Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XII, Number 4, October 1971
NDJFAM

LA SCIENCE DE LA LOGIQUE

ANTON DUMITRIU

1. *Le problème général de la logique comme système formel* Depuis l'apparition du livre de Frege, *Begriffschrift* (1879), la logique a été transformée dans un système formel ou système déductif. Un tel système est constitué par plusieurs ensembles, comme il suit l'ensemble des:

1. *symboles primitifs*;
2. *termes définis* d'après des règles données;
3. *expressions* formées avec les termes primitifs et les termes définis d'après des règles définies;
4. *formules*, qui sont des expressions gardant toujours une certaine valeur;
5. *axiomes*, qui sont un sous-ensemble des formules;
6. *règles* de déduction.

A l'aide des dernières règles on peut déduire continuellement de nouvelles formules valables dans le système.

Il est évident que ce que nous venons de décrire est un système formel déductif en général. Pour qu'un tel système devienne "la logique" ou "une logique" il faut qu'il soit *interprété* dans ce sens. Supposons qu'on a fait cette interprétation et que nous nous trouvons en face de la logique présentée comme un système formel, comme une science déductive axiomatisée *L*.

Le type de cette science de la logique est le système logique construit par Russell si Whitehead dans les *Principia Mathematica* (vol. I, 1910). Comme ce qui nous intéresse dans ce qui suit est un problème de principe nous n'entrerons pas dans les détails de cette construction.

Une première question, tout à fait générale, qui surgit à propos du système déductif *L* est la suivante: le système *L* est destiné à donner compte de la structure logique et du procès logique de tous les systèmes mathématiques possibles soit T_1, T_2, T_3, . . . , T_n; mais si toute science déductive (considérée sous son aspect axiomatique formel, ou non) a besoin (pour justifier logiquement sa construction mathématique) du système mathématique de la logique *L*, alors le systèms *L* a besoin lui-même d'une

Received September 2, 1969

telle justification. Or il ni y a pas d'autre système qui pourrait donner une telle justification à L. En d'autres termes, le système logique L doit donner la raison de tout système déductif T_1, T_2, ..., T_n, et lui expliquer la structure formelle; mais si la logique L elle-même est un système déductif, alors quelle est le système qui explique la structure de L? Nous nous trouvons donc en face du dilemme suivant: ou bien tout système formel, mathématiquement constitué, a besoin d'une justification logique de son schèma formel et alors la logique comme système formel reste sans nulle justification de ce genre; ou bien il faut accepter le système formel de la logique comme se satisfaisant en soi, et alors on ne voit pas pourquoi les autres systèmes n'ont pas le même droit.

Quoi qu'il en soit, s'il on accepte la construction de la logique de la manière dont elle a été faite par les mathématiciens modernes, elle perd la raison même en vue de laquelle a été constituée.

De l'argumentation précédente, il résulte que pour pouvoir formuler les systèmes déductifs nous avons besoin de la logique, qui doit leur préexister, autrement ils ne peuvent être formulés. Autrement dit, la logique a un caractère de principe: c'est à elle que nous devons nous arrêter, c'est d'elle que nous devons commencer—comme d'un corps de principes, et en se fondant sur ceux-ci on peut construire toute autre science, mais la logique elle-même n'est pas une science du même type.

Cette conclusion sera expliquée dans ce qui suit.

Remarque Il y a des mathématiciens et logiciens de notre époque qui ont saisi cette "circularité" des théories logiques. Sans entrer dans toutes ces discussions, nous mentionnons ici seulement deux noms: Brouwer et Hilbert.

Selon Brouwer, la mathématique est identique à la partie exacte de notre pensée. Par conséquent, dans chaque secteur d'activité, soit scientifique, soit de la vie quotidienne, la pensée exacte est mathématique. Il est par suite impossible que la mathématique ne soit pas impliquée dans la philosophie ou dans toute science, parce qu'elle constitue la pensée exacte et seulement ce qu'il y a d'exact dans ces disciplines. Par conséquent, il est impossible que les mathématiques présupposent l'existence préalable d'une autre science, ni de la philosophie et ni même de la logique, car celles-ci, dans ce qu'elles ont de pensée exacte, supposent la mathématique. Voici ce qu'écrit Heyting textuellement: "Ce serait un cercle vicieux d'employer dans les mathématiques certains théorèmes philosophiques ou logiques comme moyens de démonstration, puisque la formulation même de telles propositions présupposent déjà des notions mathématiques constituées."[1]

Laissant de côté la solution donnée par les intuitionnistes (Brouwer, Heyting, etc.) à ce problème (ils ont eu recours à l'intuition) nous citerons encore la conception de Hilbert. Hilbert a remarqué dès le début de ses

1. A. Heyting, *Mathematische Grundlagenforschungen Intuitionismus Beweistheorie*, Springer, Berlin (1934), p. 12.

recherches, qu'il ne peut reconstruire les bases des mathématiques sans la logique et que, d'autre part, ni la logique ne peut être construite sans qu'elle implique des notions mathématiques, comme c'est par exemple, la notion de nombre entier. C'est pour cela que Hilbert se décide à construire simultanément et parallèlement la logique et les mathématiques.

Hilbert construit ainsi une *logique thêoretique* ou *mathêmatique* analogue comme méthode, à la méthode calculatoire des mathématiques, qui transforme la pensée dans un calcul algèbrique, ainsi que le dit lui-même: "la pensée logique trouve son image dans un calcul algèbrique."[2] On voit donc que ces solutions ne sont autre chose qu'un subterfuge: pour éviter la circularité de la justification de toute science par une autre science on fait que la logique soit une science mathématique englobée dans les mathématiques. Nous ne discuterons cette tentative en son principe, mais seulement l'idée que la logique est un système déductif du type *Principia Mathematica*.

