

Lemmes de Multiplicités et T -Modules

LAURENT DENIS

1. Motivations

Yu a démontré dans [Y5] un lemme de multiplicités et l'analogue du théorème du sous-groupe linéaire de G. Wüstholz (résultats également annoncés dans [Y6]) sur des T -modules apparaissant dans la théorie d'Anderson [A]. Ce lemme a de nombreux et importants corollaires en particulier quand on l'applique à des problèmes de transcendance en caractéristique finie.

Outre les résultats sur l'analogue du théorème de Baker pour les combinaisons linéaires de logarithmes de points algébriques sur les modules de Drinfeld et l'obtention des relations de dépendance linéaire à coefficients algébriques entre valeurs de la fonction zéta de Carlitz obtenu par Yu dans [Y5], ce résultat fut aussi utilisé pour prouver l'indépendance algébrique de nombres naturellement associés aux modules de Carlitz et de Drinfeld (voir [BBT]; D_i ($1 \leq i \leq 6$), T_j ($1 \leq j \leq 2$)).

Un usage multihomogène du résultat de Yu est également fait dans [D6] et [D7]. Bien que la preuve de ce dernier résultat (voir précisions au paragraphe 2) se déduise implicitement de la démonstration donnée dans [Y5], il convient de donner un énoncé général recouvrant toutes les applications actuelles. C'est ce que nous ferons ici.

On raffine également l'énoncé de [Y5] dans deux autres directions. Tout d'abord le progrès fait par Philippon dans [P3] dans le décompte des multiplicités est ici adapté: un $m!$ (où m désigne la dimension du sous-groupe analytique suivant lequel on dérive) est enlevé dans l'énoncé du lemme de multiplicités. Ensuite on prouve que le sous- T -module obstruteur dont le degré minore celui du polynôme de départ est contenu dans la variété des zéros de ce même polynôme. On en profitera aussi pour voir que certaines des hypothèses portant sur les T -modules eux-mêmes ne sont pas nécessaires à la preuve d'un lemme de multiplicités convenable pour les applications notamment transcendentes. A titre d'illustration, l'énoncé obtenu sera utilisé au paragraphe 3 pour prouver un résultat d'indépendance algébrique entre divers points attachés à des modules de Drinfeld. Ce dernier résultat prolonge un résultat de [D6].

Nous allons commencer par préciser les objets avec lesquels nous travaillerons.

On désigne par $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p , par $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$ -adique v , que l'on prolonge à une clôture algébrique $\bar{k}$ (resp. $\bar{k}_\infty$) de k (resp. k_∞). On considérera encore C le complété algébriquement clos de $\bar{k}_\infty$. On notera $|\alpha| = q^{-v(\alpha)} = q^{d(\alpha)}$, la valeur absolue d'un élément de C .

Une définition des T -modules différente de celle de [A; AT; Y4; Y6; D2] est adoptée. Essentiellement cette définition est là pour préciser dans quel cadre, on peut introduire les outils semblant nécessaires à la preuve du lemme de multiplicités.

DÉFINITION 1. Par T -module de dimension n , on entend la donnée d'un couple $E = (G_a^n, \Phi)$ où G_a^n désigne le groupe additif de dimension n et Φ un homomorphisme injectif d'anneaux de A dans l'anneau $C\{F\}$ des endomorphismes de G_a^n vérifiant:

$$\Phi(T) = a_0 F^0 + \cdots + a_d F^d,$$

où les a_i ($0 \leq i \leq d$) sont des matrices $n \times n$ à coefficients dans C avec $a_d \neq 0$, et F est l'endomorphisme de Frobenius sur G_a^n . Ainsi $\Phi(T)$ est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $C\{\tau\}$ où τ est le Frobenius sur G_a . Par la suite le T -module E sera souvent confondu avec l'application $\Phi(T)$ qui le définit.

Un sous- T -module H de E sera un sous-groupe algébrique connexe de G_a^n vérifiant $\Phi(T)(H) \subset H$.

On va distinguer les deux types de T -modules (a) et (b) suivants:

- (a) $\Phi(T)$ est triangulaire supérieure en tant que matrice de $M_n(C\{\tau\})$.
- (b) $\Phi(T)$ est triangulaire inférieure en tant que matrice de $M_n(C\{\tau\})$.

NOTATION. Dans la suite on se place sur le T -module Φ de dimension n de la forme $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \Phi_3$ où Φ_i est de dimension n_i et Φ_1 est quelconque, Φ_2 de type (a), Φ_3 de type (b).

Posons quelques définitions afin d'énoncer notre principal résultat.

DÉFINITION 2. Un homomorphisme analytique à m paramètres est une application $\mathbb{F}_q$ -linéaire $\Psi: C^m \rightarrow C^n$ telle que:

- (i) Il existe $A_0 \in M_m(C)$ telle que: $\Psi(A_0 z) = \Phi(T)\Psi(z)$, pour tout $z \in C^m$.
- (ii) On a un développement de Taylor à l'origine:

$$\Psi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_h z^{q^h}$$

où les $\beta_h \in M_{n \times m}(C)$, et pour toute matrice B , B^{q^h} est la matrice obtenue en élevant à la puissance q^h chacun de ses coefficients.

