ hinreichend nahe bei $\mathfrak{P}$, so ist die Bildkurve des Teilbogens von $\bar{\mathfrak{c}}$, welcher zwischen $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ verläuft, nach dem früher Bewiesenen ganz in $\bar{U}$ enthalten; d. h. die Bildkurve ist bei $\mathfrak{P}T$ auch stetig, w. z. b. w.

Für einen Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ bestimmen wir eine solche Umgebung $\bar{U}$ von $\mathfrak{P}$, daß sie, eventuell abgesehen von $\mathfrak{P}$, aus lauter Punkten aus $\bar{\mathfrak{S}}^*$ besteht. Das Bild $\bar{U}T$ von $\bar{U}$ durch T ist, wie leicht bestätigt, eine Umgebung von $\mathfrak{P}T$, weil die Punkte aus $\bar{U}$ durch T umkehrbar eindeutig in die Punkte aus $\bar{U}T$ übergeführt sind. Ferner folgt ohne Schwierigkeit aus der Definition von $\bar{U}T$, daß $\bar{U}$ und $\bar{U}T$ einander homöomorph sind.

Aus der letzten Tatsache folgt nun, daß verschiedene Punkte aus $\bar{\mathfrak{S}}$ durch T auch in verschiedene Punkte übergehen. Nämlich sonst gibt es zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$, welche durch T in einen und denselben Punkt $\mathfrak{P}T$ übergehen. Verbindet man nun $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ durch eine stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$, welche, eventuell abgesehen von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, ganz in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ verläuft. Dann ist die Bildkurve $\bar{\mathfrak{c}}T$ von $\bar{\mathfrak{c}}$ durch T eine stetige geschlossene Kurve mit $\mathfrak{P}T$ als dem Anfangs- und Endpunkt. Dabei kann man eine solche Umgebung $\bar{U}^*$ von $\mathfrak{P}T$ bestimmen, daß es die Umgebungen $\bar{U}_1$ von $\mathfrak{P}_1$ und $\bar{U}_2$ von $\mathfrak{P}_2$ gibt, welche bzw. mit $\bar{U}^*$ homöomorph ist. Dabei kann man $\bar{U}^*$ von vornherein so wählen, daß $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ keinen Punkt gemeinsam haben. Nun grenzen wir in $\bar{U}_1$ einen Teilbogen $\bar{\mathfrak{c}}_1$ von $\bar{\mathfrak{c}}$ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}_1$ und in $\bar{U}_2$ einen Teilbogen $\bar{\mathfrak{c}}_2$ von $\bar{\mathfrak{c}}$ mit dem Endpunkt $\mathfrak{P}_2$ ab. Dann existieren in $\bar{U}^*$ die Bildkurven $\bar{\mathfrak{c}}_1 T$ und $\bar{\mathfrak{c}}_2 T$ von $\bar{\mathfrak{c}}_1$ und $\bar{\mathfrak{c}}_2$. Da $\bar{U}^*$ und $\bar{U}_1$ einander homöomorph sind, so gibt es in $\bar{U}_1$ eine Kurve $\bar{\mathfrak{c}}_2'$, welche durch T in $\bar{\mathfrak{c}}_2 T$ übergeht; dies ist aber ein Widerspruch, weil sonst auf $\bar{\mathfrak{c}}_2$ und $\bar{\mathfrak{c}}_2'$ zwei verschiedene, in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ gelegene Punkte, welche durch T in einen und denselben Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ übergehen, vorhanden sein müßten. Mithin ist bewiesen, daß T eine homöomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf sich ist. Wir nennen im folgenden eine homöomorphe Abbildung von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich, welche jeden Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ in einen zu ihm konjugierten Punkt überführt, eine *Decktransformation* von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich. Offenbar ist die oben definierte Abbildung T eine Decktransformation von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich.

Ist nun $\mathfrak{P}_0$ ein beliebiger unverzweigter Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{P}_0'$ ein zu $\mathfrak{P}_0$ konjugierter Punkt, so existiert bekanntlich eine einzige Decktransformation T^* von $\bar{\mathfrak{S}}^*$ auf sich, bei der $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}_0'$ übergeht. Aus T^* entsteht, wie oben gezeigt, eine Decktransformation T von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich, welche $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}_0'$ überführt. Wir behaupten nun, daß es nur eine einzige Decktransformation gibt, die $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}_0'$ überführt. Es sei nämlich T_1 eine Decktransformation von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich, welche $\mathfrak{P}_0$ auch in $\mathfrak{P}_0'$ überführt. Dann induziert T_1 in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ eine Decktransformation T_1^* von $\bar{\mathfrak{S}}^*$ auf sich, bei der $\mathfrak{P}_0$ in $\mathfrak{P}_0'$ übergeht, also wirkt T_1 auf die Fläche $\bar{\mathfrak{S}}_1^*$ wie T^* ein. Ist nun $\mathfrak{P}$ ein verzweigter Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$, so verbinden wir $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}_0$ durch eine stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$, welche, abgesehen von $\mathfrak{P}$, ganz in $\bar{\mathfrak{S}}^*$ verläuft. Durch die Decktransformationen T und T_1 geht jeder Punkt auf $\bar{\mathfrak{c}}$, abgesehen von $\mathfrak{P}$, in einen und denselben Punkt über, es muß daher $\mathfrak{P}$ durch T und T_1 auch in einen und denselben Punkt übergehen: d. h. T_1 stimmt mit T überein.

Wenn $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ n-blättrig ist, so gibt es genau n verschiedene konjugierte Punkte zu $\mathfrak{P}_0$. Also existieren genau n verschiedene Decktranformationen von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich. Ferner bildet die Gesamtheit aller Decktransformationen von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich eine Gruppe, wenn die Nacheinanderausführung der Decktransformationen als die Komposition der Gruppenelemente definiert ist. Nun lassen sich die bisher bewiesenen Tatsachen, wie folgt, formulieren:

Satz 4. *Es sei $\bar{\mathfrak{S}}$ eine geschlossene* RIEMANN*sche Fläche, welche eine geschlossene* RIEMANN*sche Fläche $\mathfrak{S}$ enthält. Ferner sei $\bar{\mathfrak{S}}$ eine reguläre Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$. Dann existiert eine Decktransformation von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich, bei der $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich homöomorph abgebildet wird und jeder Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ in einen zu ihm konjugierten Punkt über-*

geht. Ferner bildet die Gesamtheit aller Decktransformationen von $\bar{\mathfrak{S}}$ *auf sich eine Gruppe von der Ordnung* n, *wenn* $\bar{\mathfrak{S}}$ *über* $\mathfrak{S}$ n*-blättrig ist.*

Wir nehmen fortdauernd an, daß $\bar{\mathfrak{S}}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche ist, welche eine geschlossene RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{S}$ enthält, und $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ regulär ist. Ein Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ sei durch eine Decktransformation T von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich in einen Punkt $\mathfrak{P}'$ übergeführt. Dann ist die Verzweigungsordnung $e-1$ von $\mathfrak{P}$ gleich der Verzweigungsordnung $e'-1$ von $\mathfrak{P}'$. Zum Beweis bestimmen wir zunächst die Umgebungen $\bar{U}$ und $\bar{U}'$ von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ so, daß $\bar{U}$ durch T homöomorph auf $\bar{U}'$ abgebildet wird. Ist nun $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger von $\mathfrak{P}$ verschiedener Punkt aus $\bar{U}$, welcher hinreichend nahe bei $\mathfrak{P}$ liegt, so gibt es in $\bar{U}$ genau e verschieden zu $\mathfrak{Q}$ konjugierte Punkte $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{Q}_e$, die in $\mathfrak{S}$ einen und denselben Spurpunkt $\mathfrak{q}$ besitzen. Durch die Transformation T gehen die obigen e Punkte auch in e verschiedene Punkte über, deren Spurpunkte $\mathfrak{q}$ sind. Daraus schließt man leicht $e=e'$, weil $\bar{U}$ und $\bar{U}'$ einander homöomorph sind.

