

Matrixtransformationen quasikonvexer Folgen

Von Michael STIEGLITZ und Hubert TIETZ

(Received December 12, 1975)

1. Einleitung. Als Folgerung aus einem sehr allgemeinen Satz über Matrixabbildungen zwischen Folgenräumen haben Jakimovski und Livne [7] eine Charakterisierung derjenigen Matrizen erhalten, die jede quasikonvexe, konvergente Folge in eine konvergente Folge transformieren. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie sich durch Kombination der Methode von Jakimovski und Livne mit einem Ergebnis von Bennett [1] die Matrizen charakterisieren lassen, die den Raum der quasikonvexen, konvergenten Folgen in einen beliebigen FK-Raum überführen.

2. Definitionen und Bezeichnungen. Ein F-Raum $E = (E, p_\mu)$ ist ein lokalkonvexer, vollständiger Raum E , dessen Topologie von einer totalen Folge von Halbnormen $\{p_\mu\}$ erzeugt wird. Ein FK-Raum (E, p_μ) ist ein F-Raum, dessen Träger E ein Folgenraum ist und in dem die Koordinatenfunktionale stetig sind. Ist ein FK-Raum sogar ein Banach-Raum, so heißt er ein BK-Raum. (Näheres über FK-Räume findet man bei Zeller und Beekmann [11] und Wilansky [9].)

Wir bringen einige im folgenden benötigte Beispiele von BK-Räumen. Bei den auftretenden Folgen $x = \{x_n\}$ und Reihen $\sum_n x_n$ komplexer Zahlen soll, wenn nichts Besonderes gesagt ist, der Folgen- bzw. Summationsindex stets von 0 an laufen. Folgenglieder und Matrixelemente mit einem negativen Index sind gleich 0 zu setzen. Es sei

$$\begin{aligned}
 m &:= \{x : \sup_n |x_n| < \infty\} \text{ der Raum der beschränkten Folgen,} \\
 c &:= \{x : \exists \xi \text{ mit } \lim_n x_n = \xi\} \text{ der Raum der konvergenten Folgen,} \\
 c_0 &:= \{x : \lim_n x_n = 0\} \text{ der Raum der Nullfolgen,} \\
 bv &:= \{x : \sum_n |x_n - x_{n-1}| < \infty\}, \quad bv_0 := bv \cap c_0, \\
 l^p &:= \{x : \sum_n |x_n|^p < \infty\} \quad (1 \leq p < \infty), \quad l := l^1, \\
 q^\alpha &:= c \cap \left\{ x : \sum_n \binom{n+\alpha-1}{n} |\Delta^\alpha x_n| < \infty \right\} \text{ mit } \alpha = 1, 2, \dots \text{ und} \\
 \Delta^\alpha x_n &:= \sum_{k=0}^\alpha (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{n+k}. \text{ Die Folgen aus} \\
 Q^\alpha &:= \left\{ x : \sum_n \binom{n+\alpha-1}{n} |\Delta^\alpha x_n| < \infty \right\} \text{ heißen } \textit{quasikonvex von der}
 \end{aligned}$$

Ordnung α . Jakimovski und Livne [7; §4] schreiben *q. c. s.* (α) statt Q^α . Dawson [2], [3], [4] schreibt BV_α^* statt q^α . Die genannten Räume lassen sich auf folgende Weise als BK-Räume schreiben: $(m, \sup_n |x_n|)$, $(c, \sup_n |x_n|)$, $(c_0, \sup_n |x_n|)$, $(bv, \sum_n |x_n - x_{n-1}|)$, $(bv_0, \sup_n |x_n| + \sum_n |x_n - x_{n-1}|)$ und $(l^p, (\sum_n |x_n|^p)^{1/p})$.
 Bezüglich q^α gilt der

HILFSSATZ 2.1. *Es ist*

$$\left(q^\alpha, \sup_n |x_n| + \sum_n \binom{n+\alpha-1}{n} |A^\alpha x_n| \right)$$

ein BK-Raum.