- (iii) Etant donné un tel homomorphisme analytique Ψ et un polynôme Q en n variables sur G_a^n , on dira que Q s'annule à un ordre au moins M en x_0 le long de Ψ si pour tout $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m)$ tel que $|\mathbf{j}| \leq M$ on a $\Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi} Q(x_0) = 0$, où les hyperdérivées sont définies par:

$$Q(x + \Psi(z)) = \sum \Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi} Q(x) z^{\mathbf{j}}.$$

la somme portant sur tous les éléments $\mathbf{j}$ de $\mathbb{N}^m$.

On suppose que pour la base canonique $(e_1, \dots, e_m)$ de C^m , les hyperdérivées $\Delta_{e_i}^{\Psi}$ ($1 \leq i \leq m$) (le multi-indice correspondant à e_i est $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i -ième position) forment une base de l'espace des dérivations. Cette condition est clairement équivalente au fait qu'une sous-matrice $m \times m$ de β_0 soit inversible.

Pour tout T -module H on note encore $r(\Psi, H)$ la codimension analytique de $\Psi^{-1}(H)$ (voir sa définition au paragraphe 2). Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ des éléments donnés dans C^n et pour tout entier $S \geq 0$,

$$\Gamma(S) = \{\Phi(a_1)\gamma_1 + \dots + \Phi(a_s)\gamma_s \mid a_i \in A, d(a_i) \leq S\}.$$

On prouve alors:

THÉOREME 1. *Soit P un polynôme sur G_a^n de multidegré $\leq (K, \dots, K, K_1, \dots, K_{n_2}, L_1, \dots, L_{n_3})$ où K est pris n_1 fois. On suppose que la suite K_i est croissante et que la suite L_j est décroissante. Si P est non identiquement nul et s'annule à un ordre $\geq nM + 1$ le long de Ψ en tout point de $\Gamma(S + n)$ alors il existe un réel positif $c(q, n, d)$ et un sous- T -module H de $\Phi(T)$ différent de G_a^n tel que:*

$$\begin{aligned} M^{r(\Psi, H)} \text{Card}(\Gamma(S) + H/H) \mathcal{H}(H; K, \dots, K, K_1, \dots, K_{n_2}, L_1, \dots, L_{n_3}) \\ \leq c(q, n, d) K^{n_1} (K_1 \cdots K_{n_2}) (L_1 \cdots L_{n_3}). \end{aligned}$$

De plus le sous-groupe $H + \Gamma(S)$ est contenu dans la variété des zéros de P . ($\mathcal{H}(H; \dots)$ désignant la fonction de Hilbert de H en les degrés correspondants [P1, §3]).

REMARQUE. On peut choisir $c(q, n, d) = n^{n^2} q^{n^2 d}$ dans l'énoncé précédent.

Au paragraphe 2, nous prouvons ce résultat. Au paragraphe 3, quelques exemples et une application sont donnés.

2. Preuve du Lemme de Multiplicités

Pour la commodité du lecteur, énonçons sous forme de lemme le résultat clair suivant:

LEMME 1. *Soit $\Phi(T) = b_0 F^0 + b_1 F^1 + \dots + b_d F^d$ un T -module de G_a^n , tel que $\Phi(T)$ soit une matrice triangulaire inférieure de $C(\{\tau\})$ et P un polynôme de $C[X_1, \dots, X_n]$ de multidegré $\leq (U_1, \dots, U_n)$. Le polynôme $P \circ \Phi(T)$*

est de multidegré $\leq q^d(U_1 + \dots + U_n, U_2 + \dots + U_n, \dots, U_n)$ et si de plus la suite U_i est décroissante, ce multidegré est plus petit que $nq^d(U_1, \dots, U_n)$.

Afin d'avoir une estimation plus fine que dans [Y5] des multiplicités, nous utiliserons un cas particulier des résultats de [P3]. On rappelle que Ψ est un homomorphisme à m paramètres et on identifie C^m à un sous-espace vectoriel fixé de C^n . Considérons une variété algébrique V de C^n , son espace tangent W_x en un point x de V et l'espace vectoriel $C^m/(W_x \cap C^m)$. Pour x en dehors d'un fermé de Zariski inclus strictement dans V sa dimension est maximale et indépendante de x et sera notée $r(\Psi, V)$ (voir [P2, p. 8]). On note $e_1, \dots, e_r$ une base de cet espace et ∂_i ($1 \leq i \leq r$) les opérateurs de dérivation correspondants. Après un éventuel changement de base, on peut supposer que les coordonnées de e_i sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i -ième position.

On vérifie que pour tout tel x de C^n , d'idéal de définition m on a $\Delta_{e_i}^\Psi(m^2) \subset m$ et donc que l'opérateur $\Delta_{e_i}^\Psi$ définit un élément non nul de $\text{Hom}(m/m^2, C)$ (espace tangent en x). La condition (iii) du paragraphe 1 entraîne qu'il existe une matrice $B \in \text{GL}_r(C)$ telle que $(\Delta_{e_1}^\Psi, \dots, \Delta_{e_r}^\Psi) = (\partial_1, \dots, \partial_r)B$.