Ist nun τ bzw. τ' eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{P}'$, so gilt zwischen einer Ortsuniformisierenden t des Spurpunktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ (also auch von $\mathfrak{P}'$) und τ, τ' die Gleichung:

$$t=\tau^e(c_0+c_1\tau+\ldots.) \quad c_0 \neq 0 \text{ bzw. } t=\tau'^e(c_0'+c_1'\tau'+\ldots.) \quad c_0' \neq 0$$

Es besteht daher eine Gleichung:

$$\tau'=\tau(a_0+a_1\tau+\ldots..),$$

wo $a_0 \neq 0$ ist und $a_0+a_1\tau+\ldots.$ eine Potenzreihe von τ mit einem positiven Konvergenzradius bezeichnet. Die Ortsuniformisierende τ' von $\mathfrak{P}'$ kann auch als eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}$ benutzt werden.

Nun sei x, z eine Erzeugung des zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörigen Funktionenkörper $\bar{K}$ über dem komplexen Zahlkörper. Dann kann man wie im vorigen Paragraphen x als eine eindeutige analytische Funktion aus dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Funktionenkörper K annehmen. Offenbar entspricht einem Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ umkehrbar eindeutig ein Funktionselement $\mathfrak{e}=(x=P(\tau), z=Q(\tau))$, wo τ eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Dem Bildpunkt $\mathfrak{P}T$ von $\mathfrak{P}$ durch eine Decktransformation T von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich entspricht ebenso ein Funktionselement $\mathfrak{e}T=(x=P'(\tau'), z=Q'(\tau'))$, wo τ' eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}T$ bezeichnet. Da nach dem oben Gezeigten τ' auch eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}$ ist, so kann $Q'(\tau')$ als eine bei $\mathfrak{P}$ analytische Funktion aufgefasst werden. Wir ordnen nun jedem Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{S}$ wie oben die z-Komponente(1) des dem Bildpunkt $\mathfrak{P}T$ entsprechenden Funktionselementes von x, z zu, und erhalten dadurch ein System z^T von den Funktionen, welche bei den einzelnen Punkten auf $\mathfrak{S}$ eindeutig definiert und sogar analytisch sind.

Wir behaupten jetzt, daß z^T eine eindeutige analytische Funktion auf $\mathfrak{S}$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß eine beliebige Funktion aus z^T bis nach einem beliebigen Punkt aus $\mathfrak{S}$ analytisch fortsetzbar ist und die dadurch erhaltene Funktion stets dem System z^T angehört. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Punkt anf $\mathfrak{S}$ und $Q'(\tau')$ die $\mathfrak{P}$ zugeordnete Funktion aus z^T, wo τ' eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}T$ bezeichnet. Ferner sei $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{c}$ eine $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ verbindende stetige Kurve auf $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{c}$ wie üblich eine durch das Intervall $I(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ definierte Punktmenge von $\mathfrak{P}$ und insbesondere $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}_1$. Offenbar geht $\mathfrak{c}$ durch die Decktransformation T auch in eine stetige Kurve $\mathfrak{c}T$ über, und ein Punkt $\mathfrak{P}_\lambda$ auf $\mathfrak{c}$ geht auch in einen in $\mathfrak{c}T$ gelegenen Punkt $\mathfrak{P}_\lambda T$ über. Ist nun $\mathfrak{P}_{\lambda_0}T$ ein Punkt auf $\mathfrak{c}T$, so ist dem Punkt $\mathfrak{P}_{\lambda_0}T$ ein Funktionselement $\mathfrak{e}_{\lambda_0}T=(x=P'_{\lambda_0}(\tau'_{\lambda_0}),\ z=Q'_{\lambda_0}(\tau'_{\lambda_0}))$ zugeordnet, wobei τ_{λ_0} eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}T$ bezeichnet. Da $\mathfrak{c}T$ eine stetige Kurve ist, so gibt es ein λ_0 enthaltendes Teilintervall I_{λ_0} von I derart, daß für jeden Wert λ in I_0 die z-Komponente $Q'_\lambda(\tau'_\lambda)$ des Funktionselementes von x, z bei $\mathfrak{P}_\lambda T$ eine unmittelbare Fortsetzung von $Q'_{\lambda_0}(\tau'_{\lambda_0})$ ist. Dabei bezeichnet τ'_λ eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}_\lambda T$. Zufolge der Definition von z^T ist $Q'_{\lambda_0}(\tau'_{\lambda_0})$ bzw. $Q'_\lambda(\tau'_\lambda)$ die dem Punkt $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ bzw. $\mathfrak{P}_\lambda$ zugeordnete Funktion aus z^T. Hieraus schließt man sofort, daß $Q'(\tau')$ längs $\mathfrak{c}$ bis nach $\mathfrak{Q}$ analytisch fortsetzbar ist, und zwar durch diese analytische Fortsetzung bei $\mathfrak{Q}$ die Funktion auftritt, welche die z-Komponente des Funktionselementes von x, z bei $\mathfrak{P}_1$ darstellt; d.h. die analytische Fortsetzung von $Q'(\tau')$ bis nach $\mathfrak{Q}$ ist unabhängig von der Wahl der Kurven $\mathfrak{c}$. Somit ist die Möglichkeit und Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung bestätigt, w.z.b.w.

Weil z^T eine eindeutige analytische Funktion auf $\mathfrak{S}$ ist, so ist es bekanntlich eine rationale Funktion $R_T(x, z)$ von x, z mit Zahlenkoeffizienten. Wir bezeichnen mit n den Grad von $\overline{K}$ über K. Dann genügt z einer irreduziblen Gleichung $f(X)=0$ vom Grade n mit

(1) Im Funktionselement $\mathfrak{e}T=(x=P'(\tau'),\ z=Q'(\tau'))$ heißt $z=Q'(\tau')$ die z-Komponente von $\mathfrak{e}T$.

Elementen aus K als Koeffizienten. Offenbar ist daher beim Punkt $\mathfrak{P}T$ die Gleichung $f(Q'(\tau'))=0$ in τ' identisch erfüllt. Fasst man aber anderseits $Q'(\tau')$ als die τ'-Entwicklung der Funktion z^T bei $\mathfrak{P}$ auf, so bleibt wegen der Permanenz der Funktionalgleichung die Gleichung $f(Q'(\tau'))=0$ bei jedem Punkt auf $\mathfrak{S}$ erhalten; d.h. z^T ist eine Wurzel der Gleichung $f(X)=0$.