2. *La conception d'Aristote* Ce qui frappe, dès l'abord, celui qui étudie l'oeuvre d'Aristote et que, bien qu'il fasse une classification des sciences, il n'énumère la logique parmi les autres sciences. Le créateur de *l'Organon* fait une théorie de la science, mais n'inclut pas la logique dans cette théorie. Plusieurs historiens de la philosophie ont remarquée cette anomalie, mais ils l'ont seulement signalée sans entrer dans le fond du problème.

Le fait qu'Aristote n'a pas cité la logique dans sa classification des sciences est expliqué par H. Scholz comme il suit: "Il est évident pour quiconque réfléchit à ce problème, que la logique ne peut être construite elle-même à son tour comme une science dans le sens aristotélique; car alors on ne peut voir d'où elle pourrait tirer ses règles d'opérations, par l'application desquelles, sur les axiomes préalablement donnés, dériverait ses théorèmes."[3] Cet argument, sur lequel on ne peut sauter, est formulé par Scholz, de la façon citée plus haut, pour expliquer l'absence de la logique dans la classification des sciences du Stagirite. "Jusqu'à quel point a observé Aristote lui-même cette chose, ajoute Scholz, on ne peut établir aujourd'hui."

Il existe toutefois certains passages dans les textes aristotéliques qui nous autorisent à penser qu'Aristote connaissait parfaitement cet argument. Nous trouvons, en effet, dans la *Mêtaphysique* un passage qui se réfère justement à ce problème: *ἄτοπον ἅμα ζητεῖν ἐπιστήμη καὶ τρόπον ἐπιστήυης·* ("Il est absurde de chercher en même temps la science et le mode—*τρόπον*—de la science").[4] Le même passage se retrouve, avec une légère différence d'expression, chez Ale::andre d'Aphrodise, dans un commentaire à la *Mêtaphysique* d'Aristote: *ἄτοπον γὰρ ἅμα ζητεῖν ἐπιστήμην τινόζ, καὶ περὶ*

2. D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, "*Einleitung*," Springer, Berlin (1928).
3. H. Scholz, *Geschichte der Logik*, Junker und Dünnhaupt, Berlin (1931), p. 5.
4. Aristote, *Mêtaphysique*, vol. II, 3, 995 a.

αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης ζητεῖν τίνα τρόπον γίγνεται ("Il est absurde de chercher en même temps une science déterminée et le mode d'existence de la science en général").[5]

Examinant les textes cités ci-dessus, H. Scholz conclut qu'Aristote s'oppose par cette affirmation à ceux qui confondaient la science avec la théorie de la science. "Il faut seulement quelques pas encore, écrit-il, pour arriver d'ici à la proposition de la non-répésentation (*Nichtdarstellbarkeit*) de la logique comme science rigoureuse (*als strenge Wissenschaft*)."

Malgré ces remarques justes, Scholz tire la conclusion, qu'il a fait impossible par les citations données ("on ne voit plus comment on pourrait axiomatiser la logique...") en concluant:[6] "il [Aristote] nous a donnée malgré cela une sorte d'axiomatisation."

D'autre part, des historiens, comme Windelband, croient qu'ils puissent expliquer la situation spéciale de la logique dans la conception d'Aristote de la façon suivante: (1) Aristote a voulu constituer par sa logique une théorie de la science;[7] (2) des explications répétées d'Aristote il résulte que le but de la logique est exclusivement méthodologique.

L'observation de Windelband, bien qu'exacte, n'explique pas entièrement la position du Stagirite envers la logique. Mais nous avons encore un texte, avec lequel se terminent les *Seconds Analytiques*, qui, croyons-nous, jetera plus de lumière dans ce problème. Voici la pensée d'Aristote:[8] "... puisque le principe de la démonstration n'est pas la démonstration, c'est pour cela que le principe de la science n'est pas la science. Si en dehors de la science il n'y a nulle autre faculté de connaître la vérité, alors en vérité l'intellect actif doit être le principe de la science. Ainsi, l'intellect actif est le principe de la science et en effet le principe de la science sera la connaissance du principe—*νοῦς ἄν εἶν ἐπιστήμης ἀρχή*. Commentant cette idée Julius Pacius, l'explique de cette façon:[9] *Principium scientiae est cognitio principii* ("Le principe de la science et la connaissance du principe").

En résumé, malgré l'absence des textes, on peut conclure que pour Aristote, la logique n'était pas une science déductive (comme par exemple la géométrie) mais une science de la déduction; elle n'était pas une science dans ce sens, mais une science des sciences, par sa nature même. Et ainsi que les principes étaient mieux connus, plus simples et antérieurs aux vérités démontrées, de même la logique se comportait, selon lui, comme le

---

5. Alexander Aphrodisiensis, *In Aristotelis Metaphysica Commentaria*, M. Hayduck, Ed., vol. I (1891), p. 168, (Voir aussi H. Scholz, *op. cit.*, p. 5).
6. H. Scholz, *op. cit.*, p. 6.
7. H. Windelband, *Geschichte der Philosophie*, (herausgegeben von Heimsoeth, Tübingen (1935)), p. 110.
8. *Les Seconds Analytiques*, vol. II, 19, 100 a.
9. Julius Pacius, *Aristotelis Peripateticorum Principis Organum* (Editio Secunda, Francofurti, 1597; réproduction reprographique, Georg Olms, Hildesheim, 1967), p. 546.

