

Une nouvelle obstruction à l'intégrabilité des variétés de Poisson régulières

G. HECTOR

(Received April 18, 1991)

Abstract.

The *universal symplectic integration* of a Poisson manifold (P, Λ) is a symplectic groupoid

$$(\Gamma, \omega) \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \Gamma_0 = (P, \Lambda)$$

with connected and simply connected fibres which *realizes* Λ , i. e. such that α [resp. β] is a Poisson morphism [resp. anti-morphism].

Integration by a local symplectic groupoid is always possible. But already for regular Poisson structures there are obstructions to global integration [D₂], [AH]. In this paper we describe a new obstruction independent of the former ones and which is related to the vanishing cycles of the characteristic foliation.

1. Introduction-résultats

Le problème de *l'intégration symplectique* d'une variété de Poisson (P, Λ) a été posé par A. Weinstein (cf. [W₂]). Grosso modo, il consiste à construire un groupoïde de Lie symplectique

$$(\Gamma, \omega) \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} \Gamma_0 = (P, \Lambda)$$

dont l'espace des unités Γ_0 s'identifie à P et tel que l'application source α [resp. but β] soit un morphisme [resp. anti-morphisme] de Poisson.

L'intégration de (P, Λ) par un *groupoïde symplectique local* (au sens de Van Est) a été annoncée dans [W₂] et réalisée dans [CDW] (voir aussi [Ka]). Pour la théorie globale, il est naturel de s'intéresser d'abord aux variétés de Poisson *régulières* c'est-à-dire celles dont le feuilletage caractéristique \mathcal{F} est régulier et plus précisément aux variétés de Poisson régulières dont tous les cycles évanouissants sont triviaux. Cette dernière condition fait que toute la problématique se situe dans le cadre des var-

iétés et groupoïdes séparés (cf. [DH]) et on a les résultats suivants :

- a) il existe des variétés de Poisson non intégrables : P. Dazord construit une obstruction à l'intégrabilité dans [D₂];
- b) les variétés de Poisson *asphériques* (i. e. celles pour lesquelles le π_2 des feuilles de \mathcal{S} est nul) sont intégrables et on construit explicitement l'intégration universelle dans [DH];
- c) on obtient une caractérisation "topologique" des variétés intégrables dans [AH].

Dans le présent travail on s'occupe des variétés de Poisson régulières en général et on se propose d'exhiber une nouvelle obstruction à l'intégrabilité reliée aux cycles évanouissants.

(1.1) Cycles évanouissants-Cycles évanouissants cohérents (cf. 4.2 et 4.4)

Rappelons qu'un *cycle évanouissant* d'une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est défini par une application

$$\gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$$

telle que, pour tout t , le lacet γ_t restriction de γ à $S^1 \times \{t\}$ est contenu dans une feuille $F_t \in \mathcal{F}$ et est homotope à zéro dans F_t pour $t > 0$. Si ces homotopies forment une *famille différentiable* d'applications de D^2 dans M , on dira que le cycle évanouissant est *cohérent* (voir 4.2). Si \mathcal{F} est le feuilletage caractéristique \mathcal{S} d'une structure de Poisson Λ , l'intégration sur ces disques de la forme symplectique des feuilles de \mathcal{S} définit une *fonction d'aire* (voir 4.4)

$$A :]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$$

Celle-ci est différentiable et on dit que le cycle évanouissant cohérent est *symplectiquement trivial* si A s'étend en une fonction différentiable de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} .

Evidemment un cycle évanouissant peut être symplectiquement trivial sans être trivial et l'obstruction annoncée est fournie par le résultat fondamental suivant :

(1.2) THÉORÈME. *Tout cycle évanouissant cohérent d'une variété de Poisson régulière intégrable, est symplectiquement trivial.*

En particulier on retrouve le fait que les composantes de Reeb en dimension 3 ne sont le support d'aucune structure de Poisson intégrable (voir [LV2]). En outre, compte tenu du résultat de [DH], il semble raisonnable de pronostiquer que la condition nécessaire d'intégrabilité

ainsi obtenue est aussi suffisante dans le cas des variétés de Poisson sphériques.

(1.3) CONJECTURE :

Une variété de Poisson régulière sphérique est intégrable si et seulement si tous les cycles évanouissants sont symplectiquement triviaux.

On termine cette introduction par quelques rappels sur les groupoïdes de Lie.

(1.4) Rappels et conventions

Pour les généralités sur les groupoïdes et plus spécialement sur les groupoïdes de Lie, on pourra se reporter à [CDW] ; notons cependant qu'

un groupoïde $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$ sera dit à *fibres connexes, simplement connexes* si les fibres de la submersion α (et donc aussi celles de β) sont connexes, simplement connexes. Sauf mention explicite du contraire, les groupoïdes considérés dans la suite seront toujours supposés à fibres connexes.

Par contre, afin de pouvoir traiter les variétés de Poisson à cycles évanouissants non triviaux, on n'imposera pas aux groupoïdes d'être séparés : on supposera seulement que l'espace des unités Γ_0 et les fibres de Γ sont séparés. En particulier les variétés de Poisson considérées seront toujours supposées séparées.

Par contre, afin de pouvoir traiter les variétés de Poisson à cycles évanouissants non triviaux, on n'imposera pas aux groupoïdes d'être séparés : on supposera seulement que l'espace des unités Γ_0 et les fibres de Γ sont séparés. En particulier les variétés de Poisson considérées seront toujours supposées séparées.

On désignera par $\text{Is}\Gamma$ le sous-groupoïde d'isotropie de Γ défini par :

$$\text{Is}\Gamma = \{z \in \Gamma \mid \alpha(z) = \beta(z)\}.$$

Π n'est pas à fibres connexes en général ; ce sera le cas cependant pour sa composante neutre, c'est-à-dire la composante connexe de Γ_0 dans $\text{Is}\Gamma$.

A toute variété feuilletée (M, \mathcal{F}) sont associés naturellement deux groupoïdes de Lie d'unités M reliés par un morphisme de groupoïdes :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{q} & \text{Hol}(\mathcal{F}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

a) le *groupoïde d'homotopie* ou *groupoïde fondamental* $\Pi_1(\mathcal{F})$ obtenu en considérant les classes d'homotopie de chemins tangents aux feuilles de \mathcal{F} (voir [Ph], [Pr]).

b) le *groupoïde d'holonomie* $\text{Hol}(\mathcal{F})$ obtenu en quotientant $\Pi_1(\mathcal{F})$ par la relation qui identifie deux chemins qui induisent la même transformation d'holonomie.

Ces deux groupoïdes joueront un rôle important dans la suite.

(1.5) NOTATIONS

Toutes structures considérées dans le travail sont supposées de classe C^∞ et si (M, \mathcal{F}) est une variété feuilletée, on désigne par :

$\mathcal{X}(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à M ,

$\mathcal{X}(\mathcal{F})$ la sous-algèbre des champs tangents à \mathcal{F} .

Si $\pi : M \rightarrow N$ est une submersion, on désigne par :

$\pi^T : T(M) \rightarrow T(N)$ l'application tangente à π ;

$T(\pi) \subset T(M)$ le sous-fibré des vecteurs tangents aux fibres de π .

2. Intégration symplectique des variétés de Poisson régulières

La notion d'intégration symplectique d'une variété de Poisson a été décrite dans divers travaux (voir entre autres [W₂], [D₂], [DH]...). On en donne ici une présentation orientée vers l'application au cas des Variétés de Poisson régulières.

(2.1) Déploiement universel d'un groupoïde de Lie (cf. [Pr])

Soit $\Gamma \xrightarrow[\alpha]{\beta} \Gamma_0$ un groupoïde de Lie d'unités Γ_0 . En considérant

les classes d'homotopie de chemins qui sont tangents aux α -fibres de Γ et dont l'origine est dans Γ_0 , on construit

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Gamma_0 & \end{array}$$

un groupoïde de Lie $\tilde{\Gamma}$ d'unités Γ_0 , à fibres connexes et simplement connexes et un morphisme de groupoïdes φ de $\tilde{\Gamma}$ dans Γ qui est un revêtement en restriction aux α -fibres [resp. β -fibres].

Ce groupoïde $\tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma_0$, qui est caractérisé à isomorphisme près par la simple connexité des fibres, sera appelé le *déploiement universel* de Γ . ■

Si les groupoïdes de Lie jouent ici le rôle habituellement tenu par les

groupes de Lie, les algèbres de Lie sont remplacées elles par les algèbroïdes de Lie (cf. [Pr], [CDW], [DS]).