Beweis. Bei festem $\alpha=1, 2, \dots$ betrachten wir die Matrix $B^\alpha = (b_{nk}^{(\alpha)})$ mit

$$b_{nk}^{(\alpha)} = \begin{cases} \binom{n+\alpha-1}{n} (-1)^{k-n} \binom{\alpha}{k-n} & \text{für } 0 \leq n \leq k \leq n+\alpha \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $(B^\alpha x)_n = \binom{n+\alpha-1}{n} A^\alpha x_n$ und $Q^\alpha = \{x : B^\alpha x \in l\}$.

Nach Zeller [10; Satz 4.10. b)] ist also Q^α ein FK-Raum mit den Halbnormen $|x_n|$ ($n=0, 1, \dots$) und $\sum_n \binom{n+\alpha-1}{n} |A^\alpha x_n|$.

Daraus folgt (vgl. Zeller und Beekmann [11; 17. V und 17. VI]) die Behauptung.

3. Matrixtransformationen von q^α . Ist $A=(a_{nk})$ ($n, k=0, 1, \dots$) eine Matrix mit komplexen Elementen (statt a_{nk} schreiben wir auch $(A)_{nk}$), und sind E und F zwei Folgenräume, so bedeute $A \in (F, E)$, daß $Ax = \{(Ax)_n\} \in E$ ist für jede Folge $x \in F$. Ferner sei $\{a_{nk}\}_n := \{a_{0k}, a_{1k}, \dots\}$.

HILFSSATZ 3.1 (Bennett [1; Corollary, S. 19]). *Ist $E=(E, p_\mu)$ ein FK-Raum, so gilt*

$$A \in (l, E) \iff \begin{cases} \{a_{nk}\}_n \in E \text{ für alle } k \geq 0 \\ \sup_k p_\mu(\{a_{nk}\}_n) < \infty \text{ für alle } \mu. \end{cases}$$

Für $E=c$ ergibt sich hiermit der bekannte

HILFSSATZ 3.2 (Hahn [5; XIIa, b, c], Okada [8; Theorem I], Izumi [6; Satz 1]).

$$\begin{aligned} A \in (l, c) &\iff \begin{cases} \{a_{nk}\}_n \in c \text{ für alle } k \geq 0 \\ \sup_{n,k} |a_{nk}| < \infty \end{cases} \\ &\implies \lim_n (Ax)_n = \sum_k x_k \lim_n a_{nk} \text{ für alle } x \in l. \end{aligned}$$

Kombiniert man Hilfssatz 3.2 mit den schon erwähnten Resultaten von

Jakimovski und Livne [7; Theorem 2.1, Theorem 4.1 und die daran anschließende Bemerkung], so erhält man den nachstehenden Hilfssatz 3.3. Die Matrix D ist bei Jakimovski und Livne nicht ganz korrekt angegeben. Außerdem ist in [7; Theorem 2.1] die Bedingung (ii) überflüssig, da sie aus (i) und der Voraussetzung $e^j \in F$ ($j \geq 0$) folgt.

HILFSSATZ 3.3. Die Matrix $D=(d_{nk})=(h_{nk}+l_{nk})$ sei durch

$$h_{nk} := \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \text{ und } k=0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$l_{nk} := \begin{cases} \binom{k-1-n+\alpha-1}{k-1-n} / \binom{k-1+\alpha-1}{k-1} & \text{für } 0 \leq n < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Ist E ein Folgenraum und $A=(a_{nk})$ eine Matrix, so ist $A \in (q^\alpha, E)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(3.1) \quad C_n = (c_{ik}^{(n)}) \in (l, c) \text{ für alle } n \geq 0 \quad (c_{ik}^{(n)} := \sum_{\nu=0}^i a_{n\nu} d_{\nu k}),$$

$$(3.2) \quad AD \in (l, E).$$

Ist $A \in (q^\alpha, E)$ und $E \subset c$, so existieren die Grenzwerte

$$a := \lim_n \sum_k a_{nk}, \quad a_k := \lim_n a_{nk} \text{ für alle } k \geq 0,$$

und für alle $x \in q^\alpha$ gilt

$$(3.3) \quad \lim_n (Ax)_n = ax_0 - a \sum_k \binom{k+\alpha-1}{k} \Delta^\alpha x_k + \sum_k \Delta^\alpha x_k \sum_{\nu=0}^k a_\nu \binom{k-\nu+\alpha-1}{k-\nu}.$$