principe (ou la somme des principes) de toutes les sciences et elle sera mieux connue, plus simple et antérieure, à toutes les sciences. Bref, nous voyons qu'Aristote a conçu la logique comme étant saisie directement par l'intellect actif, ainsi que les principes en général, et au fond elle est la somme de tous le principes logiques, qui sont le *noũs poêtique* dans sa fonction noétique, d'où commence toute science. C'est pour cela que toute science a son commencement dans la logique et ce n'est pas par pur hasard que le premier éditeur des oeuvres d'Aristote, Andronicos de Rhodos (I-er siècle avant J. Chr.), ordonnant les divers livres philosophiques du Stagirite, a mis au début de la collection les livres de logique, qui plus tard recevront le nom d'*Organon*—instrument.

La logique a, certes, un aspect méthodologique aussi, et de ce point de vue, Windelband a raison. Mais la logique n'est pas seulement une méthodologie générale. Un motif d'ordre purement rationnel—pour échapper au cercle vicieux signalé—a déterminé Aristote de faire de la logique en premier lieu une connaissance des principes. L'essence de la logique est de nature noétique et elle est directement liée à l'intellect actif, c'est-à-dire à l'intuition intellectuelle.

Ce caractère de principe de la logique par rapport aux autres sciences sera souligné par les commentateurs de la logique—soit péripatéticiens ou non—même si leurs arguments varieront dans le temps.

Alexandre d'Aphrodise nous dit, confirmant cette situation spéciale de la logique parmi les sciences, que même les anciens—οἱ ἀρχαῖοι (ces sont les péripatéticiens de l'école d'Aristote) entendaient la logique comme un ὄργανον—instrument, et non une partie de la philosophie.[10]

Cette idée que la logique est un instrument des sciences—exprimant par *Organon* le fait qu'elle est antérieure à toute science et que seulement en se servant de cet instrument on peut faire les recherches dans toute autre science—sera répétée par tous les commentateurs, même si le sens originaire n'en est pas complètement explicité. Dans ce sens Prantl dit que la masse entière des commentateurs conçoivent la logique comme instrument:[11] "En ce qui concerne d'abord la conception de la logique en général et sa place il est reconnu partout comme valant de soi, qu'elle est la première parmi les disciplines philosophiques et qu'elle a valeur comme instrument de la connaissance entre le vrai et faux, et sert, par ce trait fondamental, comme appui pour tout ce qui suit."

Nous ne passerons pas en revue toutes les variantes de cette conception, mais indiquerons cependant quelques détails qui présentent une prégnance caractéristique.

Augustin (354-430) parle de la logique comme de la *disciplina disciplinarum*: "... celle qui s'appelle la discipline des disciplines, nous enseigne

10. Alexandre d'Aphrodise, *Ad Analytica Priora Commentarium*, f. 2 b, εὐλόγον ὑπο τῶν αρχαιίων ὅ μέχρι χρίαξ προήγαγον τὴν λογικὴν πραγατεὶαν ὄργανον αὐτὴν ἄλλα; οὐ μέροξ λέγεσθαι.

11. C. Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, vol. I (réproduction Manuldruck, Leipzig, 1927), p. 644.

d'apprendre; elle nous enseigne d'enseigner aux autres; en elle se montre et se découvre la raison.[12]

Boèce (470-524) part, lui aussi, de cette idée; pour lui "l'art que les Grecs appèllent λογικὶν et nous pouvons dire rationnelle (...) est l'instrument."[13]

3. *Le modus scientiarum des logiciens scolastiques* Le nombre modeste de textès anciens qui sont parvenus jusqu'à nous ne nous permettent pas d'avoir un stock plus grand d'arguments et d'explications sur leur conception de la logique.

Cependant ce problème doit avoir fait l'objet de longs débats, car Albertus Magnus (1193-1280) nous dit:[14] *Quidam enim antiquorum logicam nullam esse scientiam contenderunt, dicentes non posse esse scientiam il quod est omnis scientiae sive doctrinae modus* ("En effet, quelques-uns des anciens soutenaient que la logique n'est nulle science, en disant que ce qui est le mode de toute science ou doctrine ne peut être une science"). Et pour montrer que ce point de vue a été celui d'Aristote, Albertus Magnus ajoute: *Etiam Aristoteles dicit, quod modus sciendi ante scientiam quam libet discendus est* ("Et même Aristote dit que le mode de la science doit être appris avant tout autre science").

Mais l'argument d'ordre purement logique apporté par Albertus Magnus—et il appartient à la tradition, ainsi qu'il résulte de son énoncé—et le suivant: *Addunt etiam quod nullius rei modus cum re, cuius modus est, venit in sui divisionem* ("On ajoute encore que le mode d'aucune chose ne peut se trouver, avec le chose dont il est le mode, dans la division de son genre"). L'argument scolastique était donc identique à celui d'Aristote et se réduisait à l'impossibilité logique suivante: la logique étant la science des sciences ne peut être une des sciences car alors elle serait genre et en même temps une des espèces du genre.

Il faut retenir encore que le sens du mot *modus* est: "mode", "manière", "procédé" et "principe". La logique est, par conséquent, le principe de toutes les autres sciences, mais elle n'est pas son propre principe; elle est le procédé (ou l'instrument) de toutes les sciences mais n'est pas son propre procédé; c'est pour cela qu'elle n'est pas une science mais le mode de procéder—*modus procedendi*—dans les autres sciences.