Si maintenant $\mathfrak{p}$ est l'idéal de définition de V , l'application:

$$\mathfrak{p} \rightarrow (C[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p})^{r(\Psi, V)}$$

$$Q \rightarrow (\Delta_{e_1}^\Psi(Q), \dots, \Delta_{e_r}^\Psi(Q))$$

est de rang $r(\Psi, V)$ car l'application $Q \rightarrow (\partial_1(Q), \dots, \partial_r(Q))$ est de rang $r(\Psi, V)$ (voir le Lemme 6 de [P2]).

Considérons maintenant $\mathfrak{g}$ l'idéal de définition de G_a^n plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}^s$ et $A = C[X_1, \dots, X_s]/(\mathfrak{g})$.

Rappelons que si $\mathfrak{J}$ est un idéal de A engendré par des polynômes $(P_1, \dots, P_u)$, et si $\mathbf{j}$ désigne un multi-indice alors l'idéal $\Delta_{\mathbf{j}}^\Psi(\mathfrak{J})$ est l'idéal engendré par la famille des polynômes $\Delta_{\mathbf{i}}^\Psi(P_v)_{1 \leq v \leq u, \mathbf{i} \leq \mathbf{j}}$ (où $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$ si la k -ième composante de $\mathbf{i}$ est inférieure à la k -ième composante de $\mathbf{j}$). On dit encore qu'un sous-schéma X passe par un point γ à un ordre $\geq \mathbf{j}$ si l'idéal associé à X est défini par des polynômes passant par γ à un ordre $\geq \mathbf{j}$.

Dans notre situation, le Lemme 7 de [P3] s'écrit alors:

LEMME 2. *Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A , $\mathfrak{p}$ un premier associé minimal définissant une variété V , $A_{\mathfrak{p}}$ le localisé en $\mathfrak{p}$. On suppose que pour tout multi-indice $\mathbf{j}$ vérifiant $|\mathbf{j}| \leq M$, $\Delta_{\mathbf{j}}^\Psi(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{p}$. La multiplicité de Samuel relativement à $\mathfrak{J}A_{\mathfrak{p}}$ est alors minorée suivant la formule:*

$$e_{\mathfrak{J}A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \geq M^{r(\Psi, V)}.$$

REMARQUE. Cette utilisation du [P3, Lemme 7] pourrait être remplacée par celle de l'analogue du lemme de Wüstholz ([P1], [P2], ou [Y5]), la seule conséquence serait l'obtention d'un facteur $\binom{r(\Psi, V) + M}{M}$ dans l'inégalité finale du Théorème 1 en remplacement du $M^{r(\Psi, V)}$ obtenu ici.

Pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de A , notons son rang $rg(\mathfrak{J})$. Rappelons alors le Lemme 5 de [P3]:

LEMME 3. *Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A engendré par des polynômes homogènes de degré $\leq D$ et $r \geq rg(\mathfrak{J})$, alors on a:*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Ass } \mathfrak{J} \\ \text{minimal } rg(\mathfrak{p}) = r}} e_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \deg \mathfrak{p} \leq \deg g D^r.$$

On reprend la notation $\Gamma(S)$ du Théorème 1, on prouve alors le lemme suivant:

LEMME 4. *Soit $Q \in C[X_1, \dots, X_n]$ passant par $\Gamma(S+1)$ à un ordre $\geq M$ alors le polynôme $Q \circ \Phi(T)$ passe par $\Gamma(S)$ à un ordre $\geq M$.*

Preuve. Par hypothèse pour tout x appartenant à $\Gamma(S+1)$ on a:

$$Q(x + \Psi(z)) = \sum_{|j| \geq M+1} \Delta_j^\Psi Q(x) z^j.$$

En particulier si y est dans $\Gamma(S)$, on peut appliquer l'égalité précédente à $\Phi(T)y$. Par conséquent grâce à (i) et en changeant z en $A_0 z$:

$$Q \circ \Phi(T)(y + \Psi(z)) = \sum_{|j| \geq M+1} \Delta_j^\Psi Q(x) (A_0 z)^j.$$

Comme le développement du polynôme $(A_0 z)^j$ ne fait apparaître que des polynômes de degré $i \geq j$, le lemme est bien démontré. $\square$

Passons maintenant à la preuve du Théorème 1, qui s'inspire de celles de [P1] et de [Y5]:

Preuve du Théorème 1. Soit $\Gamma(S)$ et P satisfaisants aux hypothèses du Théorème 1. Pour tout polynôme $Q(X)$ on note $Z(Q(X))$ le sous-schéma des zéros de Q . Pour i entier naturel tel que $0 \leq i \leq n-1$, on considère la suite décroissante de sous-schémas:

$$X_i := \bigcap_{\gamma \in \Gamma(S+n), j \leq iM} Z(\Delta_j^\Phi[P(X-\gamma)]).$$

Ces sous-schémas passent toujours par le groupe $\Gamma(S+n)$ à un ordre $\geq M+1$ le long de Ψ . Appelons d_r le maximum des dimensions des composantes de X_r passant par 0. Comme la translation est un isomorphisme analytique et que X_i est globalement stable par translation par les éléments de $\Gamma(S+n)$, d_i est aussi le maximum des dimensions des composantes de X_i passant par au moins un élément de $\Gamma(S+n)$. Comme X_0 est de codimension ≥ 1 , que la suite d_i est décroissante, il existe un entier $r < n$ tel que $d_r = d_{r+1}$ et une variété V de dimension d_r composante irréductible commune à X_r et X_{r+1} et qui passe par 0. Soit $W = \{g \in G_a^n \mid g + V \subset X_r\}$. Comme chaque X_i est stable par translation par un élément du groupe $\Gamma(S+n)$, on a que $\Gamma(S+n)$ appartient à W qui contient également le stabilisateur $G_V := \bigcap_{x \in V} (V - x)$ de V .