Wir wollen weiter zeigen, daß aus zwei verschiedenen Decktransformationen T_1, T_2 von $\mathfrak{S}$ auf sich auch verschiedene Wurzeln z^{T_1}, z^{T_2} von $f(X)=0$ entstehen. Dazu ziehen wir einen Punkt $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{S}^*$ heran. Dann existieren genau n verschiedene, zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Punkte auf $\mathfrak{S}$. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ den Spurpunkt von $\mathfrak{P}$, so läßt sich offenbar eine Ortsuniformisierende t von $\mathfrak{p}$ gleichzeitig als eine Ortsuniformisierende eines jeden über $\mathfrak{p}$ liegenden Punktes auf $\mathfrak{S}$ benutzen. Dann ist das $\mathfrak{P}T_1$ bzw. $\mathfrak{P}T_2$ zugeordnete Funktionselement von x, z von der Form

$$\mathfrak{e}T_1=(x=P(t),\ z=Q_{T_1}(t)) \text{ bzw. } \mathfrak{e}T_2=(x=P(t),\ z=Q_{T_2}(t)),$$

weil x eine Funktion auf $\mathfrak{S}$ ist. Da die Punkte $\mathfrak{P}T_1$, $\mathfrak{P}T_2$ als Primdivisoren aus $\bar{K}$ voneinander verschieden sind, so muß unbedingt $Q_{T_1}(t) \neq Q_{T_2}(t)$ sein. Dies besagt aber, daß die Funktionen z^{T_1} und z^{T_2} beim Punkt $\mathfrak{P}$ verschiedene t-Entwicklungen besitzen; also ist sicher $z^{T_1} \neq z^{T_2}$. Da die z^T, wie schon bemerkt, als rationale Funktionen von x, z in $\bar{K}$ enthalten sind und der Grad von $f(X)$ gleich n ist, so stellen die z^T die sämtlichen verschiedenen Wurzeln von $f(X)=0$ dar, wenn T alle Decktransformationen von $\mathfrak{S}$ auf sich durchläuft. Ferner wird $\bar{K}$ sicher über K *galoissch*.

Zu einer Decktransformation T von $\mathfrak{S}$ auf sich existiert bekanntlich ein einziger Automorphismus θ von $\bar{K}$ über K, bei dessen Anwendung die Wurzel z von $f(X)=0$ in z^T übergeht: $z^\theta = z^T$. Dabei entstehen aus verschiedenen Decktransformationen von $\mathfrak{S}$ auf sich auch verschiedene Automorphismen von $\bar{K}$ über K. Wir ordnen nun T den *inversen* Automorphismus θ^{-1} von θ zu. Dann ist durch diese Zuordnung eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der Gruppe $\mathfrak{D}$ der Decktransformationen von $\mathfrak{S}$ auf sich und der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von $\bar{K}$ über K hergestellt. Es zeigt sich nun, daß die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ einander isomorph sind. Nämlich T_1, T_2 seien die Decktransformationen aus $\mathfrak{D}$ und θ_1^{-1}, θ_2^{-1} bzw. die T_1, T_2 zugeordneten Automorphismen aus $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{S}$ mit einer Ortsuniformisierenden τ, so verbinden wir $\mathfrak{P}$ mit dem

Punkt $\mathfrak{P}T_1$ durch eine stetige Kurve $\mathfrak{c}$, welche durch T_2 in eine stetige Kurve $\mathfrak{c}T_2$ übergeht. Beim Punkt $\mathfrak{P}$ kann man $x=P(\tau)$, $z=Q(\tau)$ setzen, wo $P(\tau)$, $Q(\tau)$ LAURENTsche Reihen von τ bezeichnen. Wir können nun eine rationale Funktion $R_{T_2}(x, z)$ von x, z mit Zahlenkoeffizienten so bestimmen, daß $z^{T_2} = R_{T_2}(x, z)$ ist. Dabei erhält man die τ-Entwicklung von z^{T_2} bei $\mathfrak{P}$, indem man in $R_{T_2}(x, z)$ die τ-Entwicklungen $x=P(\tau)$, $z=Q(\tau)$ einsetzt. Da $f(z^{T_2})=0$ ist, so gilt in einer τ-Umgebung von $\mathfrak{P}$:

$$f(R_{T_2}(P(\tau),\ Q(\tau))) = 0\,.$$

Da τ auch eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{P}T_1$ ist, so erhält man aus der obigen Funktionalgleichung durch analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{c}$ die in einer gewissen τ-Umgebung von $\mathfrak{P}T_1$ gültige Gleichung:

$$f(R_{T_2}(P(\tau),\ Q_{T_1}(\tau))) = 0\,,$$

wobei $Q_{T_1}(\tau)$ die z-Komponente des $\mathfrak{P}T_1$ zugeordneten Funktionselementes von x, z bezeichnet. Nun ist aber die Funktion $R_{T_2}(P(\tau), Q_{T_1}(\tau))$ einerseits die τ-Entwicklung der Funktion z^{T_2} bei $\mathfrak{P}T_1$ und anderseits definitionsgemäß die z-Komponente des dem Punkt $\mathfrak{P}T_1T_2$ zugeordneten Funktionselementes von x, z, welche auch die τ-Entwicklung der Funktion $z^{T_1T_2}$ bei $\mathfrak{P}$ darstellt. Ferner ist $Q_{T_1}(\tau)$ die τ-Entwicklung der Funktion z^{T_1} bei $\mathfrak{P}$. In einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{P}$ gilt also:

$$z^{T_1T_2} = R_{T_2}(x, z^{T_1})\,.$$

Wegen der Permanenz der Funktionalgleichung gilt die obige Gleichung auf der ganzen Fläche $\mathfrak{S}$.

Wenn man anderseits auf z den Automorphismus θ_2 anwendet, so erhält man:

$$z^{\theta_2}=z^{T_2} = R_{T_2}(x, z)\,;$$

durch Anwendung von θ_1 folgt ohne weiteres:

$$z^{\theta_2\theta_1} = R_{T_2}(x, z^{\theta_1}) = R_{T_2}(x, z^{T_1}) = z^{T_1T_2}\,.$$

Der Decktransformation T_1T_2 entspricht daher $(\theta_2\theta_1)^{-1} = \theta_1^{-1}\theta_2^{-1}$, w. z. b. w.

Die bisher bewiesenen Tatsachen zusammenfassend, erhält man folgenden

Satz 5. *Es seien $\bar{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{S}$ geschlossene RIEMANNsche Flächen und $\mathfrak{S}$ sei in $\bar{\mathfrak{S}}$ enthalten. Ist dann $\bar{\mathfrak{S}}$ eine reguläre Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$, so ist der zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörige algebraische Funktionenkörper $\bar{K}$ galoissch über dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen algebraischen Funktionenkörper K. Ferner ist die Gruppe der Decktransformationen von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich isomorph der Galoisgruppe von $\bar{K}$ über K.*

Nach dem eben bewiesenen Satz beweist man noch folgenden Zusatz. Es sei $\mathfrak{S}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche und $\bar{\mathfrak{S}}$ eine $\mathfrak{S}$ enthaltende geschlossene RIEMANNsche Fläche, welche über $\mathfrak{S}$ regulär ist. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$, so sind die Verzweigungsordnungen aller zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}$ einander gleich. Ferner gibt es stets eine Decktransformation, welche $\mathfrak{P}$ in einen beliebigen, zu ihm konjugierten Punkt überführt.