Les explications supplémentaires données par Albertus Magnus, et qui appartiennent également aux anciens, ainsi qu'il résulte de la façon même dont elle sont exprimées, contribuent à mettre en évidence d'autres apsects encore de l'argumentation par laquelle la logique est un *modus scientiarum*. En effet, Albertus Magnus nous dit que la logique ne peut être une partie de la philosophie, parce que celle-ci se divise en trois parties, parmi

12. Augustin, *De Ordine*, vol. II, 13, 38. Voici le texte, "... *ipsam disciplina disciplinarum, quam dialecticam vocant; haec docet docere, haec docet discere, in hac se ipsa ratio demonstrant atque aperit.*
13. Boèce, *Commentaire* à la *Topique* de Cicero.
14. Albertus Magnus, *De Praedicabilibus*, vol. I, c. 1.

lesquelles la logique ne trouve aucune place:[15] "On soutient que cette science qui est le mode de toute philosophie n'est pas une partie de la philosophie, en disant qu'il n'y a que trois parties de la philosophie, à savoir, physique, mathématique ou science systématique (*disciplinabilem*), et métaphysique ou science divine." Albertus Magnus indique les sources de cette division comme se trouvant dans la philosophie péripatétique et celle du philosophie arabe Avicenne: *Avicenna dicens res omnes tripliciter esse accipiendas* ("Avicenne qui dit que toutes les choses [de la philosophie] doivent être acceptées en mode triple").

Nous trouvons encore d'autres aspects dans l'analyse faite par Albertus Magnus relativement au concept de logique. Voici ce qu'il écrit autre part[16]: "Il y a des sciences que nous ne les étudions pas pour elles-mêmes, mais parce que nous nous appuyons sur elles, telles que la science des problèmes topiques et la science de l'instrument des sciences, qui est le syllogisme, et d'une façon générale, les sciences sermocinales [discursives]; et celle-ci ne sont pas de vraies sciences mais le mode de toutes les sciences."

Considérant le problème dans son aspect "sermocinal" (discursif), la logique ne peut se trouver, ni de ce point de vue aussi, parmi les sciences. La philosophie est divisée en trois parties essentielles: *Tres sunt partes essentiales philosophiae realis, quae non causatur in nobis ab opere nostro, sicut causatur scientia moralis, sed potius ipsa causatur ab opere naturae in nobis; quae partes sunt: naturalis, et metaphysica, et mathematica* ("Trois sont les parties essentielles de la philosophie réelle, qui n'ont pas leur cause en nous, par notre activité, comme a sa cause la science morale, mais plutôt ont leur cause par l'activité de la nature sur nous; et ces parties sont: [la science] naturelle, la métaphysique et la mathématique."[17]

La classification des sciences est donc celle classique et elle peut être trouvée dans tous les traités de l'époque:

I. *Scientiae reales* qui s'occupent de *de ente* (de l'existant).
   1. *physica*;
   2. *metaphysica*;
   3. *mathematica*.
II. *Scientia moralis*.
III. *Scientiae sermocinales*.
   1. *grammatica, quae docet recte loqui,*
   2. *rhetorica, quae docet ornate loqui;*
   3. *logica, quae docet vere loqui.*

15. Albertus Magnus, *De Praedicabilibus*, I *De Natura logicae*. Voici le texte: *Hanc autem scientiam, quae modus est omnis philosophiae, quidam nullam partem esse philosophie contendunt dicentes, non nisi tres partes philosophiae, sc. physicam, mathematicam sive disciplinabilem, et metaphysicam sive divina.*

16. Albertus Magnus, *Physica*, I, vol. I, 1. Voici le texte latin: *Sunt quaedam scientiae, quas non quaerimus propter se, sed ut nobis adminiculentur ad alia, sicut scientiam topicorum problematum et scientiam de instrumento scientiarum, qui est syllogismus, et universaliter scientias sermocinales; et illae non sunt verae scientiae, sed modi scientiarum omnium.*

17. Albertus Magnus, *De Anima*, vol. I, 2.

Dans cette acception de science sermocinale, de science discursive, la logique se réfère aux expressions "vraies," parce qu'elle nous apprend *vere loqui*—à parler "vrai." Les autres sciences sermocinales ont d'autres buts: la grammaire nous apprend *recte loqui*—à parler correctement; la rétorique nous apprend *ornate loqui*—à parler "avec ornements". Le sciences sermocinales ne s'occupent donc pas *de ente* et c'est pour cela qu'elles ne forment pas une partie de la philolosophie essentielle, car la logique nous apprend plutôt "le mode de savoir"—*modus sciendi*—et elle n'est donc pas une science particulière.

Cette conception générale de la logique a été adoptée par tous les logiciens scolastiques, sans exception. On peut trouver une variante d'intérprétation par exemple chez Duns Scotus († 1308). Le célèbre *doctor subtilis* partage la logique en deux parties (influencé par Alfarabi), à savoir: (1) *logica docens*—la logique qui enseigne—qui est vraiment une science, car comme telle, elle nous enseigne la syllogisme, l'argumentation; (2) *logica utens*—la logique qui est utilisée—qui comme telle n'est pas une science proprement dite, mais une science pratique.[18]

Comme on le voit, l'idée que la logique n'est pas une science, c'est-à -dire une science déductive dans le sens de l'axiomatique aristotélique, est le point de vue des logiciens scolastiques, même si cette conception apporte encore d'autres arguments à son appui qui concernant des aspects extérieurs de cette discipline (comme l'aspect sermocinal).