(2.2) Algèbroïde de Lie sur une variété M

Un algèbroïde de Lie sur une variété M est défini par :

a) un fibré vectoriel E sur M et un morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\rho} & T(M) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & M
 \end{array}
 \quad ;$$

b) une structure d'algèbre de Lie (locale) de crochet $\{ \}$ sur l'espace $C^\infty(E)$ des sections (locales) de E , telle que l'application

$$\tilde{\rho} : C^\infty(E) \rightarrow \mathcal{L}(M)$$

induite par ρ est un morphisme d'algèbres de Lie ;

c) la relation :

$$\{X, fY\} = f\{X, Y\} + (\tilde{\rho}(X)f)Y$$

pour toute fonction f sur M et tout couple (X, Y) de sections de E . ■

Les deux exemples fondamentaux d'algèbroïdes de Lie sont les suivants :

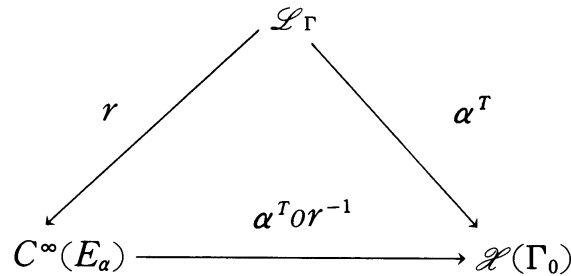
(2.3) L'algèbroïde de Lie \mathcal{L} d'un groupoïde de Lie Γ (cf. [CDW])

Soit $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ un groupoïde de Lie.

On désigne par E_α la restriction à Γ_0 du sous-fibré $T(\beta)$ de $T(\Gamma)$. Puisque β est une submersion, E_α est naturellement isomorphe à $\nu\Gamma_0$, fibré normal à Γ_0 dans Γ , et on définit $\rho : \nu\Gamma_0 \rightarrow T(\Gamma_0)$ à l'aide de la projection $\alpha^T : E_\alpha \rightarrow T(\Gamma_0)$.

Soit \mathcal{L}_Γ l'algèbre de Lie des *champs invariants à gauche* sur Γ , c'est-à-dire des sections de $T(\beta)$, invariantes par les translations à gauche de Γ . Par restriction de $X \in \mathcal{L}_\Gamma$ à Γ_0 on définit un isomorphisme de modules r que l'on transforme en isomorphisme d'algèbres de Lie en munissant $C^\infty(E_\alpha)$ du crochet image :

(2.3.1) :



Après identification de $C^\infty(E_a)$ avec $C^\infty(\nu\Gamma_0)$ l'application $\alpha^T o r^{-1}$ apparaît comme le morphisme $\tilde{\rho}$ d'algèbres de Lie associé à ρ : et on vérifie aisément qu'on a construit ainsi un algèbroïde de Lie \mathcal{G} .

En inversant les rôles de α et β et en remplaçant \mathcal{L}_Γ par \mathcal{R}_Γ algèbre de Lie des champs invariants à droite sur Γ , on construira l'algèbroïde $\tilde{\mathcal{G}}$ opposé de \mathcal{G} .

On dira que \mathcal{G} est l'algèbroïde de Lie du groupoïde Γ . ■

(2.4) REMARQUE

Un isomorphisme de groupoïdes de Lie induit évidemment un isomorphisme (en un sens évident) des algèbroïdes de Lie correspondants. Comme dans le cas de la dimension finie, la réciproque est bien sûr fautive, le déploiement universel $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ induit un isomorphisme des algèbres de Lie $\mathcal{L}_{\tilde{\Gamma}}$ et \mathcal{L}_Γ et donc des algèbroïdes correspondants $\tilde{\mathcal{G}}$ et \mathcal{G} .

(2.5) Algèbroïde de Lie d'une variété de Poisson (P, Λ) (voir [CDW], [Do],...)

A la structure de Poisson Λ sur P , on associe :

a) le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^* : T^*P \rightarrow TP$ qui, à μ , associe X_μ défini par

$$i_{X_\mu} \mu_2 = i_\Lambda(\mu_1 \wedge \mu_2),$$

b) le crochet de Lie $\{ \}$ sur $\Omega^1(P) = C^\infty(T^*P)$ défini par :

$$\{\mu_1, \mu_2\} = i_{X_{\mu_1}} d\mu_2 - i_{X_{\mu_2}} d\mu_1 + d[i_\Lambda(\mu_1 \wedge \mu_2)].$$

Alors l'homomorphisme $\tilde{\Lambda}^* : \Omega^1(P) \rightarrow \mathcal{L}(P)$ induit par Λ^* est un morphisme d'algèbres de Lie qui vérifie :

c) $\{\mu_1, f\mu_2\} = f\{\mu_1, \mu_2\} + (L_{X_{\mu_1}} f) \cdot \mu_2$ pour toute fonction f sur P .

Bref $(T^*P, \Lambda^*, \{ \})$ est un algèbroïde de Lie \mathcal{L} sur P appelé l'algèbroïde de Lie de la variété de Poisson (P, Λ) . Il s'écrit $(T^*P, \omega^*, \{ \})$ si Λ est une structure symplectique ω . ■

Le lien entre les deux situations précédentes est donné par la notion de groupoïde symplectique.

(2.6) Groupoïdes Symplectiques (cf. [W], [Ka], [CDW]...)

Un groupoïde de Lie $\Gamma \xrightarrow{\quad} \Gamma_0$ muni d'une forme symplectique ω est un *groupoïde symplectique* si le graphe de la multiplication est une sous-variété Lagrangienne de $\bar{\Gamma} \times \Gamma \times \Gamma$ (où $\bar{\Gamma}$ est mis pour $(\Gamma, -\omega)$). Un morphisme de groupoïdes symplectiques est un morphisme pour les deux structures.

Si (Γ, ω) est un groupoïde symplectique, Γ_0 est une sous-variété Lagrangienne de (Γ, ω) et il existe sur Γ_0 une unique structure de Poisson Λ_0 pour laquelle α [resp. β] est un morphisme [resp. antimorphisme] de Poisson.

En outre les feuilles du feuilletage caractéristique \mathcal{S}_0 de Λ_0 sont exactement les orbites de l'action naturelle de Γ sur Γ_0 . ■

(2.7) THÉORÈME (voir [CDW]). Soit $(\Gamma, \omega) \xrightarrow[\alpha]{\beta} (\Gamma_0, \Lambda_0)$ un groupoïde symplectique. L'algèbroïde de Lie \mathcal{G} du groupoïde Γ est isomorphe à l'algèbroïde \mathcal{P} de la variété de Poisson (Γ_0, Λ_0) .

Démonstration. Les deux espaces de 2-formes $\Omega^1(\Gamma_0)$ et $\Omega^1(\Gamma)$ sont des algèbres de Lie et α , qui est un morphisme de Poisson, induit

$$\alpha^* : \Omega^1(\Gamma_0) \rightarrow \Omega^1(\Gamma)$$

qui est un morphisme injectif d'algèbres de Lie. Alors

$$\alpha^\# = \omega^\#_0 \alpha^* : \Omega^1(\Gamma_0) \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$$

est un morphisme injectif d'algèbres de Lie dont l'image est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $X \in \mathcal{X}(\Gamma)$ tel qu'il existe $\mu \in \Omega^1(\Gamma_0)$ vérifiant :

$$i_X \omega = -\alpha^* \mu.$$

Cette condition caractérise les champs invariants à gauche (voir [CDW]) et donc $\alpha^\#$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\Omega^1(\Gamma_0)$ sur \mathcal{L}_Γ .

En composant avec la restriction $r : \mathcal{L}_\Gamma \rightarrow C^\infty(\nu\Gamma_0)$, on obtient un isomorphisme d'algèbres de Lie qui est en fait un isomorphisme des algèbroïdes \mathcal{P} et \mathcal{G} . ■

Ceci nous amène à la notion centrale suivante :

(2.8) Intégration symplectique.

Le groupoïde symplectique (Γ, ω) ci-dessus sera appelé une *intégrat-*

tion symplectique de l'algèbroïde \mathcal{P} (ou de la variété de Poisson (Γ_0, Λ_0)). Résoudre le problème de l'intégration symplectique d'une variété de Poisson quelconque (P, Λ) consistera alors à construire un groupoïde de Lie symplectique $(\Gamma, \omega) \xrightarrow{\quad} (\Gamma_0, \Lambda_0)$ tel que $(\Gamma_0, \Lambda_0) = (P, \Lambda)$. Si un tel groupoïde existe, on dira que (P, Λ) est *intégrable*.