Beweis. Die Gesamtheit aller derjenigen Decktransformationen, welche $\mathfrak{P}$ invariant lassen, bildet eine Untergruppe $\mathfrak{D}_0$ der Decktransformationsgruppe $\mathfrak{D}$ von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich. Offenbar führen diejenigen Decktransformationen, welche einer und derselben Nebengruppe von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{D}_0$ angehören, den Punkt $\mathfrak{P}$ in einen und denselben Punkt über. Bezeichnet nun ν den Index von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{D}_0$, so entstehen aus $\mathfrak{P}$ durch Anwendung der Decktransformationen aus $\mathfrak{D}$ genau ν verschiedene konjugierte Punkte.

Wir bezeichnen jetzt mit x, z eine Erzeugung des zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörigen algebraischen Funktionenkörpers $\bar{K}$ über $\mathfrak{k}$, wo x eine eindeutige analytische Funktion auf $\mathfrak{S}$ bedeutet. Ist T_0 eine Decktransformation aus $\mathfrak{D}_0$, so besitzt bei $\mathfrak{P}$ die Funktion z^{T_0} dieselbe LAURENTsche Entwicklung wie z, wenn eine Ortsuniformisierende τ von $\mathfrak{P}$ festgelegt ist. Wie schon gezeigt, gibt es dann einen einzigen Automorphismus θ_0, für welchen

$$z^{T_0} = z^{\theta_0}$$

gilt. Da ein Element aus $\bar{K}$ eine rationale Funktion $R(x, z)$ von x, z mit Zahlenkoeffizienten ist, so besitzen $R(x, z)$ und sein konjugiertes Element $R(x, z^{\theta})$ bei $\mathfrak{P}$ dieselbe LAURENTsche Entwicklung nach τ; dies bedeutet nach der galoisschen Theorie aus der Bewertungstheorie, daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{\theta}$ ist, θ gehört daher zur *Zerlegungsgruppe* $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{P}$ über K[1]. Es gilt also:

---

(1) W. KRULL, Galoissche Theorie bewerteter Körper, Sitzungsberichte München (1930), S. 225-238; oder auch M. DEURING, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann., Bd. 105 (1931), S. 277-307.

$$\text{Ordnung von } \mathfrak{D}_0 \leqq \text{Ordnung von } \mathfrak{Z}.$$

Wenn μ den Index der Galoisgruppe von $\bar{K}/K$ nach $\mathfrak{Z}$ bezeichnet, so ergibt sich aus der obigen Ungleichung: $\nu \geqq \mu$. Da es bekanntlich genau μ verschiedene, zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Primdivisoren (also auch Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}$) gibt, so muß unbedingt $\nu = \mu$ sein; d.h. $\mathfrak{P}$ wird durch eine geeignete Decktransformation in einen gegebenen, zu ihm konjugierten Punkt übergeführt. Ferner besitzt nach der galoisschen Theorie jeder zu $\mathfrak{P}$ konjugierte Primdivisor (also auch Punkt) eine gleiche Verzweigungsordnung, w. z. b. w.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{S}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche und $\bar{\mathfrak{S}}$ eine unverzweigte, unbegrenzte und reguläre Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$. Ist dann $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ endlich-blättrig, so ist $\bar{\mathfrak{S}}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche, und der zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörige algebraische Funktionenkörper $\bar{K}$ ist galoissch und unverzweigt über dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Funktionenkörper K.*

Beweis. Wir triangulieren zunächst die Fläche $\mathfrak{S}$ und bezeichnen die so entstehende Fläche mit $\mathfrak{S}_0$. Da $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ unverzweigt, unbegrenzt ist, so kann man leicht die Triangulierung von $\mathfrak{S}$ auf $\bar{\mathfrak{S}}$ übertragen, und zwar entspricht einem Dreieck auf $\bar{\mathfrak{S}}$ stets ein Dreieck auf $\mathfrak{S}_0$ als Spur. Da $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ endlich-blättrig ist, so liegen über einem beliebigen Dreieck von $\mathfrak{S}_0$ endlich viele Dreiecke von $\bar{\mathfrak{S}}$; d.h. $\bar{\mathfrak{S}}$ ist eine geschlossene Fläche.

Ist nun $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{p}$ sein Spurpunkt, so kann man eine Ortsuniformisierende von $\mathfrak{p}$ gleichzeitig als eine von $\mathfrak{P}$ benutzen, weil es einander homöomorphe Umgebungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ gibt. Daher ist $\mathfrak{S}$ in $\bar{\mathfrak{S}}$ enthalten. Weil jedem Punkt auf $\bar{\mathfrak{S}}$ umkehrbar eindeutig ein Primdivisor aus $\bar{K}$ und zwar einem verzweigten bzw. unverzweigten Punkt ein verzweigter bzw. unverzweigter Primdivisor entspricht, so ist $\bar{K}$ nach Voraussetzung über K unverzweigt. Daß $\bar{K}$ über K galoissch ist, folgt nach Satz 5 aus der Regularität von $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$.

Satz 7. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper und $\bar{K}$ eine endliche, galoissche Erweiterung über K. Dann ist die RIEMANNsche Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ von $\bar{K}$ regulär über der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{S}$ von K*[1].

Beweis. Wir bezeichnen mit x, z eine Erzeugung von $\bar{K}$ über dem komplexen Zahlkörper, wo x eine eindeutige analytische Funktion aus K bezeichnet. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor aus $\bar{K}$, so definiert

(1) M. DEURING, loc. cit., S. 102.

man die Anwendung eines Automorphismus θ von $\bar{K}/K$ auf $\mathfrak{P}$ in geläufiger Weise.