Les motifs qui déterminaient les penseurs du Moyen Age à considérer la logique comme *modus scientiarum* peuvent être donc énoncés comme il suit:

1. Il faut qu'il existe nécessairement un art qui dirige l'acte même de raison et cet art est la logique qui pour ce motif apparaît comme *ars artium*—l'art de tous les arts.[19]

2. Il faut commencer l'étude de tous les autres sciences par l'étude de la logique parce que toutes les autres sciences dépendent d'elle—*quia aliae scientiae ab ipsa dependent*.[20] Il faut donc commencer de la logique—*Oportet a logica incipere*.

3. Le motif purement logique de cette place prééminente de la logique par rapport aux autres sciences était l'argument d'Aristote: le principe de la science ne peut être une science.

4. Le motif d'ordre pratique, se référant à l'aspect sermocinal de la logique, qui ne peut être considérée, pour cela, une science *réelle* du type mathématique.

L'idée que la logique est une science pratique (et non spéculative) apparaît dans les oeuvres de Roger Bacon, chez Joan Gratiadei de Ascoli,

18. Duns Scotus, *Quaestiones super Prophirium*, vol. I, 87 A.

19. Thomas d'Aquin dans *Analytica Posteriora*, vol. I, 1: *Ars quaedam est necessaria est, qua sit directiva ipsius actus rationis et haec ars est logica, i.e. rationalis scientia et ideo videtur esse ars artium.*

20. Thomas d'Aquin dans *Ad Boethium de Trinitate*, I.

chez Petrus Aureolus, chez Aegidius Romanus, etc., mais prend une forme plus définie chez Occam.

En résumé, nous pouvons conclure avec Albertus Magnus: la logique nous apprend les principes—*logica docet principia* et c'est pour ce motif qu'elle ne peut être une science à même titre que la géométrie par exemple.[21]

Dans la logiques des anciens et des scolastiques on trouve des principes les plus généraux de toutes des sciences. Et en ce qui concerne la déduction, on trouve dans la logique les principes en vertu desquels on peut tirer des conséquences dans toute science; elle énonce les principes de la déduction mais n'est pas elle-même une science déductive.

4. *La conception de Wittgenstein* La transformation de la logique dans une théorie déductive de nos jours a été analysée, bien que d'une façon lapidaire, par Ludwig Wittgenstein dans son *Tractatus Logico—Philosophicus*. Les idées de Wittgenstein contribuient à l'éclaircissement de ce problème, il se maintient dans ce problème dans le sillon tracé par Aristote, continué par ses commentateurs et les logiciens scolastiques. En effet, Wittgenstein nous dit[22]: "La logique n'est pas une théorie mais un réflet du monde" (*Die Logik ist keine Lehre sondern ein Spiegelbild der Welt*). En d'autres termes, la logique n'exprime pas de conventions, mais les vérités de la réalité, et elle est ainsi *das Gerüst der Welt*—"l'ossature du monde".

Mais scrutons de plus près la pensée de Wittgenstein.

Les propositions logiques sont toutes des tautologies. Une tautologie est justifiée comme telle par sa structure interne et non par sa démonstration. C'est pour ce motif que Wittgenstein dit que la logique peut être toujours conçue de telle manière que chacune de ses propositions soit considérée comme étant sa propre preuve.[23] Dès lors, la séparation du corps des propositions d'une théorie mathématique de la logique, en axiomes et théorèmes est arbitraire.

Il n'y a pas de propositions qui soient essentiellement primitives et d'autres qui soient essentiellement déductibles des premières. Chaque tautologie montre par elle-même qu'elle est une tautologie.[24]

La démonstration des propositions logiques, écrit Wittgenstein, consiste dans le fait que nous les faisons apparaître comme étant créées en partant des autres propositions logiques et en appliquant successivement certaines opérations qui génèrent à leur tour d'autres tautologies. (Car, en effet, d'une tautologie dérive seulement une tautologie). Certes, ce mode de montrer que les propositions logiques sont des tautologies est entièrement

21. Albertus Magnus, *Metaphysica*, vol. I, 5.
22. L. Wittgenstein, *Tractatus Logico—Philosophicus*, prop. 6.13. (Paul Kegan, London, 1933).
23. *Tractatus*, prop. 6.1265.
24. *Op. cit.*, prop. 6.127.

non-essentiel pour la logique, parce que les propositions d'où elle part doivent montrer sans démonstration qu'elles sont des tautologies.[25]

Dans la logique le procès et le résultat sont la même chose. La démonstration dans la logique est seulement un moyen mécanique pour montrer plus facilement la tautologie quand elle est plus compliquée.[26] Ce serait vraiment remarquable, dit Wittgenstein, si quelqu'un pourrait démontrer d'une manière logique, une proposition significative et pareillement une proposition logique par une proposition significative. Il est clair que la démonstration logique d'une proposition significative et la démonstration en logique sont deux choses différentes.[27]

Et maintenant nous soulignons la plus importante conclusion de Wittgenstein, tirée des considérations précédentes: "La proposition significative exprime quelque chose et la démonstration montre que c'est ainsi; *dans la logique toute proposition est la forme d'une démonstration*."[28]

Ainsi donc, le système de la logique formelle, par exemple celui des *Principia Mathematica*, n'est pas une *théorie*, dans la conception de Wittgenstein, et en cela il est d'accord avec Aristote; mais il est de plus d'accord sur un autre aspect de la logique avec les logiciens scolastiques, à savoir, que les théorèmes de la logique sont seulement des règles de déduction. Par conséquent, la logique est, pour Wittgenstein aussi, un *ars procedendi* et non un science, mais un *modus scientiarum*.