Comme le déploiement d'un groupoïde symplectique est un groupoïde symplectique, toute variété de Poisson intégrable (P, Λ) pourra être intégrée par un groupoïde Γ à fibres connexes et simplement connexes. Celui-ci est unique (voir [CDW]); on dira que c'est *l'intégration symplectique universelle* de (P, Λ) , toutes les autres intégrations seront obtenues comme quotients de Γ . ■

(2.9) EXEMPLES et REMARQUES

1. Soient (M, ω) une variété symplectique et $\Pi_1(M) \xrightarrow[\alpha]{\beta} M$ le groupoïde d'homotopie de M . La 2-forme

$$\tilde{\omega} = \alpha^* \omega - \beta^* \omega$$

est une forme symplectique qui fait de $\Pi_1(M)$ un groupoïde symplectique intégrant (M, ω) . C'est évidemment l'intégration universelle de (M, ω) .

2. On peut écrire les orbites de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie G comme les orbites d'un groupoïde

$$T^*G \xrightarrow{\quad} \mathcal{G}^*$$

d'unités \mathcal{G}^* dual de l'algèbre de Lie de G . La structure symplectique canonique $d\lambda$ de T^*G en fait un groupoïde symplectique qui induit sur \mathcal{G}^* une structure de Poisson Λ_0 définissant sur les orbites les structures symplectiques de Kostant-Kirillov-Souriau. ■

Evidemment on peut poser le problème de l'intégration d'un algèbroïde de Lie en général (voir [Pr]). Il a une solution évidente dans les deux cas particuliers suivants.

(2.10) Intégration des algèbroïdes de Lie des feuilletages

Si (M, \mathcal{F}) est une variété feuilletée régulière quelconque, l'inclusion naturelle

$$T(\mathcal{F}) \xrightarrow{j} T(M)$$

définit un algèbroïde de Lie \mathcal{F} appelé *l'algèbroïde de Lie du feuilletage* \mathcal{F} .

En outre à l'aide du diagramme 2.3.1, on vérifie immédiatement que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\Pi_1(\mathcal{F})}$ est isomorphe par α^T à $\mathcal{H}(\mathcal{F})$. Autrement dit le groupoïde d'homotopie $\Pi_1(\mathcal{F})$ intègre l'algèbroïde \mathcal{F} . ■

(2.11) Intégration des algèbroïdes de Lie commutatifs (ou vectoriels)

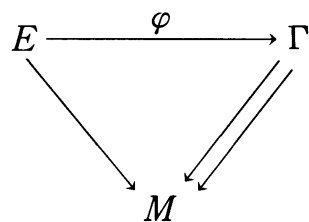
Un algèbroïde de Lie $\mathcal{G} = (E, \{ \}, \rho)$ sur M est *commutatif* si le crochet $\{ \}$ est nul. La condition c) de (2.2) implique alors que, pour $X \in C^\infty(E)$ fixé, on a $(\tilde{\rho}(X).f)Y = 0$ pour tout $Y \in C^\infty(E)$ et toute fonction f sur M . Ceci implique $\tilde{\rho}(X) = 0$, c'est-à-dire $\tilde{\rho}$ et ρ sont nuls et \mathcal{G} est simplement un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ sur M . On dira que \mathcal{G} est un *algèbroïde vectoriel*.

Un fibré vectoriel est aussi un groupoïde de Lie (plus exactement un fibré en groupes abéliens) qui est visiblement une intégration de \mathcal{G} : *l'intégration canonique*. ■

Tout algèbroïde de Lie vectoriel est donc intégrable ; bien plus, on a dans ce cas un théorème d'unicité comme pour le cas de l'intégration symplectique :

(2.12) PROPOSITION. Pour toute intégration $\Gamma \xrightleftharpoons[\alpha]{\beta} M$ de l'algèbroïde

vectoriel $\mathcal{G} : E \xrightarrow{\pi} M$, on a un morphisme surjectif de groupoïdes :



qui est un isomorphisme si Γ est à fibres simplement connexes.

On dira donc que le groupoïde $E \xrightarrow{\pi} M$ est *l'intégration universelle* de \mathcal{G} .

Démonstration. Dans le diagramme commutatif (2.3.1)

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{L}_\Gamma & \\
 r \swarrow & & \searrow \alpha^T \\
 C^\infty(E) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \mathcal{L}(M)
 \end{array}$$

on sait que $\tilde{\rho}=0$ et donc $\alpha^T(\mathcal{L}_\Gamma)=0$. Comme \mathcal{L}_Γ engendre le fibré $T(\beta)$ en tout point, ceci implique $T(\beta) \subset T(\alpha)$ et donc $T(\beta)=T(\alpha)$ pour raison de dimension. On a donc aussi $\alpha=\beta$ et

$$\Gamma \xrightarrow{\alpha=\beta} M$$

est un fibré en groupes.

L'algèbre de Lie \mathcal{L}_u du groupe de Lie $\Gamma_u=\alpha^{-1}(u)$, $u \in M$, est abélienne car l'application de restriction $\mathcal{L}_\Gamma \rightarrow \mathcal{L}_u$ est surjective. En conséquence les groupes Γ_u sont des groupes de Lie commutatifs de même dimension égale au rang de E et les éléments de \mathcal{L}_Γ sont complets en restriction à chaque fibre, donc complets.

Pour $X \in C^\infty(E)$ on note \tilde{X} et \tilde{X} les champs invariants correspondants sur les groupoïdes E et Γ , puis $\phi_{\tilde{X}}$ et $\phi_{\tilde{X}}$ leurs flots respectifs. On définit

$$\varphi: E \rightarrow \Gamma$$

par $\varphi(z)=\phi_{\tilde{X}}(x,1)$ si $x=\pi(z)$ et $z=\phi_{\tilde{X}}(x,1)$. On vérifie immédiatement que φ est bien définie et différentiable; que c'est, fibre à fibre, un homomorphisme de groupes et un revêtement. C'est donc un homomorphisme de groupoïdes qui devient un isomorphisme si les fibres de Γ sont simplement connexes. ■

3. Intégration des variétés de Poisson régulières et formes feuilletées

Rappelons qu'une variété de Poisson (P, Λ) est *régulière* si le feuilletage caractéristique \mathcal{S} de Λ est régulier, i. e. de dimension constante. Ces variétés de Poisson régulières et leurs algèbroïdes de Lie se décrivent bien en termes de formes feuilletées (voir [DH], [EMS]); pour celles qui sont intégrables, on peut alors identifier facilement le groupoïde d'isotropie de l'intégration symplectique universelle (voir 3.5).

(3.1) Formes feuilletées et structures de Poisson ([DH])

Soit (P, \mathcal{S}) une variété P munie d'un feuilletage (régulier) \mathcal{S} . On désigne par $[\Omega^*(P), d]$ le complexe de De Rham de P , par $\Omega^*(P, \mathcal{S})$ le sous-complexe différentiel des formes \mathcal{S} -relatives défini par

$$\omega \in \Omega^*(P, \mathcal{S}) \text{ si } j_L^* \omega = 0$$

pour l'inclusion $j_L: L \rightarrow P$ de toute feuille $L \in \mathcal{S}$. Le complexe différentiel quotient

$$\Omega^*(\mathcal{S}) = \Omega^*(P) / \Omega^*(P, \mathcal{S})$$

s'appelle le *complexe des formes \mathcal{S} -feuilletées*. Sa cohomologie $H^*(\mathcal{S})$ est la cohomologie feuilletée de (P, \mathcal{S}) . On désignera par $\bar{\omega}$ la classe dans $\Omega^*(\mathcal{S})$ de $\omega \in \Omega^*(P)$.

Le calcul différentiel habituel passe au quotient sur $\Omega^*(\mathcal{S})$; en particulier l'évaluation sur les champs tangents à \mathcal{S} et le produit extérieur. Si $\dim \mathcal{S} = 2n$, une 2-forme $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{S})$ est une \mathcal{S} -forme feuilletée symplectique si

- i) $d\sigma = 0$;
- ii) $\overset{n}{\Lambda} \sigma$ est non nulle en tout point de P .

La restriction de σ à une feuille L de \mathcal{S} est une forme symplectique au sens usuel et donc σ définit une structure de Poisson Λ sur P dont le feuilletage caractéristique est \mathcal{S} . On écrit $\Lambda = (\mathcal{S}, \sigma)$. Réciproquement toute structure de Poisson régulière peut se mettre sous cette forme (cf. [DH]).

En particulier, dans le cas d'une variété symplectique (P, ω) , le feuilletage \mathcal{S} n'a qu'une feuille P et $\sigma = \omega$. ■

Le langage des formes feuilletées permet une caractérisation très maniable de certains morphismes de Poisson, caractérisation qu'on utilisera au § 5.8.

(3.2) PROPOSITION. Soit $\pi: M \rightarrow P$ une submersion surjective à fibres connexes d'une variété symplectique (M, ω) sur une variété de Poisson régulière (P, Λ) , $\Lambda = (\mathcal{S}, \sigma)$. On note $\mathcal{F} = \pi^* \mathcal{S}$ le feuilletage relevé de \mathcal{S} par π . On suppose que $\text{codim } \mathcal{S} = \dim M - \dim P$ i. e. $\dim \mathcal{F} = \dim P$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) π est un morphisme de Poisson;
- ii) ω est un représentant de la forme \mathcal{F} -feuilletée $\pi^* \sigma$.