Es wird dann klar, was für ein Punkt unter $\mathfrak{P}^{\theta}$ verstanden sein soll, wenn $\mathfrak{P}$ den $\mathfrak{P}$ zugeordneten Punkt bedeutet. Nun bilden wir aus $\bar{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$ bzw. die Stammflächen $\bar{\mathfrak{S}}^*$ und $\mathfrak{S}^*$, und beschreiben auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ eine geschlossene stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$. Wie üblich denken wir uns die Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ als die Punktmenge $\{\mathfrak{P}_\lambda\}$, welche durch das Intervall $I\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ definiert und zwar $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}$ gesetzt ist. Dann entsteht durch Anwendung von θ auf alle Punkte auf $\bar{\mathfrak{c}}$ eine Punktmenge $\bar{\mathfrak{c}}' = \{\mathfrak{P}_\lambda^\theta\}$. Wir behaupten jetzt, daß $\bar{\mathfrak{c}}'$ eine stetige Kurve auf $\bar{\mathfrak{S}}^*$ darstellt. Es sei nämlich $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^\theta$ ein Punkt aus $\bar{\mathfrak{c}}'$ und $\bar{U}_0'$ eine solche Umgebung von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^\theta$, daß die Spur U_0 von $\bar{U}_0'$ in $\mathfrak{S}^*$ mit $\bar{U}_0'$ homöomorph ist. Offenbar existiert dann eine Umgebung $\bar{U}_0$ von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$, deren Spur in $\mathfrak{S}^*$ ganz in U_0 gelegen ist. Nun können wir ein λ_0 enthaltendes Teilintervall I_0 von I so bestimmen, daß für jedes λ aus I_0 der Punkt $\mathfrak{P}_\lambda$ auf $\bar{\mathfrak{c}}$ in $\bar{U}_0$ enthalten ist. Der Spurpunkt $\mathfrak{p}_\lambda$ von $\mathfrak{P}_\lambda$ ist in U_0 und infolgedessen der über $\mathfrak{p}_\lambda$ liegende Punkt $\mathfrak{P}_\lambda^\theta$ in $\bar{U}_0'$ enthalten; d.h. $\bar{\mathfrak{c}}'$ ist stetig.

Da $\bar{\mathfrak{c}}$ geschlossen, also $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ ist, so ist auch $\mathfrak{P}_1^\theta = \mathfrak{P}_0^\theta$; d.h. $\bar{\mathfrak{c}}'$ ist eine geschlossene Kurve. Weil offenbar die Kurven $\bar{\mathfrak{c}}$ und $\bar{\mathfrak{c}}'$ dieselbe Spurkurve in $\mathfrak{S}^*$ besitzen, so ist $\bar{\mathfrak{S}}^*$ regulär über $\mathfrak{S}^*$, w.z.b.w.

Bemerkung. Ist $\bar{K}$ über K galoissch, so ist eine Ortsuniformisierende eines Punktes der RIEMANNschen Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ von $\bar{K}$ gleichzeitig eine Ortsuniformisierende jedes zu ihm konjugierten Punktes, weil die Verzweigungsordnungen aller zueinander konjugierten Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}$ gleich sind. Aus einem Automorphismus θ von $\bar{K}/K$ erhält man durch Anwendung von θ auf alle Punkte auf $\bar{\mathfrak{S}}$ eine eineindeutige Abbildung T von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich. Daß diese Abbildung T eine homöomorphe Abbildung und folglich eine Decktransformation von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf sich ist, kann man ohne Heranziehung der Stammflächen mit Hilfe der Ortsuniformisierenden der Punkte direkt beweisen.

§ 4. Unverzweigte abelsche Erweiterungen und abelsche Überlagerungsflächen.

Es bedeutet $\mathfrak{S}$ eine geschlossene RIEMANNsche Fläche vom Geschlecht g. Dann existiert über $\mathfrak{S}$ die Überlagerungsfläche $\mathfrak{S}^{(0)}$ der Intergralfunktionen auf $\mathfrak{S}$(1), auf welcher jede Integralfunktion auf

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 74.

$\mathfrak{S}$ eine eindeutige analytische Funktion wird. Dabei erweist sich $\mathfrak{S}^{(0)}$ als eine unverzweigte, unbegrenzte, reguläre Überlagerungsfläche, deren Decktransformationsgruppe $\mathfrak{T}^{(0)}$ auf sich abelsch ist. Nennt man nun nach Herrn H. WEYL eine unverzweigte, unbegrenzte, reguläre Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$ *abelsch*, wenn ihre Decktransformationsgruppe auf sich abelsch ist, so ist jede abelsche Überlagerungsfläche in dem in § 2 definierten Sinne stets in $\mathfrak{S}^{(0)}$ enthalten(1). Und zwar ist eine stetige Kurve auf $\overline{\mathfrak{S}}$ stets geschlossen, wenn ihre Spurkurve auf $\mathfrak{S}$ auch die einer geschlossenen Kurve auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ ist. Die Decktransformationsgruppe von $\mathfrak{S}^{(0)}$ auf sich ist eine freie Gruppe von $2g$ freien Erzeugenden.

Es sei nun $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{T}^{(0)}$, deren Index endlich ist. Dann kann man aus jedem Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ stets eine Menge $\mathfrak{P}$ von den zu $\mathfrak{P}^{(0)}$ konjugierten Punkten (in bezug auf $\mathfrak{S}$) konstruieren, indem man auf $\mathfrak{P}^{(0)}$ alle Transformationen aus $\mathfrak{H}$ anwendet. Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei wie oben definierte Punktmengen, so sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ entweder identisch oder elementfremd. Denn besitzen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ einen Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ gemeinsam, so sind offenbar nach Definition $\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{P}$, w. z. b. w. Wir betrachten nun die Menge $\overline{\mathfrak{S}}$, welche aus den sämtlichen verschiedenen, oben definierten Punktmengen besteht, und nennen jedes Element aus $\overline{\mathfrak{S}}$ auch einfach einen *Punkt*. Wenn $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt aus $\overline{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriger Punkt auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ ist, so entsteht aus einer Umgebung V von $\mathfrak{P}^{(0)}$ eine Teilmenge $\overline{U}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$, indem man jedem Punkt aus V den ihn enthaltenden Punkt aus $\overline{\mathfrak{S}}$ zuordnet. Berücksichtigt man nun, daß $\mathfrak{S}^{(0)}$ über $\mathfrak{S}$ unverzweigt ist, so bestätigt man leicht, daß $\overline{U}$ die Umgebungsaxiome erfüllt; man nennt also $\overline{U}$ die *zu V gehörige Umgebung* von $\mathfrak{P}$.

Es seien nun $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ beliebige Punkte aus $\overline{\mathfrak{S}}$. Dann greifen wir aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bzw. die Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}$ und $\mathfrak{Q}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ heraus und verbinden $\mathfrak{P}^{(0)}$ mit $\mathfrak{Q}^{(0)}$ durch eine stetige Kurve $\mathfrak{c}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$, welche wie üblich durch ein Intervall $I\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ definiert ist; insbesondere sind dabei $\mathfrak{P}^{(0)} = \mathfrak{P}_0^{(0)}$ und $\mathfrak{Q}^{(0)} = \mathfrak{P}_1^{(0)}$ gesetzt. Wenn man durch $\mathfrak{P}_\lambda$ einen Punkt $\mathfrak{P}_\lambda^{(0)}$ auf $\mathfrak{c}^{(0)}$ enthaltenden Punkt aus $\overline{\mathfrak{S}}$ bezeichnet, so entsteht aus $\mathfrak{c}^{(0)}$ eine Punktmenge $\bar{\mathfrak{c}}$ aus $\overline{\mathfrak{S}}$, welche aus allen Punkten $\mathfrak{P}_\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$ besteht, wobei besonders $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1$ sind. Ist nun $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ ein Punkt auf $\bar{\mathfrak{c}}$ und $\overline{U}_{\lambda_0}$ eine Umgebung von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$, so gibt es nach Definition einen in $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ enthaltenen Punkt $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)\prime}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ und eine Umgebung V'_{λ_0} von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)\prime}$ derart, daß $\overline{U}_{\lambda_0}$ die zu V'_{λ_0} gehörige

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 175.