5. *Les idées de F. Waismann* F. Waismann a développé la conception de Wittgenstein sur la logique dans une étude portant le titre significatif:[29] *Ist die Logik eine deduktive Theorie* ?

Waismann remarque qu'on a constaté depuis longtemps le caractère tautologique de la logique construite comme système formel et il veut donner une interprétation des propositions de la logique qui soit acceptable, parce que *cette circonstance* (le caractère tautologique) n'est pas, selon lui, caractérisante pour les propositions logiques.

L'auteur cité considère le système des *Principia Mathematica* (mais ses remarques s'appliquent évidemment à tout système logique).

La construction de ce système est connue: le point de départ sont des idées primitives, quelques formules tautologiques (les axiomes) qui sont non-démontrés; de ces propositions fondamentales on peut dériver d'autres propositions, conformément à des indications complètement déterminées. Le calcul logique se présent ainsi sous l'image d'une théorie déductive, dont les propositions sont enchaînées par démonstrations et rappelle de cette façon autres systèmes déductifs, comme par exemple la mécanique

25. *Op. cit.*, prop. 6.127.
26. *Op. cit.*, prop. 6.1262.
27. *Op. cit.*, prop. 6.1263.
28. *Op. cit.*, prop. 6.1264.
29. *Erkenntnis*, Bd. 7, H 4,1938. Waismann déclare lui-même que les idées exposées dans cette étude sont dues à quelques communications orales que lui a faites L. Wittgenstein (Voir la note respective dans *Erkenntnis*, Bd. 7. H.5/6, p. 375, La Haye, 1939).

ou la géométrie. Mais cette comparaison est trompeuse dans un point décissif, dit Waismann et en fait nous a déjà induit en erreur.[30] Cette représentation nous fait croire que le calcul logique est une théorie, qui arriverait de quelques propositions vraies données, à d'autres propositions vraies, progressant tout le temps. La logique serait ainsi une construction de propositions—*ein Gebäude von Sätzen.*[31]

Insistons avec Waismann sur la conception habituelle du système de logique. L'idée de Frege, et après, de Russell en créant les *Principia Mathematica,* était la suivante: les axiomes de la logique sont des vérités qui s'imposent avec nécessité à notre ésprit, et la vérité des autres propositions est reconnue dès que par une chaîne de démonstrations elles sont réduites aux premières. "Ces chercheurs, écrit Waismann, étaient donc d'avis que par les recherches des conséquences pourront pénétrer toujours plus profondément dans un royaume de vérités eternelles. Cette conception n'atteint pas le fond du problème. En effet, dit Waismann, la logique sert à donner aux règles de déduction une forme systématique. Ces règles justifient la déduction. Cela signifie que je peux dire "cette conclusion est juste, parce que je l'ai tirée d'après telle ou telle règle." Au contraire, nous ne pouvons dire "cette conclusion est juste, parce que telle ou telle proposition est vraie." "*Si la logique était un système déductif, écrit Waismann, comme la mécanique, alors ses axiomes ne nous intéresseraient guère en réalité, mais seulement le fait que des axiomes résulte le reste de la théorie*. Alors la logique de Russell ne serait pas la logique, mais un exemple de logique. Russell voulait au contraire établir des lois indubitables qui justifient la déduction, et non seulement la déduction en partant des principes, mais la déduction en général. Il faut donc conclure, pense Waismann, que la logique n'est pas une construction de vérités, mais seulement l'expression de certaines règles de déduction et que l'édifice entier du système des formules est subordonné à ce but."[32]

Examinant de plus près quelques théorèmes des *Principia Mathematica*, Waismann conclut que ces théorèmes ne sont que les parties de certaines règles de déduction.

Dans le final de son étude, Waismann arrive à deux conclusions.

Le terme "logique" peut être utilisé dans un sens plus général, comme ce serait la désignation de tous les systèmes isomorphes au système de Russell et Whitehead. En ce qui concerne le sens plus restreint—la théorie de la déduction—il devait être distingué du système construit formellement et c'est ce sens qui est caractéristique du point de vue logique dans la *logique—système formel.* Ce moment se trouve dans le mode particulier de l'application du calcul logique.[33]

Arrivant à ces conclusions, Waismann se demande si une logique "non-aristotélicienne" est possible (selon Łukasiewicz un telle logique devrait être appelée "non-crysipienne")?

30. *Op. cit.*, p. 274.
31. *Op. cit.*, p. 275.
32. *Op. cit.*, p. 275. Voici textuellement ce qu'écrit Waismann: *Die Logik ist kein Gebäude von Wahrheiten, sondern nur der Ausdruck ener Schlussregel ist.*
33. *Op. cit.*, p. 280.

A cette question Waismann croît qu'on peut répondre seulement quand on aurait rendu compte premièrement d'une façon exacte du mode d'application de notre logique et après on peut chercher l'invention d'un système ayant une structure qui s'éloigne de la logique classique.

Les axiomes d'un tel système devraient être considérés, à leur tour, comme des parties de certaines règles de déduction—mais des règles qui circonscrivent un autre système que notre logique.[34]

6. *Les théorèmes de la logique représentent des règles de déduction* Les remarques de Waismann, basées sur celles de Wittgenstein, sont de la plus haute importance pour comprendre que la logique n'est pas une théorie, mais seulement une collection de règles de déduction.