Comme X_r ne contient qu'un nombre fini de sous-variétés composantes de dimension d_r , W est une union finie de classe modulo G_V qui comprennent notamment celles de $\Gamma(S+n)+G_V$. De même W est une union finie de translatés de la composante neutre G_V^0 de G_V . Soit u le plus petit entier tel que $Y_u := W \cap \Phi(T)^{-1}(W) \cap \dots \cap \Phi(T^u)^{-1}(W)$, soit de même dimension que Y_{u+1} . D'après le Lemme 4, et comme $u \leq n-1$, Y_u passe encore par $\Gamma(S)$ à l'ordre $M+1$.

Deux translatés d'un même groupe étant soit disjoints soit confondus, Y_u et Y_{u+1} sont des unions finies (par noethérianité) non vide de translatés du groupe $H' = G_V^0 \cap \Phi(T)^{-1}(G_V^0) \cap \dots \cap \Phi(T^{u+1})^{-1}(G_V^0)$. Choisissons enfin pour H la composante neutre de H' . Comme $\Phi(T)Y_{u+1} \subset Y_u$, le groupe connexe $\Phi(T)H$ qui passe par l'origine est inclus dans Y_u . Le seul translaté de H passant par l'origine étant égal à H on en déduit que $\Phi(T)H \subset H$. Par conséquent H est un sous- T -module de G_a^n . Le groupe $H + \Gamma(S)$ est inclus dans $G_V^0 + \Gamma(S)$ qui est lui même contenu dans X_r et donc dans l'ensemble des zéros de P . On a donc prouvé la seconde assertion du Théorème 1.

Par construction si J_r est l'idéal associé à X_r , on a pour tout $\mathbf{j}$ tel que $|\mathbf{j}| \leq M$, $\Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi}(J_r) \subset J_{r+1} \subset \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est l'idéal de définition de V . On déduit de là que si J désigne l'idéal de définition de W alors pour tout $\mathbf{j}$ tel que $|\mathbf{j}| \leq M$, $\Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi}(J) \subset J \subset \mathfrak{p}'$ où $\mathfrak{p}'$ est l'idéal de définition de G_V^0 . Enfin, si R est l'idéal de définition de Y_u on en tire aussi $\Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi}(R) \subset R \subset \mathfrak{p}''$ où $\mathfrak{p}''$ est l'idéal de définition de H . Ce fait est aussi valable pour tous les translatés de H par les éléments de $\Gamma(S)$.

Le nombre de classes de H dans Y_u est au moins égal à $\text{Card}(\Gamma(S) + H/H)$. De plus Y_u est incomplètement défini par des polynômes de la forme

$$\Delta_{\mathbf{j}}^{\Psi}P(X-\gamma) \circ \Phi(T^i),$$

$i \leq u$ dont le multidegré est $\leq n^n q^{nd}$ fois le multidegré du polynôme de départ.

Il reste alors à appliquer Bezout multihomogène et les lemmes de Philippon pour conclure. Plus précisément, on plonge naturellement toutes nos variétés dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ puis par un plongement de Segre-Veronese dans $\mathbb{P}^N$ de telle sorte que le degré de l'image d'une variété V soit la fonction de Hilbert de V en le multidegré du polynôme de départ P (cf. e.g. [P3, §7]). On déduit du Lemme 1 que H est incomplètement défini dans par des formes de degré $\leq n^n q^{nd}$. On applique alors les Lemmes 2 et 3 à chaque composante de Y_u pour obtenir l'inégalité:

$$\begin{aligned} M^{r(\Psi, H)} \text{Card}(\Gamma(S) + H/H) \mathcal{H}(H; K, \dots, K, K_1, \dots, K_{n_2}, L_1, \dots, L_{n_3}) \\ \leq n^{n^2} q^{n^2 d} K^{n_1}(K_1 \cdots K_{n_2})(L_1 \cdots L_{n_3}), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé (on vérifie que le terme de droite est la fonction de Hilbert de la clôture de G_a^n). $\square$

3. Application

A

Les exemples principaux d'homomorphismes analytiques seront donnés par l'existence d'une application exponentielle pour le T -module considéré.