De plus si π est un morphisme de Poisson, ses fibres sont isotropes.

Démonstration. A toute fonction $f \in C^\infty(P)$, on associe les deux champs de vecteurs hamiltoniens :

- i) $Z_f \in \mathcal{X}(M)$, défini par $i_{Z_f}\omega = -\pi^*df$;
 ii) $X_f \in \mathcal{X}(\mathcal{S})$ défini par $i_{X_f}\sigma = -\overline{df}$, où $\overline{df} \in \Omega^1(\mathcal{S})$ est la forme feuilletée définie par df (voir [DH]).

Alors si π est un morphisme de Poisson, Z_f se projette par π sur X_f , donc Z_f est tangent à \mathcal{S} et comme le morphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{aligned} \omega^* : C^\infty(P) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ f &\longrightarrow Z_f \end{aligned}$$

est injectif, les champs Z_f engendrent $T(\mathcal{S})$ pour des raisons évidentes de dimension. La condition ii) découle alors immédiatement du fait que pour deux fonctions $f, g \in C^\infty(P)$, on aura :

$$\begin{aligned} \omega(Z_f, Z_g) &= (i_{Z_f}\omega)(Z_g) = -(\pi^*df)(Z_g) = -\pi^*[df(X_g)] \\ \omega(Z_f, Z_g) &= +\pi^*[\sigma(X_f, X_g)]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant ii) vérifiée et soit $T(\pi)$ le fibré tangent aux fibres de π . Pour tout couple (X, Y) de vecteurs tels que $X \in T_z(\pi)$ et $Y \in T_z(\mathcal{S})$, $z \in M$, on a :

$$\omega(X, Y) = \pi^*\sigma(X, Y) = \sigma(\pi_*X, \pi_*Y) = \sigma(0, Y) = 0.$$

Donc $T(\pi)$ est isotrope et $T(\mathcal{S})$ est contenu dans l'orthogonal symplectique $T(\pi)^\omega$ de $T(\pi)$. Pour raison de dimension on aura :

$$T(\mathcal{S}) = T(\pi)^\omega \supset T(\pi).$$

De cela, on déduit que le champ hamiltonien Z_f associé à $f \in C^\infty(P)$ est tangent à \mathcal{S} . En effet, pour tout champ Y tangent à π , on aura :

$$\omega(Z_f, Y) = -(\pi^*df)(Y) = -Y(f \circ \pi) = 0$$

donc $Z_f \in T(\pi)^\omega = T(\mathcal{S})$. On peut alors définir le produit intérieur $i_{Z_f}\pi^*\sigma$ comme étant la classe $\overline{i_{Z_f}\omega}$ dans $\Omega^1(\mathcal{S})$ de $i_{Z_f}\omega = -\pi^*df$. De façon évidente, on a

$$\overline{i_{Z_f}\omega} = -\pi^*\overline{df} = \pi^*(i_{X_f}\sigma),$$

ce qui signifie que Z_f se projette par π sur X_f et donc que π est un morphisme de Poisson. ■

On remarquera que la connexité des fibres de π est intervenue dans la démonstration de (3.2) pour dire qu'un champ localement projetable par π est projetable par π .

(3.3) Algèbroïde de Lie d'une variété de Poisson régulière

Dans le cas d'une structure régulière $\Lambda = (\mathcal{S}, \sigma)$, $\text{Ker } \Lambda^*$ est le fibré

conormal $\nu^*\mathcal{S}$ dont les sections sont les 1-formes \mathcal{S} -relatives. On a alors les suites exactes :

a) de fibrés vectoriels :

$$0 \rightarrow \nu^*\mathcal{S} \rightarrow T^*P \xrightarrow{\Lambda^\#} T\mathcal{S} \rightarrow 0.$$

b) d'algèbres de Lie (de dimension infinie) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathcal{L}(\mathcal{S}) & \\
 & & & \uparrow & \searrow \\
 & & \tilde{\Lambda}^\# & & \\
 0 \rightarrow \Omega^1(P, \mathcal{S}) \rightarrow \Omega^1(P) & & & \downarrow \bar{\Lambda}^\# & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & \nearrow \\
 & & & \Omega^1(\mathcal{S}) &
 \end{array}$$

La restriction à $\Omega^1(P, \mathcal{S})$ du crochet de $\Omega^1(P)$ est nulle et le crochet sur $\Omega^1(\mathcal{S})$ obtenu par passage au quotient du crochet de $\Omega^1(P)$ s'écrit :

$$\{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\} = -i_{[X_1, X_2]}\sigma$$

où $\bar{\mu}_i \in \Omega^1(\mathcal{S})$ est la classe de $\mu_i \in \Omega^1(P)$ et $X_i = \Lambda^\# \mu_i$; enfin $\bar{\Lambda}^\#$ est l'isomorphisme d'algèbres de Lie qui, à X tangent à \mathcal{S} , associe la forme feuilletée $(-i_x\sigma)$.

Les conditions a) et b) définissent une suite exacte d'algèbroïdes de Lie sur P :

$$(3.3.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow 0,$$

où \mathcal{N} est l'algèbroïde vectoriel $\nu^*\mathcal{S} \rightarrow P$ et \mathcal{S} est l'algèbroïde de Lie du feuilletage \mathcal{S} . En d'autres termes, l'algèbroïde \mathcal{P} de la variété de Poisson régulière $\Lambda = (\mathcal{S}, \sigma)$ est une extension de l'algèbroïde de Lie de \mathcal{S} par un algèbroïde vectoriel. ■

Pour finir, il reste à interpréter la suite exacte (3.3.1.) en termes de groupoïdes de Lie dans le cas particulier d'une variété de Poisson régulière intégrable.

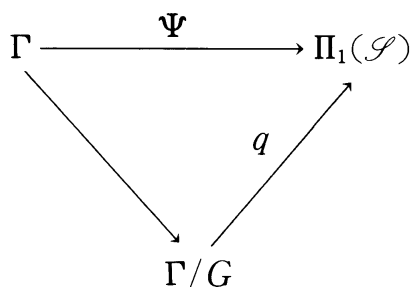
(3.4) Intégration d'une variété de Poisson régulière

i) Soit $(\Gamma, \omega) \xrightarrow[\alpha]{\beta} (P, \Lambda)$ l'intégration symplectique universelle

de la variété de Poisson régulière $\Lambda=(\mathcal{S}, \sigma)$. Comme les fibres de Γ sont simplement connexes, un résultat bien connu de Pradines (voir [Pr]) assure qu'il existe un morphisme surjectif Ψ de Γ sur le groupoïde fondamental $\Pi_1(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} . Alors $\text{Ker } \Psi=\Psi^{-1}(P)$ est un sous-groupoïde fermé distingué de Γ contenu dans le sous-groupoïde d'isotropie :

$$\text{Ker } \Psi=\Psi^{-1}(P)\subset \text{Is}\Gamma.$$

Si on désigne par $G \rightarrow P$ la composante neutre de $\text{Is}\Gamma$, le morphisme Ψ se factorise par Γ/G qui est aussi un groupoïde de Lie à fibres connexes étalé sur $\Pi_1(\mathcal{S})$ (pour raison de dimensions) :



La propriété universelle de $\Pi_1(\mathcal{S})$ assure que q est un isomorphisme et donc on a une suite exacte de groupoïdes de Lie :

(3.4.1)
$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\Psi} & \Pi_1(\mathcal{S}) \\ & \searrow & \downarrow \beta & \swarrow \alpha & \downarrow \beta_0 \\ & & P & & P \end{array}$$

en d'autres termes le groupoïde Γ est une extension de $\Pi_1(\mathcal{S})$ par G .

ii) D'après (2.10), on sait que α_0 induit un isomorphisme :

$$\alpha_0^* : \mathcal{L}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{L}_{\Pi_1(\mathcal{S})}.$$

Par ailleurs le morphisme de groupoïdes Ψ induit un morphisme d'algèbres de Lie $\Psi_* : \mathcal{L}_\Gamma \rightarrow \mathcal{L}_{\Pi_1(\mathcal{S})}$ et dans le diagramme suivant :

(3.4.2) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_\Gamma & \xrightarrow{\Psi_*} & \mathcal{L}_{\Pi_1(\mathcal{S})} \\
 \uparrow \alpha^\# & \searrow a_* & \uparrow \alpha_0^* \\
 \Omega^1(P) & \xrightarrow{\Lambda^\#} & \mathcal{X}(\mathcal{S})
 \end{array}$$

le triangle inférieur [resp. supérieur] est commutatif en raison de (2.3.1) [resp. de la relation $\alpha = \alpha_0 \circ \Psi$]. On en déduit que Ψ_* est surjective et que (3.4.2) peut être complété en un isomorphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_G & \longrightarrow & \mathcal{L}_\Gamma & \xrightarrow{\Psi_*} & \mathcal{L}_{\Pi_1(\mathcal{S})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow a^\# & & \uparrow \alpha_0^* & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(P, \mathcal{S}) & \longrightarrow & \Omega^1(P) & \xrightarrow{\Lambda^\#} & \mathcal{X}(\mathcal{S}) & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

ce qui signifie que le diagramme d'algèbroïdes de Lie (3.3.1) est le pendant infinitésimal du diagramme de groupoïdes de Lie (3.4.1). ■

On en retiendra le résultat suivant :

(3.5) THÉORÈME. Soit $(\Gamma, \omega) \rightrightarrows (P, \Lambda)$ la réalisation symplectique universelle de la variété de Poisson régulière intégrable (P, Λ) .