Mit diesen Hilfssätzen beweisen wir den

SATZ 3.4. Die Matrix $L=(l_{nk})$ sei durch

$$l_{nk} := \begin{cases} \binom{k-1-n+\alpha-1}{k-1-n} / \binom{k-1+\alpha-1}{k-1} & \text{für } 0 \leq n < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Ist (E, p_μ) ein FK-Raum und $A=(a_{nk})$ eine Matrix, so ist $A \in (q^\alpha, E)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(3.4) \quad \sum_k a_{nk} \text{ konvergiert für alle } n \geq 0,$$

$$(3.5) \quad \left\{ \sum_k a_{nk} \right\}_n \in E,$$

$$(3.6) \quad \{a_{nk}\}_n \in E \text{ für alle } k \geq 0,$$

$$(3.7) \quad \sup_k p_\mu \left(\left\{ \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu, k+1} \right\}_n \right) < \infty \text{ für alle } \mu.$$

Ist $A \in (q^\alpha, E)$ und $E \subset c$, so gilt (3.3).

Beweis. Die Bedingungen (3.1) und (3.2) aus Hilfssatz 3.3 werden umgeformt. Für die Matrix $C_n = (c_{tk}^{(n)})$ erhält man bei festem $n \geq 0$

$$c_{tk}^{(n)} := \begin{cases} 0 & \text{für } t=0 \text{ und } k>0 \\ \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} & \text{für } t \geq 0 \text{ und } k=0 \\ \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} l_{\nu k} - \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} & \text{für } 0 < t < k \\ \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n\nu} l_{\nu k} - \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} & \text{für } 1 \leq k \leq t. \end{cases}$$

Also gilt nach Hilfssatz 3.2

$$C_n \in (l, c) \iff \begin{cases} \sum_k a_{nk} \text{ konvergiert} \\ \sup_{\substack{t, k \\ 0 < t < k}} \left| \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} l_{\nu k} \right| < \infty. \end{cases}$$

Da aber bei festem $k > 0$ die positive Folge $\{l_{\nu k}\}_\nu$ mit wachsendem ν monoton fällt, ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^t a_{n\nu} l_{\nu k} \right| \leq \max_{0 \leq \lambda \leq t} \left| \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{n\nu} \right|,$$

also (3.1) äquivalent mit (3.4). Die wegen (3.1) existierende Produktmatrix AD ist von der Form

$$(AD)_{nk} = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} & \text{für } n \geq 0 \text{ und } k=0 \\ \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n\nu} l_{\nu k} - \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} & \text{für } n \geq 0 \text{ und } k \geq 1. \end{cases}$$

Wegen Hilfssatz 3.1 ist (3.2) zu den Bedingungen

$$\left\{ \sum_{\nu} a_{n\nu} \right\}_n \in E, \left\{ \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu, k+1} - \sum_{\nu} a_{n\nu} \right\}_n \in E \text{ für alle } k \geq 0$$

und

$$\sup_k \hat{p}_\mu \left(\left\{ \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu, k+1} - \sum_{\nu} a_{n\nu} \right\}_n \right) < \infty \text{ für alle } \mu$$

äquivalent, die ihrerseits zu (3.5), (3.6) und (3.7) äquivalent sind.