La Proposition 1 ci-dessous établit l'existence d'homomorphismes analytiques à m -paramètres sous l'hypothèse que les conditions suivantes soient satisfaites. Considérons $\Phi(T) = a_0 F^0 + \dots + a_d F^d$, un T -module de dimension n . On impose deux conditions:

- (a) a_0 est triangulaire supérieure,
- (b) sa diagonale $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vérifie $d(\alpha_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout couple d'entiers naturels a, b on a :

$$q^a d(\alpha_i) = q^b d(\alpha_j) \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j \text{ et } a = b.$$

PROPOSITION 1. *Un T -module vérifiant les conditions imposées à $\Phi(T)$ possède une exponentielle.*

Preuve. L'exponentielle e_Φ d'un T -module doit vérifier pour tout z dans C^n :

- (i) $e_\Phi(a_0 z) = \Phi(T) e_\Phi(z)$.
- (ii) $e_\Phi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} E_h z^{q^h}$ avec $E_0 = I_n$ et $E_h \in M_{n \times n}(C)$.

La preuve s'inspire de celle de [A, Prop. 2.1.4]. Si $W = (w_{i,j}) \in M_n(C)$ on notera $d(W) := \max(d(w_{i,j}))$.

Comme pour tout entier i entre 1 et n , $d(\alpha_i) > 0$, il existe un plus petit entier h_0 tel que pour tout couple (i, j) , $q^{h_0} d(\alpha_i) > d(\alpha_j)$. On désigne alors par $\gamma := \min_{1 \leq i \leq n} d(\alpha_i)$.

Montrons d'abord qu'à tout entier naturel $h \geq 1$, et à toute matrice carrée $Y \in M_n(C)$ sont associés une unique matrice $X \in M_n(C)$ telle que:

- (i) $X a_0^{q^h} - a_0 X = Y$;
- (ii) Les coefficients de X sont dans le corps engendré sur k par ceux de Y et ceux de a_0 ;
- (iii) Si $h \geq h_0$ alors $d(X) \leq d(Y) - q^h \gamma$.

Décrivons l'inconnue $X := (x_{i,j})$ par ses vecteurs colonnes $x_1, \dots, x_n$ et ses vecteurs lignes $(z_1, \dots, z_n)$, et posons aussi $Y := (y_{i,j})$.

Les formules de multiplication des matrices montrent que les colonnes de $X a_0^{q^h}$ sont de la forme $(\alpha_1^{q^h} x_1, \alpha_2^{q^h} x_2 + f_2, \dots, \alpha_n^{q^h} x_n + f_n)$ où les composantes de f_i se calculent en fonction des coefficients de a_0 et de x_t pour $t < i$. De même, $a_0 X$ a pour lignes $(\alpha_1 y_1 + g_1, \dots, \alpha_{n-1} y_{n-1} + g_{n-1}, \alpha_n y_n)$ où g_i se calcule grâce aux y_t pour $t > i$. Les hypothèses sur les α_i entraînent en particulier que $\alpha_i^{q^h} - \alpha_j$ est toujours non nul.

Le coefficient $x_{n,1}$ est alors déterminé par la relation $(\alpha_1^{q^h} - \alpha_n) x_{n,1} = y_{n,1}$. Par récurrence si $i < n$, $x_{i,j}$ se déduit alors de $x_{u,v}$ avec $u \geq i+1$, $v \leq j$ et $x_{n,j+1}$ se déduit de $x_{u,v}$ pour $u \leq n$ et $v \geq j$. Ceci prouve (i) et (ii). La démonstration précédente montre de plus que $d(X) \leq d(Y) - \min_{(i,j)} d(\alpha_i^{q^h} - \alpha_j)$. L'hypothèse sur la matrice α implique en particulier que $d(\alpha_i^{q^h} - \alpha_j) = \max(d(\alpha_i^{q^h}), d(\alpha_j))$, d'où (iii) pourvu que $h \geq h_0$. $\square$

On peut alors construire notre exponentielle. D'après son équation fonctionnelle, ses coefficients doivent vérifier pour $h \geq 1$:

$$E_h a_0^{q^h} - a_0 E_h = \sum_{j=1}^{\min(h,d)} a_j E_{h-j}^{q^j}.$$

La construction précédente montre que chaque E_h est uniquement déterminé et que si $h \geq h_0$ et si on pose $b_h = q^{-h}d(E_h)$ on a alors:

$$b_h \leq \max_{1 \leq j \leq \min(h, d)} [b_{h-j} + q^{-h}d(a_j)] - \gamma.$$

Comme γ est strictement positif, il vient que b_h tend vers $-\infty$ et donc que $e_\Phi(z)$ est une série entière.

EXEMPLES. (1) Les T -modules considérés jusqu'à présent avaient T sur la diagonale et satisfaisaient les conditions précédentes.

(2) Les T -modules de [D7] vérifient également ces conditions et sont aussi de type (a) (voir paragraphe 1) et cette distinction est nécessaire dans le lemme de multiplicités utilisé dans [D7].

(3) En caractéristique $\neq 2$, on peut autoriser des T -modules ayant T ou T^2 sur la diagonale du terme a_0 . Ces T -modules apparaissent naturellement après les questions posées dans [D4].

Ainsi si W est un sous-espace vectoriel de C^n stable par $a_0 := d\Phi(T)$ alors la restriction à W de l'exponentielle du T -module déterminé par $\Phi(T)$ est un homomorphisme analytique à $\dim(W)$ paramètres. La remarque précédente contient sans doute des énoncés de transcendances potentiels.