L'algèbroïde de Lie de la composante neutre G du groupoïde d'isotropie de Γ est le fibré conormal $\nu^* \mathcal{S} \rightarrow P$.

4. Variétés de Poisson régulières et cycles évanouissants

Les cycles évanouissants introduits par Novikov dans [N] jouent un rôle très important dans la description des variétés feuilletées ; par exemple on montre dans [DH] que les cycles évanouissants d'un feuilletage sont triviaux si et seulement si l'espace total de son groupoïde d'homotopie est séparé.

Dans ce paragraphe on affine la notion classique de cycle évanouissant, puis on en donne une version "symplectique" adaptée à l'étude des variétés de Poisson régulières.

(4.1) Le modèle des cycles évanouissants

On désigne par (Δ, \mathcal{H}) la variété feuilletée $\Delta = D^2 \times [0, 1] - \{(0, 0)\}$, munie du feuilletage horizontal \mathcal{H} (défini par l'équation $dt=0$). Toutes ses feuilles L_t sont des disques sauf L_0 qui est un cylindre (disque pointé).

Les groupes d'holonomie de \mathcal{H} sont triviaux; son groupoïde d'holonomie

$$\text{Hol}(\mathcal{H}) \rightrightarrows \Delta$$

est le sous-groupoïde fermé du groupoïde grossier

$$\Delta \times \Delta \rightrightarrows \Delta$$

image réciproque de la diagonale δ de $[0, 1] \times [0, 1]$ par la projection canonique de $\Delta \times \Delta$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$. C'est en particulier une variété séparée et contractile.

Le groupoïde d'homotopie se factorise par $\text{Hol}(\mathcal{H})$ par un homomorphisme q :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{H}) & \xrightarrow{q} & \text{Hol}(\mathcal{H}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Delta & \end{array}$$

Ses fibres sont simplement connexes, diffeomorphes à \mathbf{R}^2 mais l'espace total est une variété non séparée; l'application q consiste à identifier les points non séparés, et $\text{Hol}(\mathcal{H})$ est donc l'espace topologique séparé associé à $\Pi_1(\mathcal{H})$. (Pour plus de détails, voir [LV₁]). ■

(4.2) Cycles évanouissants cohérents d'une variété feuilletée (M, \mathcal{F})

Soient (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée quelconque et $h : (\Delta, \mathcal{H}) \longrightarrow (M, \mathcal{F})$ une application feuilletée, c'est-à-dire qui envoie toute feuille de \mathcal{H} dans une feuille de \mathcal{F} . Soit :

$$\gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$$

la restriction de h à $\partial D^2 \times [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $F_t \in \mathcal{F}$ telle que $h(L_t) \subset F_t$ et on désigne par h_t [resp. γ_t] la restriction de h à L_t [resp. de γ à ∂L_t].

i) Pour tout $t > 0$, le lacet γ_t est homotope à zéro dans F_t , donc γ définit un cycle évanouissant de \mathcal{F} ; il est *trivial* si γ_0 est homotope à zéro dans F_0 .

ii) Bien mieux, l'application h est une famille différentiable

d'homotopies pour le cycle évanouissant γ ; celui-ci sera dit *cohérent*. Π est *trivial* (comme cycle évanouissant cohérent) si h se prolonge en une application

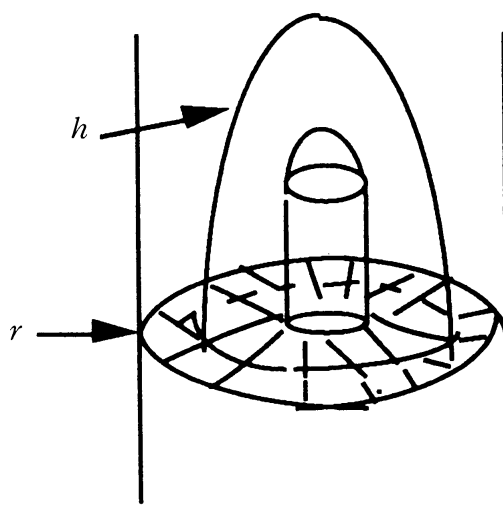
$$\bar{h} : D^2 \times [0, 1] \rightarrow M.$$

Dans 4.3 iv) on verra un exemple de cycle évanouissant non cohérent. ■

(4.3) EXEMPLES

i) L'application identité $\text{id} : \Delta \rightarrow \Delta$ définit un cycle évanouissant cohérent de \mathcal{H} qui est non trivial. C'est bien sûr le prototype des cycles évanouissants cohérents.

ii) Le résultat essentiel du travail de Novikov dans [N] affirme que pour un feuilletage de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3, tout cycle évanouissant non trivial est porté par le bord d'une composante de Reeb; il est cohérent, non trivial.



ii) Soient N et S les pôles Nord et Sud de la sphère S^2 et C son grand cercle horizontal. Soit \mathcal{F} le feuilletage induit par le feuilletage horizontal de $S^2 \times \mathbf{R}$ sur $M = S^2 \times \mathbf{R} - \{(N, 0)\}$. Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont simplement connexes et donc tout cycle évanouissant de \mathcal{F} est trivial.

Cependant, on remarquera que si γ est le cycle évanouissant trivial défini par l'inclusion :

$$C \times [0, 1] \rightarrow M$$

la famille différentiable d'homotopies de γ définie par l'inclusion naturelle

de $\Delta = (S^2 \times [0, 1]) \cap M$ dans M , n'est pas prolongeable.

iv) En enlevant à $S^2 \times \mathbf{R}$ deux suites convenables convergeant respectivement vers $(N, 0)$ et $(S, 0)$, on peut construire un cycle évanouissant du feuilletage horizontal qui est non trivial et non cohérent, c'est-à-dire qu'il n'admet aucune famille différentiable d'homotopies au voisinage de $t=0$. ■

Venons-en aux cycles évanouissants sur les variétés de Poisson régulières.

(4.4) Aire d'une famille différentiable d'homotopies

i) Soient (P, Λ) , $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$, une variété de Poisson régulière et

$$h: \Delta \rightarrow P$$

un cycle évanouissant cohérent.

Puisque h est une application feuilletée et que $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$, on a $h^*\sigma \in \Omega^2(\mathcal{H})$ et pour tout représentant μ de $h^*\sigma$, la fonction

$$\begin{aligned} A(h, \mu) :]0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longrightarrow \int_{L_t} \mu \end{aligned}$$

est une fonction différentiable qui ne dépend pas en fait de μ , mais seulement de σ . On la note $A(h)$ et on l'appelle l'aire de h .

ii) On dira que la famille h est *symplectiquement prolongeable* si $A(h)$ se prolonge en une fonction différentiable $\bar{A}(h) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ et si c'est le cas, on dira que le cycle évanouissant cohérent γ défini par h est *symplectiquement trivial*. ■

(4.5) EXEMPLES

Tout feuilletage régulier \mathcal{F} de dimension 2 sur une variété M est le feuilletage caractéristique d'une structure de Poisson pourvu qu'il soit orientable. En effet, si on munit M d'une métrique Riemannienne g , la forme volume de la restriction de g aux feuilles définit une forme \mathcal{F} -feuilletée symplectique σ , donc une structure de Poisson $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$. Les exemples (4.3) peuvent donc être munis de structures de Poisson.

i) Si g est la métrique Riemannienne sur Δ induite par la métrique produit de $D^2 \times [0, 1]$ toute famille différentiable d'homotopies pour le cycle évanouissant γ est bien sûr symplectiquement prolongeable et γ est symplectiquement trivial.

Par contre, en multipliant g par une fonction positive convenable on

peut faire en sorte que la fonction d'aire

$$A(id) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$$

soit tende vers $+\infty$ quand t tend vers 0 ; soit n'ait pas de limite.