4. Anwendungen. Mit Hilfe von Satz 3.4 charakterisieren wir nacheinander diejenigen Matrizen A , welche q^α in die BK-Räume von §2 abbilden. In den Fällen $E \subset c$ gilt dabei stets (3.3).

a) $A \in (q^\alpha, m) \iff (3.4), \sup_n \left| \sum_k a_{nk} \right| < \infty, (4.1)$. Dabei sei

$$(4.1) \quad \sup_{n, k} \left| \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu, k+1} \right| < \infty.$$

b) (Jakimovski und Livne [7; Theorem 4.2], in anderer Form bei Dawson [2]). $A \in (q^\alpha, c) \Leftrightarrow (3.4), (4.1), (4.2), (4.3)$. Dabei sei

$$(4.2) \quad \lim_n \sum_k a_{nk} = : a \text{ existiert,}$$

$$(4.3) \quad \lim_n a_{nk} = : a_k \text{ existiert für alle } k \geq 0.$$

c) $A \in (q^\alpha, c_0) \Leftrightarrow (3.4), (4.1), (4.2)$ mit $a=0$, (4.3) mit $a_k=0$ für alle $k \geq 0$.

d) $A \in (q^\alpha, bv) \Leftrightarrow (3.4), (4.4), (4.5)$. Dabei sei

$$(4.4) \quad \sum_n \left| \sum_k (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right| < \infty,$$

$$(4.5) \quad \sup_k \sum_n \left| \sum_{\nu=0}^k (a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}) l_{\nu,k+1} \right| < \infty.$$

e) $A \in (q^\alpha, bv_0) \Leftrightarrow (3.4), (4.2)$ mit $a=0$, (4.3) mit $a_k=0$ für alle $k \geq 0$, (4.4), (4.5).

$$f) \quad A \in (q^\alpha, l^p) \Leftrightarrow (3.4), \sum_n \left| \sum_k a_{kn} \right|^p < \infty, \sup_k \sum_n \left| \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu,k+1} \right|^p < \infty.$$

g) (Dawson [4], dort in anderer Form). $A \in (q^\alpha, q^\beta) \Leftrightarrow (3.4), (4.1), (4.2), (4.3)$,

$$\sum_n \binom{n+\beta-1}{n} \left| \Delta^\beta \left\{ \sum_k a_{nk} \right\}_n \right| < \infty,$$

$$\sup_k \sum_n \binom{n+\beta-1}{n} \left| \Delta^\beta \left\{ \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} l_{\nu,k+1} \right\}_n \right| < \infty.$$

Literatur

- [1] BENNETT, G.: Some inclusion theorems for sequence spaces. Pacific J. Math. 46, 17-30 (1973).
- [2] DAWSON, D.F.: A generalization of a theorem of Hans Hahn concerning matrix summability. Boll. Un. mat. Ital., Serie IV, N. 3, 349-356 (1970).
- [3] DAWSON, D.F.: Matrix methods which sum sequences of bounded k -variation. Publ. Inst. math. Beograd, n. Sér. 12 (26), 37-40 (1971).
- [4] DAWSON, D.F.: Mapping properties of matrix summability methods. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 88, 1-8 (1971).
- [5] HAHN, H.: Über Folgen linearer Operatoren. Monatsh. Math. 32, 3-88 (1922).
- [6] IZUMI, S.: Über die lineare Transformation in der Theorie der unendlichen Reihen. Tôhoku math. J. 27, 313-323 (1926).
- [7] JAKIMOVSKI, A. und A. LIVNE: On matrix transformations between sequence spaces. J. Analyse math. 25, 345-370 (1972).
- [8] OKADA, Y.: Some theorems on limit and their applications. Tôhoku Science Rep. (1) 12, 155-171 (1924).

- [9] WILANSKY, A.: Functional analysis. Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London, 1964.
- [10] ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 53, 463-487 (1951).
- [11] ZELLER, K. und W. BEEKMANN: Theorie der Limitierungsverfahren. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1970.

Universität Karlsruhe, Mathematisches Institut I
Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A
Bundesrepublik Deutschland