Nous allons terminer maintenant en donnant un exemple d'application du lemme de multiplicités à un résultat d'indépendance algébrique. Ce résultat complète le Théorème 2 de [D6].

B

Le module de Carlitz est le T -module de dimension 1 défini par: $\Phi_C(T) = TF^0 + F$. Il existe alors une unique fonction exponentielle $e(z)$, caractérisée par (cf. [C]):

$$e(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{q^h}}{D_h}.$$

Rappelons aussi qu'il existe un élément $\pi \in k_\infty$ tel que

$$\text{Ker } e(z) = A(T - T^q)^{1/(q-1)}\pi$$

(cf. [C]). On posera $\hat{\pi} = (T - T^q)^{1/(q-1)}\pi$.

On note dorénavant par $'$ l'unique dérivation prolongeant continûment la dérivation d/dT de k à la clôture séparable k_∞^s de k_∞ . On notera encore k^s la clôture séparable de k .

On peut également définir la dérivée n -ième de l'exponentielle par rapport à T : elle est obtenue en dérivant terme à terme les coefficients de la série entière $e(z)$ (cf. [D2]). Pour $1 \leq n \leq p-1$, on trouve la dérivée d'ordre n non nulle:

$$e^{(n)}(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(n!)z^{q^h}}{[h]^n D_h}.$$

Notons qu'on obtient $e^{(p)}(z) = 0$ et rappelons que ces fonctions dérivées ont une interprétation en terme de fonctions quasi-périodiques attachées à certains

modules de Drinfeld (voir [D7] où il est prouvé en particulier que chaque fonction $[e^{(a)}(z^p)]^{1/p}$ pour $0 \leq a \leq p-1$ est une fonction quasi-périodique).

Le théorème suivant a été prouvé dans [D6]:

THÉORÈME A. *On suppose $p \geq 5$.*

(a) *Soient $\alpha, \beta \in \bar{k}_\infty$ linéairement indépendants sur k , alors:*

$$\deg_k \operatorname{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), \dots, e^{(4)}(\alpha), e(\beta), \dots, e^{(4)}(\beta)) \geq 2.$$

(b) *Soient $\alpha, \beta \in k_\infty^S$ linéairement indépendants sur k , alors:*

$$\deg_k \operatorname{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e'(\alpha), e(\beta), e'(\beta)) \geq 2.$$

On suppose dorénavant que $p = 3$ et on cherche à retrouver les résultats précédents. Ici les dérivées d'ordre ≥ 3 sont identiquement nulles, nous allons partiellement palier cette difficulté en introduisant d'autres fonctions.

L'équation fonctionnelle de l'exponentielle est:

$$e(Tz) = Te(z) + e(z)^q.$$

En itérant cette identité et en changeant z en z^3 on obtient:

$$\begin{aligned} e(T^3 z^3) &= T^3 e(z^3) + (T^2 + T^{q+1} + T^{2q}) e(z^3)^q \\ &\quad + (T + T^q + T^{q^2}) e(z^3)^{q^2} + e(z^3)^{q^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Il s'en suit par dérivation:

$$e'(T^3 z^3) = T^3 e'(z^3) + (2T + T^q) e(z^3)^q + e(z^3)^{q^2}, \quad (2)$$

$$e''(T^3 z^3) = T^3 e''(z^3) + 2e(z^3)^q. \quad (3)$$

On pose alors $f(z) = (e(z^3))^{1/3}$, $g(z) = (e'(z^3))^{1/3}$, et $h(z) = (e''(z^3))^{1/3}$. Les coefficients du développement en série de $h(z)$ sont alors dans k . Grâce à la relation (3), la fonction h vérifie de plus l'équation fonctionnelle:

$$h(Tz) = Th(z) + 2f(z)^q,$$

dont chaque terme est dans $k\{\{z\}\}$. On peut donc dériver cette équation. En appelant $i(z) := h'(z)$ la série dont chacun des termes est la dérivée par rapport à T de celle de $h(z)$, on s'aperçoit que $i(z)$ est non nul et il vient:

$$i(Tz) = Ti(z) + h(z) + \frac{2q}{3} g(z)^3. \quad (4)$$

Enfin, cette équation se dérive encore une fois et on obtient une fonction $j(z) := i'(z)$, non nulle et satisfaisant à:

$$j(Tz) = Tj(z) + 2i(z) + \frac{2q}{3} h(z)^3. \quad (5)$$

Nous allons alors prouver un analogue affaibli du Théorème A:

THÉORÈME 2. *On suppose $p = 3$.*

(a) *Soient $\alpha, \beta \in C$ linéairement indépendants sur k , alors:*

$$\deg_k \operatorname{tr}(\alpha, \beta, f(\alpha), f(\beta), g(\alpha), g(\beta), h(\alpha), h(\beta), i(\alpha), i(\beta), j(\alpha), j(\beta)) \geq 2.$$

(b) Soient $\alpha, \beta \in k_\infty^s$ linéairement indépendants sur k , alors:

$$\deg_k \operatorname{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e'(\alpha), e(\beta), e'(\beta), i(\alpha), i(\beta)) \geq 2.$$

Si l'énoncé (a) de ce théorème semble satisfaisant au regard du résultat du Théorème A, le (b) semble plus faible que le (b) de ce même théorème, les problèmes de séparabilité (ou le défaut de composition des opérateurs dérivées divisées) ne permettent pas, de manière évidente, d'enlever directement $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ dans le résultat précédent.