Dans les deux cas, γ sera symplectiquement non trivial.

ii) Pour toute structure de Poisson sur la composante de Reeb de dimension 3, et pour toute famille différentiable d'homotopies h pour le cycle évanouissant canonique γ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(h)(t) = +\infty .$$

Donc γ est symplectiquement non trivial et ce, quelle que soit la structure de Poisson choisie. ■

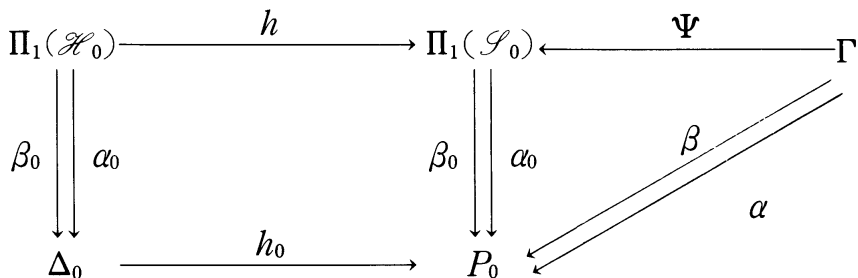
5. Obstruction à l'intégrabilité

C'est dans cette section, qu'on va établir le résultat essentiel de ce travail, à savoir que tout cycle évanouissant cohérent d'une variété de Poisson régulière intégrable, est symplectiquement trivial (voir 5.10). Ce sera une conséquence immédiate du résultat préliminaire suivant (pour l'énoncé duquel on a modifié les notations introduites aux § 3 et 4 par l'adjonction d'un indice 0) :

(5.1) THÉORÈME. Soit $h_0 : (\Delta_0, \mathcal{H}_0) \rightarrow (P_0, \mathcal{S}_0)$ un cycle évanouissant cohérent d'une variété de Poisson régulière $\Lambda_0 = (\mathcal{S}_0, \sigma_0)$.

Si (P_0, Λ_0) est intégrable, la forme \mathcal{H}_0 -feuilletée $h_0^* \sigma_0 \in \Omega^2(\mathcal{H}_0)$ admet un représentant $\mu \in \Omega^2(\Delta_0)$ qui est fermé.

La démonstration de (5.1) va se faire en plusieurs étapes. On considère l'intégration symplectique universelle Γ de (P_0, Λ_0) qui se factorise par $\Pi_1(\mathcal{S}_0)$ (cf. 3.4), puis le relèvement naturel h de h_0 au groupoïde fondamental $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$; c'est bien sûr un morphisme de groupoïdes :



Le diagramme ainsi obtenu sera agrandi en trois temps (§ 5.2, 5.3 et 5.4).

(5.2) Le groupoïde image-réciproque $h^*\Gamma$

Pour simplifier les notations, on désignera par Δ l'espace total du groupoïde $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$. Soit $h^*\Gamma$ la sous-variété de $\Delta \times \Gamma$ définie par

$$h^*\Gamma = \{(y, z) \in \Delta \times \Gamma \mid h(y) = \Psi(z)\}.$$

On désigne par $h^*\Psi$ et H les restrictions à $h^*\Gamma$ des deux projections canoniques, définissant ainsi un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} h^*\Gamma & \xrightarrow{H} & \Gamma \\ h^*\Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \Pi_1(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{h} & \Pi_1(\mathcal{S}_0) \end{array}$$

i) Si on définit $\alpha, \beta : h^*\Gamma \rightarrow \Delta_0$, par $\alpha = \alpha_0 \circ h^*\Psi$ et $\beta = \beta_0 \circ h^*\Psi$, on voit que pour $(y, z) \in h^*\Gamma$, on a les relations :

$$\begin{aligned} \alpha(y, z) &= \alpha_0(y) \text{ et } \alpha(z) = \alpha_0(\Psi(z)) = \alpha_0(h(y)) = h_0(\alpha_0(y)) \\ \beta(y, z) &= \beta_0(y) \text{ et } \beta(z) = \beta_0(\Psi(z)) = \beta_0(h(y)) = h_0(\beta_0(y)). \end{aligned}$$

Ceci montre immédiatement que

$$\alpha(y_2, z_2) = \beta(y_1, z_1) \text{ implique } \alpha_0(y_2) = \beta_0(y_1) \text{ et } \alpha_0(z_2) = \beta_0(z_1),$$

et les deux lois naturelles :

$$\begin{aligned} (y_2, z_2) \cdot (y_1, z_1) &= (y_2 y_1, z_2 z_1), \\ (y, z)^{-1} &= (y^{-1}, z^{-1}), \end{aligned}$$

définissent sur $h^*\Gamma$ une structure de groupoïde de Lie d'unités Δ_0 ; la section canonique

$$\varepsilon_0 : \Delta_0 \rightarrow h^*\Gamma$$

étant définie par $\varepsilon_0(x) = (x, h(x))$, $x \in \Delta_0$.

ii) Bien sûr $h^*\Gamma$ est un groupoïde à fibres connexes et les applications $h^*\Psi$ et H sont des morphismes de groupoïdes de Lie. En outre par définition de Ψ , on aura successivement :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(h^*\Psi) &= \{(y, z) \in h^*\Gamma \mid y = (h^*\Psi)(y, z) \in \Delta_0\} \\ \text{Ker}(h^*\Psi) &= \{(y, z) \in \Delta_0 \times \Gamma \mid h(y) = h_0(y) = \Psi(z) \in \Gamma_0\} \\ \text{Ker}(h^*\Psi) &= \{(y, z) \in \Delta_0 \times G \mid h_0(y_0) = \Psi(z)\} \end{aligned}$$

où G est la composante neutre du groupoïde d'isotropie de Γ . La dernière écriture signifie alors que :

$$\text{Ker}(h^*\Psi) = h_0^*G$$

c'est-à-dire que $\text{Ker}(h^*\Psi)$ est le groupoïde image réciproque de G par h_0 . On vérifie sans peine que c'est en fait la composante neutre du sous-groupoïde d'isotropie $\text{Is}(h^*\Gamma)$ de $h^*\Gamma$ et que son algèbroïde de Lie est commutatif, isomorphe à $h_0^*(\nu^*\mathcal{S}_0)$.

En résumé on a donc une nouvelle suite exacte de groupoïdes à fibres connexes :

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} h^*G & \longrightarrow & h^*\Gamma & \xrightarrow{h^*\Psi} & \Pi_1(\mathcal{H}_0) \\ & \searrow \pi & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ & & \Delta_0 & \xleftarrow{\beta_0} & \xleftarrow{\alpha_0} \end{array}$$

iii) Pour $u_0 \in \Delta_0$, la restriction de (5.2.1) à la fibre $\alpha^{-1}(u_0) \subset h^*\Gamma$:

$$(5.2.2) \quad (h^*G)_{u_0} \longrightarrow \alpha^{-1}(u_0) \xrightarrow{(h^*\Psi)_{u_0}} \alpha_0^{-1}(u_0)$$

qui peut aussi être obtenue comme image réciproque de la suite correspondante pour Γ , est un fibré principal de fibre $G_{h_0(u_0)}$ quotient de \mathbf{R}^n (où $n = \text{codim } \mathcal{S}_0$) par un sous-groupe discret. Comme $\alpha_0^{-1}(u_0)$ est difféomorphe à \mathbf{R}^2 (parce que revêtement universel d'une feuille de \mathcal{H}_0), on voit que l'inclusion suivante est une équivalence d'homotopie

$$(h^*G)_{u_0} \longrightarrow \alpha^{-1}(u_0).$$

En particulier les fibres de $h^*\Gamma$ ne sont pas simplement connexes, en général. ■

(5.3) Le déploiement universel $\widetilde{h^*\Gamma}$ de $h^*\Gamma$

Soient $\widetilde{h^*\Gamma}$ et $\widetilde{h^*G}$ les déploiements universels de $h^*\Gamma$ et h^*G ; la suite exacte (5.2.1) induit de façon évidente une suite exacte

$$(5.3.1) \quad \begin{array}{ccccc} \widetilde{h^*G} & \longrightarrow & \widetilde{h^*\Gamma} & \xrightarrow{\widetilde{h^*\Psi}} & \Pi_1(\mathcal{H}_0) \\ & \searrow \pi & \downarrow \beta & \swarrow \alpha & \nearrow \alpha_0 \\ & & \Delta_0 & & \end{array}$$

où $\widetilde{h^*\Psi}$ est le relèvement de $h^*\Psi$. En outre, on voit que

i) $\widetilde{h^*G} = \text{Ker}(\widetilde{h^*\Psi})$ est isomorphe au groupoïde vectoriel $h_0^*(\nu^*\mathcal{S}_0)$; c'est aussi la composante neutre du groupoïde d'isotropie $\text{Is}(\widetilde{h^*\Gamma})$.

ii) en tant qu'application, $\widetilde{h^*\Psi}$ est une fibration localement triviale de fibre \mathbf{R}^n ($n = \text{codim } \mathcal{S}_0$).