Umgebung ist. Da offenbar $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)\prime}$ ein konjugierter Punkt zu $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)}$ auf $\mathfrak{c}^{(0)}$ ist und infolgedessen eine Decktransformation $T^{(0)}$ aus $\mathfrak{H}$ existiert, welche $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)\prime}$ in $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)}$ überführt, so geht durch $T^{(0)}$ die Umgebung V'_{λ_0} in eine $\mathfrak{P}^{(0)}$ enthaltende Punktmenge V_{λ_0} über, die, wie leicht bestätigt, eine Umgebung von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}^{(0)}$ bildet. Nach der Konstruktion von V_{λ_0} ist $\bar{U}_{\lambda_0}$ die zu V_{λ_0} gehörige Umgebung von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$. Weil $\mathfrak{c}^{(0)}$ eine stetige Kurve ist, so gibt es ein λ_0 enthaltendes Teilintervall $I_0 (0 \leqq |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0)$ derart, daß für jedes λ aus I_0 der Punkt $\mathfrak{P}_\lambda^{(0)}$ zu V_{λ_0} gehört. Der $\mathfrak{P}_\lambda^{(0)}$ enthaltende Punkt $\mathfrak{P}_\lambda$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$ ist offenbar in $\bar{U}_{\lambda_0}$ gelegen; d.h. $\bar{\mathfrak{c}}$ ist eine stetige Kurve, welche $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ verbindet. Somit ist gezeigt, daß $\bar{\mathfrak{S}}$ ein Gebiet bildet.

Die in einem Punkt $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$ enthaltenen Punkte auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ besitzen denselben Spurpunkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$. Wenn man also $\mathfrak{P}$ den Punkt $\mathfrak{p}$ zuordnet, so wird dadurch eine eindeutige Zuordnung φ von $\bar{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ hergestellt. Offenbar existiert zu jedem Punkt $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$ eine Umgebung $\bar{U}$ von $\mathfrak{P}$, welche durch φ homöomorph auf eine Umgebung des Spurpunktes $\mathfrak{p}$ abgebildet wird; d.h. $\bar{\mathfrak{S}}$ ist über $\mathfrak{S}$ unverzweigt.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt und $\mathfrak{c}$ eine stetige Kurve in $\mathfrak{S}$. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegender Punkt aus $\bar{\mathfrak{S}}$ (d.h. $\mathfrak{p}$ ist der Spurpunkt von $\mathfrak{P}$), so gibt es eine einzige stetige Kurve in $\bar{\mathfrak{S}}$, welche vom Punkt $\mathfrak{P}$ ausgeht und deren Spurkurve gerade $\mathfrak{c}$ ist. Denn ist $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriger Punkt auf $\mathfrak{S}^{(0)}$, so gibt es eine von $\mathfrak{P}^{(0)}$ ausgehende Kurve $\mathfrak{c}^{(0)}$, deren Spurkurve $\mathfrak{c}$ ist; aus $\mathfrak{c}^{(0)}$ entsteht wie oben eine stetige Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ in $\bar{\mathfrak{S}}$, welche $\mathfrak{c}$ als Spurkurve besitzt. Die Eindeutigkeit der Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ folgt ohne weiteres aus der Unverzweigtheit von $\bar{\mathfrak{S}}$ über $\mathfrak{S}$. Nun kann man die Triangulierung der Fläche $\mathfrak{S}$ sofort auf das Gebiet $\bar{\mathfrak{S}}$ übertragen(1); d.h. $\bar{\mathfrak{S}}$ wird eine Fläche, und zwar ist es eine *unverzweigte, unbegrenzte* Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$. Wir wollen im weiteren Verlauf $\bar{\mathfrak{S}}$ die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Fläche nennen.

Es sei $T^{(0)}\mathfrak{H}$ eine Nebengruppe der Decktransformationsgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}$ nach $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein beliebiger Punkt, welcher zu einem Punkt $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$ gehört. Dann gehören die Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}T^{(0)}H$ in einem und demselben Punkt $\mathfrak{P}'$ aus $\bar{\mathfrak{S}}$, wenn H alle Transformationen aus $\mathfrak{H}$ durchläuft. Ferner ist $\mathfrak{P}'$ von der Wahl der Punkte $\mathfrak{P}^{(0)}$ aus $\mathfrak{P}$ unabhängig. Wenn $\mathfrak{P}$ alle Punkte aus $\bar{\mathfrak{S}}$ durchläuft, so entsteht durch die Zuordnung $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ eine Transformation T der Gesamtheit aller Punkte aus $\bar{\mathfrak{S}}$ in sich. Wir ordnen dabei T der Nebengruppe

(1) H. WEYL, loc. cit., S. 49.

$T^{(0)}\mathfrak{H}$ zu. Die Transformation T ist eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ *auf* sich. Denn ist $\mathfrak{Q}$ ein Punkt aus $\mathfrak{S}$, so gibt es in $\mathfrak{Q}$ einen Punkt $\mathfrak{Q}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ und folglich einen Punkt $\mathfrak{Q}^{(0)}T^{(0)-1}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$; der $\mathfrak{Q}^{(0)}T^{(0)-1}$ enthaltende Punkt auf $\mathfrak{S}$ geht durch Anwendung von T sicher in $\mathfrak{Q}$ über, w. z. b. w. Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{D}$ die Gesamtheit aller oben definierten Transformationen von $\mathfrak{S}$ auf sich.

Sind nun $T_1^{(0)}\mathfrak{H}$, $T_2^{(0)}\mathfrak{H}$ verschiedene Nebengruppen von $\mathfrak{D}^{(0)}$ nach $\mathfrak{H}$, und T_1, T_2 bzw. die $T_1^{(0)}\mathfrak{H}$, $T_2^{(0)}\mathfrak{H}$ zugeordneten Transformationen von $\mathfrak{S}$ auf sich, so geht jeder Punkt $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{S}$ bei Anwendung von T_1 und T_2 in verschiedene Punkte $\mathfrak{P}T_1$ und $\mathfrak{P}T_2$ über. Denn sonst existierte ein Punkt $\mathfrak{P}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$, für den $\mathfrak{P}^{(0)}T_1^{(0)} = \mathfrak{P}^{(0)}T_2^{(0)}H$ für eine geeignete Transformation H aus $\mathfrak{H}$ gelten soll; weil $\mathfrak{S}^{(0)}$ eine unverzweigte, unbegrenzte, reguläre Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$ ist, so müßte $T_1^{(0)-1}\,T_2^{(0)}H$ die Einheitstransformation sein, was aber unmöglich ist. Wenn also n den Index von $\mathfrak{D}^{(0)}$ nach $\mathfrak{H}$ bezeichnet, so liegen nach dem oben Gezeigten über jedem Punkt auf $\mathfrak{S}$ genau n verschiedene Punkte aus $\mathfrak{S}$.