Considérons alors le T -module $\Phi(T) = A_0 F^0 + A_1 F + A_2 F^2 + A_3 F^3$ où:

$$A_0 = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & T \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^{2/3} + T^{(q+1)/3} + T^{2q/3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2T^{1/3} + T^{q/3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et les coefficients des matrices A_2 et A_3 sont donnés par

$$(A_2)_{2,2} = T^{1/3} + T^{q/3} + T^{q^2/3}, \quad (A_2)_{3,2} = 1 \quad \text{et} \quad (A_2)_{i,j} = 0$$

quand $(i, j) \neq (2, 2)$ et $(i, j) \neq (3, 2)$; $(A_3)_{2,2} = 1$ et $(A_3)_{i,j} = 0$ pour les autres indices.

On déduit des équations fonctionnelles (1)–(5) que l'application de C dans C^6 donnée par:

$$\Psi(z) = (z, f(z), g(z), h(z), i(z), j(z))$$

est un homomorphisme à 1 paramètre pour le T -module précédent. Le lemme suivant décrit les sous- T -modules de Ψ , sa démonstration suit la même procédure que le Lemme 4 de [D2]:

LEMME 5. *Les sous- T -modules de $\Phi(T)$ sont ceux qui sont de la forme $0^i \times G_a^{6-i}$ (pour un $0 \leq i \leq 6$), $W \times G_a^2$ où W est un sous- k -espace vectoriel de G_a^4 dont la projection sur la seconde coordonnée est nulle et enfin les sous- k -espaces vectoriels de G_a^6 dont la projection sur la deuxième, quatrième et cinquième coordonnée sont nulles.*

Comme l'a remarqué le referee, le schéma de la preuve du (a) du Théorème 2 est identique à celui de [D6] et est donc laissé au lecteur.

Prouvons alors le (b) du Théorème 2. Pour la commodité du lecteur rappelons les Lemmes 1 et 3 de [D6]:

LEMME B. *Si α, β sont dans k_∞^s et que β est algébrique séparable sur $k^s(\alpha)$ alors β' est algébrique séparable sur $k^s(\alpha, \alpha')$.*

LEMME C. *Soit $\alpha \in k_\infty^s$ tel que α' soit algébrique sur $k(\alpha)$; alors α' est algébrique séparable sur $k(\alpha)$.*

On part de α et β satisfaisant les hypothèses du (b). Les racines cubiques $\alpha^{1/3}$ et $\beta^{1/3}$ sont toujours linéairement indépendantes sur k , le résultat précédent appliqué à ces nombres prouve que:

$$\deg_k \text{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e(\beta), e'(\alpha), e'(\beta), e''(\alpha), e''(\beta), i(\alpha^{1/3}), i(\beta^{1/3}), j(\alpha^{1/3}), j(\beta^{1/3})) \geq 2.$$

Si $\deg_k \text{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e(\beta), e'(\alpha), e'(\beta)) = 1$, et si $e(\alpha) - \alpha$ est transcendant alors l'hypothèse précédente entraîne que $e'(\alpha)$ est algébrique sur $k(e(\alpha) - \alpha)$. Comme $(e(\alpha) - \alpha)' = e'(\alpha)$, le Lemme C montre que $e'(\alpha)$ est algébrique séparable sur $k(e(\alpha) - \alpha)$. Par des dérivations successives, on en déduit à l'aide du Lemme B que $e^{(i)}(\alpha)$ est séparable sur $k(e(\alpha) - \alpha)$. Si maintenant $e(\alpha) - \alpha$ est algébrique, sa dérivée $e'(\alpha)$ l'est également ainsi que toutes les dérivées d'ordre supérieur. Par conséquent dans les deux cas, on obtient:

$$\deg_k \text{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e(\beta), e'(\alpha), e'(\beta), e''(\alpha), e''(\beta)) = 1.$$

Supposons alors qu'on puisse ajouter $i(\alpha^{1/3})$ et $i(\beta^{1/3})$ à cette famille de nombres sans changer le degré de transcendance. Si on arrive à une contradiction, on aura bien prouvé le (b).

On suppose donc:

$$\deg_k \text{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e(\beta), e'(\alpha), e'(\beta), e''(\alpha), e''(\beta), i(\alpha^{1/3}), i(\beta^{1/3})) = 1.$$

Remarquons que $i(\alpha^{1/3}) + (q/3)(\alpha/[1]^2)$ est la dérivée de

$$h(\alpha^{1/3}) - \frac{q}{3} \frac{\alpha}{[1]} = (e''(\alpha))^{1/3} - \frac{q}{3} \frac{\alpha}{[1]}$$

qui est un élément de k_∞^s dès que α l'est (car $e''(z)$ n'a pas de terme en z).