En outre, on notera que ni $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$ ni $\widetilde{h^*\Gamma}$ ne sont séparés. ■

(5.4) Le groupoïde de Lie séparé $\widehat{h^*\Gamma}$ associé à $\widetilde{h^*\Gamma}$

i) De façon générale $\Gamma \rightrightarrows \Gamma_0$ étant un groupoïde de Lie à fibres et unités séparées, on vérifie facilement que Γ est séparé si et seulement si Γ_0 est fermé dans Γ .

Dans le cas où Γ n'est pas séparé, l'adhérence $\overline{\Gamma_0}$ de Γ_0 est un sous-groupoïde fermé contenu dans $\text{Is}(\Gamma)$ (qui est lui-même fermé). Donc $\overline{\Gamma_0}$ est un sous-groupoïde distingué de Γ et le quotient $\widehat{\Gamma} = \Gamma / \overline{\Gamma_0}$ est un groupoïde topologique. C'est un groupoïde de Lie si son espace total est une variété.

Enfin, un morphisme $f: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ de groupoïdes de Lie de même espace d'unités Γ_0 passera évidemment au quotient en un morphisme $\widehat{f}: \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{\Gamma}'$ de groupoïdes topologiques.

ii) On applique les considérations précédentes aux groupoïdes décrits dans le § (5.3).

a) $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$ n'est pas séparé, $\overline{\Delta_0} = \text{Is}(\Pi_1(\mathcal{H}_0))$ et le quotient n'est rien d'autre que le groupoïde d'holonomie $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$ (voir [LV₁]);

b) Puisque $\widetilde{h^*G}$ est séparé, Δ_0 est fermé dans $\widetilde{h^*G}$ et si $\overline{\Delta_0}$ désigne l'adhérence de Δ_0 dans $\widetilde{h^*\Gamma}$ on a $\overline{\Delta_0} \cap \widetilde{h^*G} = \Delta_0$. En particulier $\widetilde{h^*\Psi}$ est un

isomorphisme de l'adhérence de Δ_0 dans $\widehat{h^*\Gamma}$ sur l'adhérence de Δ_0 dans $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$.

c) Par passage au quotient, (5.3.1) définit un nouveau diagramme commutatif

$$(5.4.1) \quad \begin{array}{ccccc} \widehat{h^*G} & \longrightarrow & \widehat{h^*\Gamma} & \xrightarrow{\widehat{h^*\Psi}} & \Pi_1(\mathcal{H}_0) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow Q & & \downarrow q \\ \widehat{h^*G} & \longrightarrow & \widehat{h^*\Gamma} & \xrightarrow{\widehat{h^*\Psi}} & \text{Hol}(\mathcal{H}_0) \end{array}$$

où la ligne du bas est une suite de groupoïdes topologiques, exacte en raison de (b).

Enfin si U est une carte locale sur $\Pi_1(\mathcal{H}_0)$, alors $q(U)$ est une carte locale sur $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$, homéomorphe à U . Par suite, si $V = (\widehat{h^*\Psi})^{-1}(U) \cong U \times \mathbf{R}^n$ alors Q est un homéomorphisme de V sur $Q(V)$ qui est une carte locale sur $\widehat{h^*\Gamma}$. Bref $\widehat{h^*\Gamma}$ est un groupoïde de Lie. ■

(5.5) REMARQUE

D'après (5.3) et (5.4), $\widehat{h^*\Psi}$ est un fibré localement trivial (de fibre \mathbf{R}^n) au-dessus de l'espace total de $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$ qui est visiblement contractile (voir 4.1). C'est donc un fibré trivial qui admet une section $s : \text{Hol}(\mathcal{H}_0) \rightarrow \widehat{h^*\Psi}$. ■

(5.6) Diagramme-résumé

Toutes les constructions précédentes peuvent être rassemblées dans le tableau commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{h^*\Gamma} & \xleftarrow{Q} & \widehat{h^*\Gamma} & \xrightarrow{\varphi} & h^*\Gamma & \xrightarrow{H} & \Gamma \\ & \searrow \widehat{h^*\Psi} & \searrow \widehat{h^*\Psi} & \searrow \widehat{h^*\Psi} & \downarrow h^*\Psi & \downarrow h^*\Psi & \downarrow \Psi \\ & & \text{Hol}(\mathcal{H}_0) & \xleftarrow{q} & \Pi_1(\mathcal{H}_0) & \xrightarrow{h} & \Pi_1(\mathcal{S}_0) \\ & \swarrow s & & \swarrow \alpha_0 & \downarrow \beta_0 & \downarrow \alpha_0 & \downarrow \beta_0 \\ & & & & \Delta_0 & \xrightarrow{h_0} & P_0 \end{array}$$

a) Rappelons que si l'on munit $\Pi_1(\mathcal{S}_0)$ de la structure de Poisson régulière $\Lambda = (\mathcal{S}, \sigma)$ avec

$$\mathcal{S} = \alpha_0^* \mathcal{S}_0 = \beta_0^* \mathcal{S}_0 \text{ et } \sigma = \alpha_0^* \sigma_0 - \beta_0^* \sigma_0,$$

alors Ψ et α_0 sont des morphismes de Poisson (voir [DH] par exemple).

b) A partir de \mathcal{S}_0 et \mathcal{H}_0 , on définit un feuilletage sur chacun des sommets du tableau :

$$\mathcal{S}_\Gamma = \Psi^* \mathcal{S} \text{ sur } \Gamma,$$

$$\mathcal{H} = \alpha_0^* \mathcal{H}_0 = \beta_0^* \mathcal{H}_0 \text{ sur } \Pi_1(\mathcal{H}_0),$$

$$\mathcal{H}_\Gamma = (h^* \Psi)^* \mathcal{H} \text{ sur } h^* \Gamma \text{ et } \widetilde{\mathcal{H}}_\Gamma = \varphi^*(\mathcal{H}_\Gamma) \text{ sur } \widetilde{h^* \Gamma},$$

$$\widehat{\mathcal{H}} \text{ et } \widehat{\mathcal{H}}_\Gamma \text{ les images directes de } \mathcal{H} \text{ et } \widetilde{\mathcal{H}}_\Gamma \text{ par } q \text{ et } Q \text{ sur } \text{Hol}(\mathcal{H}_0) \text{ et } \widehat{h^* \Gamma}$$

Alors toutes les flèches du tableau sont des applications feuilletées.

(5.7) REMARQUE

Puisque $\widehat{h^* \Gamma}$ est l'espace topologique séparé associé à $\widetilde{h^* \Gamma}$, l'application Q induit un isomorphisme de l'espace des fonctions sur $\widehat{h^* \Gamma}$ sur l'espace des fonctions sur $\widetilde{h^* \Gamma}$ et donc un isomorphisme de complexes différentiels :

$$Q^* : \Omega^*(\widehat{h^* \Gamma}) \rightarrow \Omega^*(\widetilde{h^* \Gamma}).$$

Celui-ci est inversible et on note Q_* son inverse. De même q induit un isomorphisme

$$q_* : \Omega^*[\Pi_1(\mathcal{H}_0)] \rightarrow \Omega^*[\text{Hol}(\mathcal{H}_0)].$$

On arrive à la démonstration de (5.1) en deux étapes :

(5.8) LEMME. Soit ω la forme symplectique de Γ . La 2-forme $\eta = s^* Q_* \varphi^* H^* \omega \in \Omega^*[\text{Hol}(\mathcal{H}_0)]$ est une forme fermée qui représente la forme $\widehat{\mathcal{H}}$ -feuilletée $q_* h^* \sigma$.

Démonstration. Puisque ω est fermée, il en est bien sûr de même pour η d'après (5.7). Pour déterminer la classe $\bar{\eta}$ de η dans $\Omega^2(\widehat{\mathcal{H}})$, on remarque successivement que :

a) $\bar{\omega} = \Psi^* \sigma$ dans $\Omega^2(\mathcal{S}_\Gamma)$ puisque Ψ est un morphisme de Poisson (voir

3.2) ;

b) $\overline{\varphi^* H^* \omega} = (\widehat{h^* \Psi})^* h^* \sigma$ dans $\Omega^2(\widehat{\mathcal{H}}_\Gamma)$ par commutativité du diagramme (5.6) ;

c) $\overline{Q_* \varphi^* H^* \omega} = (\widehat{h^* \Psi})^* q_* h^* \sigma$ dans $\Omega^2(\widehat{\mathcal{H}}_\Gamma)$ d'après (5.7).