Certes, cette chose est aujourd'hui connue, mais on ne lui donne sa signification réelle. En effect, on a toujours confondu *la vérité logique avec la règle de déduction* et les tautologies des systèmes logiques ont été considérées tantôt comme des vérités, tantôt comme des règles de déduction. Pour les logiciens formalistes, les théorèmes de la logique représentent d'une part des lois logiques et donc des vérités logiques, d'autre part ces mêmes lois logiques servent tout le temps à la démonstration d'autres vérités logiques (elles sont ainsi des règles de déduction). *Quel est donc leur statut effectif? Sont-elles des vérités ou des règles de déduction?*

Dans les *Principia Mathematica*, Russell lui-même appelle le système entier du calcul propositionnel *The Theory of Deduction*—et quand il introduit les variables apparentes il nous dit qu'il fait "une extension de la théorie de la déduction."

Cependant, l'idée que dans le calcul logico-mathématique on ne démontre pas "des vérités" mais des règles de déduction n'apparaît pas d'une façon explicite dans les *Principia Mathematica*. Voici ce qu'écrivent leurs auteurs:[35] "Le but de la présente section est d'établir le premier stade de la déduction des mathématiques pures de leurs fondements logiques. Le premier stade s'occupe d'une manière nécessaire de la déduction elle-même, c'est-à-dire des principes en vertu desquels les conclusions sont inférées des prémisses."[36] En d'autres termes, Russell et Whitehead étaient conscients que le système formel de la logique qu'il construisaient dans les *Principia*, n'était pas pareil à celui de la géometrie (par exemple), où chaque proposition démontrée représente une *vérité* et non pas une *règle* de déduction. Il est intéressant de souligner que certains théorèmes du calcul propositionnel sont appelés par Russell des *principes*: *le principe de tautologic; le principe reductio ad absurdum; le principe de*

---

34. *Op. cit.*, p. 281.

35. *Principia Mathematica*, vol. I, Section A, "The theory of deduction."

36. Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead répètent (Vol. I, Section B, "Theory of apparent variables") qu'ils ne font qu'une théorie de la déduction: "Le but de la présente section est de montrer comment par le moyen de certaines propositions primitives nous pouvons déduire la théorie de la déduction pour les propositions élémentaires."

permutation; le principe du syllogisme; le principe de transposition; etc. S'il n'a pas nommé tous les théorèmes du calcul propositionnel comme "principes" spéciaux c'est qu'il lui aurait fallu un nombre trop grand d'appelations et inventer une terminologie trop longue et nouvelle...

Cela prouve que pour les auteurs des *Principia* aussi, les théorèmes du calcul propositionnel n'étaient pas "des vérités" démontrées, comme dans la géométrie ou la mécanique, mais des règles de déduction, quoi qu'il n'aient pas énoncé d'une façon précise cette caractéristique des propositions de leur système, ce qui a pu faire croire si longtemps que les théorèmes des systèmes formels, en général, représentent *"des vérités logiques."*

D'autres logiciens ont donné le nom "des lois" aux théorèmes du calcul propositionnel, ce qui montre également que, eux aussi, ont remarqué que ces théorèmes n'ont pas la même nature que les théorèmes de géométrie (par exemple)[37] où personne ne pourrait affirmer qu'un théorème este "une loi" ou un "principe". Quel effet choquant aurait sur notre esprit si quelqu'un appelait le théorème de Pythagore "la loi de Pythagore" ou "le principe de Pythagore"?

H. Reichenbach[38] appelle les théorèmes de la logique "des règles"; Hilbert et Ackermann[39] les appellent des "formules vraies"; efin, plus répandu est le nom de "tautologies" donné par Wittgenstein.

7. *La logique n'a pas d'axiomes ni de théorèmes* Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos conclusions, en vertu de l'analyse précédente. Nous avons montré les raisons de principe, acceptées par les plus grands logiciens, en commencant par Aristote, pour lesquelles la logique ne peut être une théorie. Dans ce cas, elle ne peut avoir ni axiomes ni théorèmes.

Si nous examinons le système logico—formel des *Principia Mathematica*, par exemple, nous observons que les axiomes n'ont aucun droit de priorité par rapport aux autres tautologies du système. Ces tautologies ne sont pas de principes, dans le sens étimologique du mot, mais elles sont acceptées conventionnellement comme principes, et par cela on imite la construction d'une théorie déductive réelle.

Si nous acceptons l'ensemble des tautologies choisies par convention comme axiomes, et nous pouvons les adopter comme axiomes justement parce qu'elles sont des tautologies, alors nous avons accepté *ipso facto* toutes les tautologies possibles qui peuvent être construites dans le système (connues ou inconnues), parce qu'elles ont toutes le même droit de cité dans le système que les axiomes: elles sont des tautologies.

La disposition du système formel de la logique en ensemble axiomatique et en ensemble des théorèmes, est tout à fait conventionnelle et dépourvue de toute raison théorique (et c'est pour cela que toute construction de ce genre est relative et modifiable, ce qui ne serait pas le cas si

37. Par exemple, Alonzo Church dans son *Introduction to Mathematical Logic,* Princeton, New Jersey (1956).
38. H. Reichenbach, *Symbolic Logic,* New York (1948).
39. D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik.*

elle avait une raison théorique). La logique devient ainsi l'affirmation simultanée de toutes les tautologies possibles, formulables dans le système. Dans la logique formalisée il n'y a pas de dépendance logique entre ses propositions, ni antériorité, ni posteriorité; toutes les tautologies doivent être acceptées dès le début, puisqu'elles constituent leurs propres preuves. Toutes les tautologies ont le même rang, ainsi que le disait Wittgenstein.