Si $(e''(\alpha))^{1/3} - (q/3)(\alpha/[1])$ est algébrique sur k sa dérivée l'est aussi ainsi que sa dérivée seconde. On peut alors ajouter $j(\alpha^{1/3})$ dans la famille de nombres précédente sans changer le degré de l'extension.

Si $(e''(\alpha))^{1/3} - (q/3)(\alpha/[1])$ est transcendant sur k d'après le Lemme C, $i(\alpha^{1/3}) + (q/3)(\alpha/[1]^2)$ est algébrique séparable sur

$$k\left((e''(\alpha))^{1/3} - \frac{q}{3} \frac{\alpha}{[1]}\right).$$

Le Lemme B entraîne alors que $j(\alpha^{1/3}) - 2(q/3)(\alpha/[1]^3)$ est algébrique sur $k(i(\alpha^{1/3}) + (q/3)(\alpha/[1]^2), (e''(\alpha))^{1/3} - (q/3)(\alpha/[1]))$. Le même raisonnement avec β amène donc à:

$$\deg_k \operatorname{tr}(\alpha, \beta, e(\alpha), e(\beta), e'(\alpha), e'(\beta), e''(\alpha), e''(\beta), \\ i(\alpha^{1/3}), i(\beta^{1/3}), j(\alpha^{1/3}), j(\beta^{1/3})) = 1,$$

c'est la contradiction attendue.

REMARQUE. Dans le cas $p = 2$, un analogue des résultats du (a) peut sans doute être établi par la même méthode, mais les preuves précédentes ne disent rien sur l'analogue d'un (b).

REMERCIEMENTS. L'auteur remercie D. Bertrand et P. Philippon pour d'utiles discussions et tout particulièrement les professeurs P. Philippon et J. Yu pour nous avoir communiqué leur manuscrit [Y5] et [P3] avant publication.

Bibliographie

- [A] G. Anderson, *t-motives*, Duke Math. J. 53 (1986), 457–502.
- [AT] G. Anderson and D. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. (2) 132 (1990), 159–191.
- [BBT] P. G. Becker, W. D. Brownawell, and R. Tubbs, *Gelfond's theorem for Drinfeld modules*, Michigan Math. J. 41 (1994), 219–233.
- [C] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. 1 (1935), 137–168.
- [D1] L. Denis, *Théorème de Baker et modules de Drinfeld*, J. Number Theory 43 (1993), 203–215.
- [D2] ———, *Transcendance et dérivées de l'exponentielle de Carlitz*, Séminaire de théorie des nombres de Paris, pp. 1–22, Birkhauser Boston, Boston, 1993.
- [D3] ———, *Indépendance algébrique sur le module de Carlitz*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 317 (1993), 913–915.
- [D4] ———, *Méthodes fonctionnelles pour la transcendance en caractéristique finie*, Bull. Austral. Math. Soc. 50 (1994), 273–286.
- [D5] ———, *Dérivées d'un module de Drinfeld et transcendance*, Duke Math. J. à paraître.
- [D6] ———, *Indépendance algébrique et exponentielle de Carlitz*, Acta Arith. 69 (1995), 75–89.
- [D7] ———, *Indépendance algébrique en caractéristique deux*, soumis.
- [P1] P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France 114 (1986), 355–383.
- [P2] ———, *Lemmes de zéros en caractéristique quelconque*, Problèmes Diophantiens (D. Bertrand, M. Waldschmidt, eds.), Publ. Math. Univ. Paris VI, 84, Univ. Paris VI, 1987.
- [P3] ———, *Nouveaux lemmes de zéros*, soumis.
- [T1] A. Thiery, *Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld*, The arithmetic of function fields (proceedings of the workshop at Ohio State University) (D. Goss, D. Hayes, M. Rosen, eds.), pp. 265–284, de Gruyter, Hawthorne, NY, 1992.
- [T2] ———, *Théorème de Lindemann–Weierstrass pour les modules de Drinfeld*, Compositio Math. 95 (1995), 1–42.
- [W] L. Wade, *Transcendence properties of the Carlitz Ψ function*, Duke Math. J. 13 (1946), 79–85.

- [Y1] J. Yu, *Transcendence theory over function fields*, Duke Math. J. 52 (1985), 517–527.
- [Y2] ———, *A six exponentials theorem in finite characteristic*, Math. Ann. 272 (1985), 91–98.
- [Y3] ———, *Transcendence and Drinfeld modules: several variables*, Duke Math. J. 58 (1989), 559–575.
- [Y4] ———, *Transcendence and special zeta values in characteristic p* , Ann. of Math. (2) 134 (1991), 1–23.
- [Y5] ———, *Analytic homomorphisms into Drinfeld modules*, Ann. of Math. (to appear).
- [Y6] ———, *Transcendence in finite characteristic*, The arithmetic of function fields (proceedings of the workshop at Ohio State University) (D. Goss, D. Hayes, M. Rosen, eds.), pp. 253–264, de Gruyter, Hawthorne, NY, 1992.

Université Pierre et Marie Curie
4 Place Jussieu
Tour 45-46, 5ième étage
75252 Paris
France

ladenis@ccr.jussieu.fr