La conclusion provient alors du fait que, puisque la section s est elle aussi feuilletée, on a :

$$s^*(\widehat{h^* \Psi})^* q_* h^* \sigma = q_* h^* \sigma. \blacksquare$$

(5.9) Démonstration du théorème 5.1

La forme symplectique \mathcal{S} -feuilletée σ sur $\Pi_1(\mathcal{S}_0)$ étant définie par $\sigma = \alpha_0^* \sigma_0 - \beta_0^* \sigma_0$, la commutativité de 5.6 donne l'égalité

$$(5.9.1) : \quad q_* h^* \sigma = (\alpha_0^* - \beta_0^*) h_0^* \sigma_0 \in \Omega^2(\widehat{\mathcal{H}}).$$

Par construction de $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$ (voir (4.1)) l'application

$$\begin{aligned} \lambda : \Delta_0 &\longrightarrow \Delta_0 \times \Delta_0 \\ (x, t) &\longmapsto ((x, t), (1, t)) \end{aligned}$$

est à valeurs dans $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$ et définit une section feuilletée de α_0 telle que :

$$\begin{aligned} (\beta_0 \circ \lambda)(\Delta_0) &= \{1\} \times [0, 1], \text{ et donc} \\ (\beta_0 \circ \lambda)^* : \Omega^2(\mathcal{H}_0) &\rightarrow \Omega^2(\mathcal{H}_0) \end{aligned}$$

est l'application nulle. Appliquée à (5.9.1), il vient

$$\lambda^* q_* h^* \sigma = \lambda^* (\alpha_0^* - \beta_0^*) h_0^* \sigma_0 = h_0^* \sigma_0$$

et donc $\overline{\lambda^* \eta} = h_0^* \sigma_0 \in \Omega^2(\mathcal{H}_0)$, ce qui démontre le théorème puisque η est fermée d'après (5.8). \blacksquare

On aboutit au résultat final annoncé :

(5.10) THÉORÈME. Si (P_0, Λ_0) est intégrable, tout cycle évanouissant cohérent h_0 est symplectiquement trivial.

Démonstration. Comme on l'a remarqué en 4.2, l'espace total de $\text{Hol}(\mathcal{H}_0)$ est contractile et donc la 2-forme fermée $\lambda^* \eta$ introduite en 5.9 est exacte, $\lambda^* \eta = d\chi$, avec $\chi \in \Omega^1[\text{Hol}(\mathcal{H}_0)]$. D'après le théorème de Stokes, l'aire $A(h_0)$ de h_0 est définie par

$$A(h_0)(t) = \int_{D_t^2} \lambda^* \eta = \int_{\partial D_t^2} \chi \text{ pour } t \in]0, 1] \text{ avec } D_t^2 = D^2 \times \{t\},$$

donc se prolonge en une fonction différentiable sur $[0, 1]$; ce qui démontre

le théorème. ■

(5.11) Applications

En appliquant (5.10) aux exemples décrits en (4.5), on voit que

i) le feuilletage $(\Delta_0, \mathcal{H}_0)$ peut être aussi bien le support de structures de Poisson intégrables que d'autres non intégrables ;

ii) par contre si (P_0, Λ_0) est une structure de Poisson régulière sur une variété compacte de dimension 3 et si son feuilletage caractéristique \mathcal{S}_0 admet un cycle évanouissant non trivial, alors Λ_0 n'est pas intégrable (voir [LV₂]), quand bien même les obstructions précédemment introduites en [D₂] et [AH] sont nulles puisque le feuilletage caractéristique est sphérique. ■

References

- [AD] ALBERT C.-DAZORD P.: *Groupoïdes de Lie et groupoïdes symplectiques*, in "Symplectic Geometry, groupoids and integrable systems". MSRI-LN 20 (1991), 1-12.
- [ADH] ALCALDE-CUESTA F.-DAZORD P.-HECTOR G.: *Sur l'intégration symplectique de la structure de Poisson singulière $\Lambda = (x^2 + y^2) \partial/\partial x \wedge \partial/\partial y$* , Publ. Matemàtiques, Barcelona, 33 (1989), 411-415.
- [AH] ALCALDE-CUESTA F.-HECTOR G.: *Une caractérisation des variétés de Poisson régulières sans cycle évanouissant qui sont intégrables* (en cours de préparation).
- [Ar] ARNOLD V.: *Méthodes Mathématiques de la Mécanique classique*. Ed. MIR, Moscou (1976).
- [CDW] COSTE A.-DAZORD P.-WEINSTEIN A.: *Groupoïdes symplectiques*, Publ. Dept. Math. Lyon, 2/A(1978).
- [D] DAZORD P.: 1. *Réalisations Isotropes de Libermann*, Travaux du S. S. R. G. III, Publ. Dept. Math. Lyon, 4/B (1988), 1-49.
2. *Groupoïdes symplectiques et Troisième Théorème de Lie*, In "Géométrie Symplectique et Mécanique", Springer L. N., 1416 (1990), 39-74.
- [DD] DAZORD P.-DELZANT T.: *Le problème général des variables actions-angles*, J. Diff. Geometry 26 (1987), 223-251.
- [DH] DAZORD P.-HECTOR G.: *Intégration symplectique des variétés de Poisson totalement sphériques*, in "Symplectic Geometry, groupoids and integrable systems" MSRI-LN 20 (1991), 37-72.
- [Do] DORFMAN I.: *Deformation of hamiltonian structures and integrable systems*, Non linear and turbulent processes in physics, vol.3, Proceedings of the second international workshop on nonlinear and turbulent processes in physics, Kiev USSR, 19-25 Octobre 1983, 1313-1318.
- [DS] DAZORD P.-SONDAZ D.: *Variétés de Poisson-Algèbroïdes de Lie*, in "Symplectic Geometry, groupoids and integrable systems" MSRI-LN 20 (1991), 99-128.
- [HMS] HECTOR G.-MACIÀS E.-SARALEGI M.: *Lemme de Moser feuilleté et classification des variétés de Poisson régulières*, Publ. Matemàtiques, Barcelona, 33(1989), 423-430.

- [KA] KARASEV M. V.: *Analogies of the objects of Lie group theory for non linear Poisson brackets*, Math. USSR Izvestiya 28, **3** (1987), 497-527.
- [Ki] KIRILLOV A.: *Local Lie algebras*, Russian Math. Surveys **31** (2), (1976), 55-75.
- [Ko] KOSZUL J. L.: *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, in "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui", Astérisque hors série (1985), 257-271.
- [Li] LICHNEROWICZ A.: *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geometry **12** (1977), 253-300.
- [LM] LIBERMANN P.-MARLE C. M.: *Géométrie symplectique : base théorique de la mécanique*, Publ. Math. Université Paris VII.
- [LV] LASSO DE LA VEGA C.: 1. *Groupeïde fondamental et groupeïde d'holonomie de certains feuilletages réguliers*, Publ. Matemáticas, 33, **3** (1989), 431-443.
2. *Intégration de certaines variétés de Poisson de dimension 3*, Thèse, Bilbao (1990).
- [MM] MAGRI F.-MOROSI C.: *A geometrical characterization of integral hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, Quaderno S **19** (1986), Università di Milano.
- [N] NOVIKOV S. P.: *Topology of foliations*. Trudy Mosk. Math. Obsch. **14** (1965), 248-278. Trans. Moscow Math. Soc. 268-304.
- [Pa] PALAIS R. S.: *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mémoires AMS, **22** (1957).
- [Ph] PHILLIPS J.: *The holonomy imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold*, Rocky Mountain J. Math., **17** (1987), 151-165.
- [Pr] PRADINES J.: 1. *Théorie de Lie pour les groupeïdes différentiables (I)*; C. R. Acad. Sc. Paris **263**, (1966), 907-910.
2. *Théorie de Lie pour les groupeïdes différentiables (II)*; C. R. Acad. Sc. Paris **263**, (1967), 245-248.
3. *Troisième Théorème de Lie pour les groupeïdes différentiables*, C. R. Acad. Sc. Paris **267** (1968).
4. *How to define the differentiable graph of a singular foliation*, Cahiers Top. & Géom. Diff. XXVI-4 (1985).
- [So] SOURIAU J. M.: *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris (1969).
- [St] STEFAN P.: *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. **29** (1974).
- [W] WEINSTEIN A.: 1. *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry **18**, (1983), 523-557 et **22** (1985), 255.
2. *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), 101-103.
3. *Coisotropic Calculus and Poisson groupoids*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 705-727.

URA CNRS n° 746-GDR 144
 Institut de Mathématiques et Informatique
 Université Claude Bernard-Lyon I
 43, boulevard du 11 Novembre 1918
 69622 VILLEURBANNE CEDEX