Zu beliebigen Transformationen T_1, T_2 aus $\mathfrak{D}$ definieren wir das Produkt T_1T_2 von T_1 mit T_2 wie folgt: Auf jeden Punkt $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{S}$ wende man zunächst T_1 und dann auf den so entstandenen Punkt $\mathfrak{P}T_1$ die Transformation T_2 an: $\mathfrak{P}T_1T_2=(\mathfrak{P}T_1)T_2$. Dann ist T_1T_2 eine Transformation aus $\mathfrak{D}$, welche der Nebengruppe $T_1^{(0)}\mathfrak{H}\cdot T_2^{(0)}\mathfrak{H}=T_1^{(0)}T_2^{(0)}\mathfrak{H}$ zugeordnet ist, wenn T_1, T_2 bzw. die $T_1^{(0)}\mathfrak{H}$, $T_2^{(0)}\mathfrak{H}$ zugeordneten Transformationen bezeichnen. Denn ist $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein zu $\mathfrak{P}$ gehöriger Punkt auf $\mathfrak{S}^{(0)}$, so gehört $\mathfrak{P}^{(0)}T_1^{(0)}$ zu $\mathfrak{P}T_1$ und folglich $(\mathfrak{P}^{(0)}T_1^{(0)})T_2^{(0)}=\mathfrak{P}^{(0)}T_1^{(0)}T_2^{(0)}$ zu $(\mathfrak{P}T_1)T_2=\mathfrak{P}T_1T_2$, w. z. b. w. Ersichtlich existiert in $\mathfrak{D}$ die Einheitstransformation und zu jeder Transformation ihre inverse. Somit ist bewiesen, daß $\mathfrak{D}$ eine der Faktorgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}/\mathfrak{H}$ isomorphe Gruppe bildet.

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Punkt auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{P}^{(0)}$ ein beliebiger, zu $\mathfrak{P}$ gehöriger Punkt auf $\mathfrak{S}^{(0)}$. Ist dann $T^{(0)}$ eine Decktransformation aus $\mathfrak{D}^{(0)}$, so geht eine Umgebung V von $\mathfrak{P}^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ durch Anwendung von $T^{(0)}$ in die Umgebung $VT^{(0)}$ von $\mathfrak{P}^{(0)}T^{(0)}$ über, wobei V und $VT^{(0)}$ einander homöomorph sind. Wenn man mit T die der Nebengruppe $T^{(0)}\mathfrak{H}$ zugeordnete Transformation aus $\mathfrak{D}$ bezeichnet, so entsprechen V und $VT^{(0)}$ bzw. die Umgebungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}T$, welche unter T einander homöomorph sind. Die Fläche $\mathfrak{S}$ ist daher bei Anwendung einer Transformation T aus $\mathfrak{D}$ homöomorph auf sich abgebildet und zwar ist jeder Punkt auf $\mathfrak{S}$ in einen zu ihm konjugierten Punkt übergeführt; d.h. T ist eine Decktransformation von $\mathfrak{S}$ auf sich.

Ist nun $\bar{\mathfrak{c}}$ eine geschlossene, stetige Kurve auf $\overline{\mathfrak{S}}$, so geht es bei Anwendung einer Transformation T aus $\mathfrak{D}$ in eine geschlossene Kurve $\bar{\mathfrak{c}}T$ über, weil $\overline{\mathfrak{S}}$ durch T homöomorph auf sich abgebildet wird; d.h. die Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ ist über $\mathfrak{S}$ regulär. Hieraus schließt man ohne weiteres folgenden

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{S}^{(0)}$ die Überlagerungsfläche der Integralfunktionen einer geschlossenen* RIEMANN*schen Fläche $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von endlichem Index in der Decktransformationsgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}$ von $\mathfrak{S}^{(0)}$ auf sich. Dann ist die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ eine unverzweigte, unbegrenzte, reguläre Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$, und die Decktransformationsgruppe von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich ist isomorph der Faktorgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}/\mathfrak{H}$.*

Wir betrachten nun über dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen, algebraischen Funktionenkörper K eine unverzweigte abelsche Erweiterung L von endlichem Grade. Dabei ist die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/K als eine abelsche Gruppe vom Exponenten p^m vorausgesetzt, wo p eine Primzahl bedeutet. Wir wollen im folgenden zeigen, daß $\mathfrak{G}$ vom höchstens $2g$-gliedrigen Typus ist, wenn g das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Offenbar ist die RIEMANNsche Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ von L eine abelsche Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$; infolgedessen ist es in $\mathfrak{S}^{(0)}$ enthalten. Ist $\mathfrak{c}$ eine geschlossene, stetige Kurve auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{p}$ ein Punkt auf $\mathfrak{c}$, so ist der Endpunkt der stetigen Kurve $\bar{\mathfrak{c}}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$, deren Anfangspunkt ein über $\mathfrak{p}$ liegender Punkt $\mathfrak{P}$ ist und deren Spurkurve $\mathfrak{c}$ ist, ein zu $\mathfrak{P}$ konjugierter Punkt $\mathfrak{P}'$. Aus der Zuordnung $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ entsteht also eine Decktransformation T von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich, welche $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'$ überführt. Wie man leicht bestätigt, ist die Transformation T von der Wahl der Punkte $\mathfrak{P}$ unabhängig; d.h. einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{S}$ entspricht eindeutig eine Decktransformation von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich. Wir legen nun einen Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{S}$ fest. Eine geschlossene, stetige Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{S}$, die von $\mathfrak{p}$ ausgeht und an $\mathfrak{p}$ endet, heißt nach Herrn H. WEYL „*der Null homolog*", wenn $\mathfrak{c}$ die Spurkurve einer geschlossenen Kurve auf $\mathfrak{S}^{(0)}$ ist. Offenbar bildet die Gesamtheit aller der Null homologen Kurven, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen und an $\mathfrak{p}$ enden, eine *additive* Gruppe Γ_0. Da $\overline{\mathfrak{S}}$ in $\mathfrak{S}^{(0)}$ enthalten ist, so entspricht einer 0 homologen Kurve $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{S}$ in der obigen Weise die identische Decktransformation von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich. Nun betrachten wir die Gesamtheit Γ_1 aller derjenigen geschlossenen Kurven auf $\mathfrak{S}$, welche von $\mathfrak{p}$ ausgehen und an $\mathfrak{p}$ enden, und welche der identischen Decktransformation von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich entsprechen. Offenbar bildet Γ_1 eine additive Gruppe, welche sicher eine Untergruppe der Γ aller geschlossenen stetigen Kurven auf $\mathfrak{S}$ ist, welche von $\mathfrak{p}$ ausgehen und in $\mathfrak{p}$ enden.

Ferner entspricht jeder geschlossenen Kurve aus einer Klasse von Γ nach Γ_1 eine und dieselbe Decktransformation von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich, und aus verschiedenen Klassen von Γ nach Γ_1 entstehen verschiedene Decktransformationen von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich. Wie man sich leicht überzeugt, ist die Decktransformationsgruppe $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf sich isomorph zu Γ/Γ_1. Da nach Satz 7 $\mathfrak{D}$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/K isomorph ist, so gilt:

$$\mathfrak{G} \cong \Gamma/\Gamma_1 \cong \mathfrak{D};$$

d.h. Γ/Γ_1 ist eine Gruppe vom Exponenten p^m. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß Γ/Γ_1 von endlichem Index und zwar vom höchstens $2g$-gliedrigen Typus ist, weil die Faktorgruppe Γ/Γ_0 eine freie Gruppe vom $2g$-gliedrigen Typus ist und p eine Primzahl bezeichnet.

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 9. *Es sei L eine endliche, unverzweigte, abelsche Erweiterung über dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen algebraischen Funktionenkörper K, und die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L nach K vom Exponenten p^m, wo p eine Primzahl und m eine natürliche Zahl bezeichnet. Ist dann g das Geschlecht von $\mathfrak{S}$, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ abelsch vom höchstens $2g$-gliedrigen Typus, und infolgedessen ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nicht größer als p^{2mg}.*

Wir beweisen nun folgenden

Satz 10. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen vom Geschlecht $2g$ und p eine Primzahl. Dann bildet die Gesamtheit aller Divisorenklassen vom Exponenten p^m $(m \geqq 0)$ aus K eine abelsche Gruppe vom $2g$-gliedrigen Typus $(p^m, \ldots, p^m)$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die RIEMANNsche Fläche von K. Wenn $S_1, \ldots, S_{2g}$ ein System der freien Erzeugenden der Decktransformationsgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}$ der Überlagerungsfläche der Integralfunktionen auf $\mathfrak{S}$ bezeichnen, so existiert nach Satz 8 ein zur Gruppe $\mathfrak{H} = (S_1^{p^m}, \ldots, S_{2g}^{p^m})$ gehöriger algebraischer Funktionenkörper L(1), welcher über K unverzweigt und abelsch ist. Dabei ist die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von L/K nach den Sätzen 5 und 8 isomorph der Faktorgruppe $\mathfrak{D}^{(0)}/\mathfrak{H}$.

Nun existiert eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Divisorenklassengruppe von K derart, daß $\mathfrak{A}$ aus allen und nur allen Divisorenklassen besteht, welche in L in die Hauptklasse übergehen. Ferner ist $\mathfrak{A}$ der Galoisgruppe von L/K isomorph, $\mathfrak{A}$ ist also eine abelsche Gruppe

---

(1) Es existiert nach Satz 8 eine zu $\mathfrak{H}$ gehörige RIEMANNsche Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$, und L ist der zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehörige Funktionenkörper.

vom $2g$-gliedrigen Typus $(p^m, \ldots\ldots, p^m)$[1].

Es sei A eine Divisorenklasse vom Exponenten p^m aus K. Dann gibt es eine zyklische unverzweigte Erweiterung L', in der A die Hauptklasse wird, und die Galoisgruppe von L'/K ist isomorph der von A erzeugten Divisorengruppe[2]; d.h. die Galoisgruppe von L'/K ist auch vom Exponenten p^m. Bildet man nun das Kompositum LL' von L and L', so schließt man zunächst, daß LL' über K unverzweigt abelsch und auch vom Exponenten p^m ist[3]. Dann gilt einerseits nach Satz 9

$$[LL' : K] \leqq p^{2mg},$$

und anderseits

$$[LL' : K] = [LL' : L][L : K] = [LL' : L]\, p^{2mg},$$

woraus $LL' = L$ folgt. L' ist also in L enthalten; d.h. A geht in L in die Hauptklasse über, daher ist A in $\mathfrak{A}$ enthalten, w.z.b.w.

Ist nun n eine natürliche Zahl und $n = p_1^{e_1} \ldots\ldots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so gibt es zu jeder Primzahl p_i die Divisorengruppe $\mathfrak{A}_i$, welche aus allen und nur allen Divisorenklassen vom Exponenten $p_i^{e_i}$ von K besteht. Ist A eine Divisorenklasse vom Exponenten n, so ist bekanntlich A als Produkt aus Divisorenklassen $A_1, \ldots\ldots, A_r$ darstellbar, deren Exponenten bzw. $p_1^{e_1}, \ldots\ldots, p_r^{e_r}$ sind. Daher gilt für die Divisorengruppe $\mathfrak{A}$ vom Exponenten n aus K die folgende direkte Produktdarstellung:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots\ldots \times \mathfrak{A}_r .$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

Satz 11. *Die Anzahl der Gesamtheit aller Divisorenklassen vom Exponenten n aus K ist gleich n^{2g}.*

Bemerkung. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Divisor aus dem zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Funktionenkörper K, dessen Ordnung gleich n ist, d.h. $\mathfrak{a}^n$ ist ein Hauptdivisor aus K. Dann existiert eine unverzweigte zyklische Erweiterung Z vom Grade n, in der $\mathfrak{a}$ ein Hauptdivisor wird[4]. Es gibt

(1) M. Deuring, loc. cit., S. 95–97.
(2) M. Deuring, loc. cit., S. 92–93.
(3) Vgl. hierzu etwa H. Hasse, Aufgabensammlung zur höheren Algebra, Sammlung Göschen (1934), S. 146–147.
(4) M. Deuring, loc. cit., S. 92–94.

daher in Z ein Element z, welches dem Divisor $\mathfrak{a}$ zugeordnet ist. Ferner gilt die Gleichung:

$$z^n - z_0 = 0\,,$$

wo z_0 ein Element aus K bezeichnet. Offenbar ist z eine eindeutige analytische Funktion auf der RIEMANNschen Fläche $\overline{\mathfrak{S}}$ von Z. Ist nun $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt mit einer Ortsuniformisierenden t auf $\overline{\mathfrak{S}}$, so ordnen wir dem Spurpunkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{S}$ die t-Entwicklung $P(t)$ von z bei $\mathfrak{P}$ zu. Dadurch entsteht aus z eine analytische (im allgemeinen *mehrdeutige*) Funktion z^* auf $\mathfrak{S}$. Wenn man die Funktion $P(t)$ längs einer geschlossenen Kurve auf $\mathfrak{S}$ bis nach $\mathfrak{p}$ analytisch fortsetzt, so erhält man eine Funktion $P'(t)$, welche der t-Entwicklung der Funktion z bei einem zu $\mathfrak{P}$ konjugierten Punkt $\mathfrak{P}'$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ zugeordnet ist. Da $P'(t)$ der Gleichung $z^n - z_0 = 0$ in einer gewissen t-Umgebung von $\mathfrak{P}'$ identisch genügen muß, so ist, wie man leicht bestätigt, $P'(t)$ von $P(t)$ um eine n-te Einheitswurzel verschieden; d.h. z^* ist eine *Wurzelfunktion* auf $\mathfrak{S}$.

Umgekehrt kann man ohne Schwierigkeit beweisen, daß eine Wurzelfunktion auf $\mathfrak{S}$ in einer gewissen abelschen Überlagerungsfläche über $\mathfrak{S}$ eindeutig analytisch wird[1], weil einer Wurzelfunktion auf $\mathfrak{S}$ stets ein Divisor vom Grade 0 aus K zugeordnet ist[2].

---

(1) M. DEURING, loc. cit., S. 92–94.

(2) H. WEYL, loc. cit., S. 118.