Considérons la suite de toutes les tautologies possibles dans le système *Principia Mathematica*:

$$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, \ldots$$

Elles ont toutes la valeur "vrai", donc on peut faire l'assertion de leur conjonction:

$$(1) \quad \vdash: \; T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \ldots T_n \ldots$$

On peut encore affirmer leur équivalence logique:

$$(2) \quad \vdash . \; T_1 \equiv T_2 \equiv T_3 \equiv \ldots \equiv T_n \equiv \ldots$$

Le système entier des "vérités" logiques se réduit à la conjonction (1) ou à la suite d'équivalences (2).

La construction du système logico-formel a une seule valeur: *d'ordre pratique* et *méthodologique*. En effet, nous ne pouvons imaginer, dès le commencement, toutes les tautologies possibles, ou savoir sans aucun contrôle si une formule donnée est une tautologie ou non. Certes, nous avons la possibilité de constater qu'elle est une tautologie en construisant sa matrice, mais quelquefois c'est plus facile de prouver ce caractère par une "déduction". Les règles de déduction deviennent ainsi des règles pratiques. Ainsi que le disait Wittgenstein, et comme nous l'avons souligné dans le cours de notre étude, les règles de déduction, dans le système formel de la logique, sont seulement des moyens mécaniques pour reconnaître la tautologie quand sa construction est plus compliquée. C'est cette signification des tautologies du système formel de la logique qui ressort du fait que le formalisme de la logique classique a pu être présenté par des techniques différentes.

En effet, le formalisme de la logique classique peut être construit non seulement par la méthode axiomatique, mais aussi par d'autre méthodes. On peut distinguer, en général, trois téchniques formelles: (1) méthode axiomatique; (2) logique à schèmas; (3) logique combinatoire. La méthode axiomatique du système formel de la logique a été utilisée par Frege et après par Whitehead et Russell dans leurs *Principia Mathematica*. La logique à schèmas a été présentée par S. Jaskowski[40] et après lui et indépendamment par G. Gentzen[41], comme une méthode de "déduction naturelle." Les logiques combinatories sont présentées comme l'étude des

40. Stanislaw Jaśkowski, "On the rules of suppositions in formal logic," *Studia Logica*, Warsovie (1934).

41. Gerhard Gentzen, "Untersuchungen über das logische Schliessen," *Mathematische Zeitschrift* (1934).

opérations que l'on peut faire avec des expressions symboliques et partent des travaux de H. Curry.[42]

G. Gentzen n'utilise pas d'axiomes mais seulement des règles de dérivation, qui sont exprimées par des *séquences*. Les règles de dérivation deviennent ainsi des schèmas de démonstration à l'aide desquelles, au cours de la démonstration, on fait les transformations des séquences. En d'autres termes, le système formel axiomatique est entièrement traduit dans la logique à schèmas de Gentzen, par une théorie de la démonstration. L'avantage de cette technique formelle est qu'elle ne présente plus la logique comme une théorie axiomatique, analogue à la géométrie ou à la mécanique, mais ce qu'elle est réellement: une collection de règles de déduction.

C'est ainsi que la logique de Gentzen correspond plus naturellement au procès réel déductif, ce qui a été remarqué non seulement par l'auteur qui lui a donné le nom de "déduction naturelle" mais aussi par beaucoup d'autres logiciens. Voici par exemple ce qu'écrivent dans se sens W. et M. Kneale:[43] "Il apparaît clairement que Gentzen a présenté la logique en fait, d'une façon plus naturelle que ne l'ont fait Frege, Whitehead et Russell. Si nous admettons que le nombre de ses règles est beaucoup plus grand que le nombre des règles et des axiomes des *Principia Mathematica*, chez lui [chez Gentzen], chaque signe est introduit d'une façon séparée et il est possible de prouver que les équivalences qui se trouvent dans les *Principia Mathematiques* sont des définitions des signes non pris comme primitifs."

8. *Le principe des schèmas de déduction* Considérons le système formel de la logique, tel qu'il est construit dans les *Principia Mathematica*.

1. *Idées primitives*.
   (a) $p, q, r, \ldots$ variables susceptibles de prendre deux valeurs, le "vrai" (V) et le "faux" (F);
   (b) *négation*: $\sim$, définie par la matrice:

p	$\sim p$
V	F
F	V

   (c) disjonction: $\vee$, définie par la matrice:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

42. H. Curry, "Grundlagen der kombinatorischen Logik," *American Journal of Mathematics*, (1930). Curry a développé sa conception dans plusieurs autres travaux postérieurs.

43. William et Martha Kneale, *The Development of Logic*, Oxford (1962), p. 539.

2. *Axiomes*.

$A_1 \vdash: p \vee p . \supset . p$

$A_2 \vdash: q . \supset . p \vee q$

$A_3 \vdash: p \vee q . \supset . q \vee p$

$A_4 \vdash: p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$

$A_5 \vdash: q \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$

3. *Règles de déduction*.

(a) règle de *modus ponens*:

$$\frac{\vdash . p \supset q \qquad \vdash . p}{\vdash . q}$$

(b) *règle de substitution*: Dans toutes formules vraies (tautologies) on peut remplacer les variables par d'autres variables ou formules construites avec ces variables et l'on obtient une tautologie à la condition qu'une même variable soit remplacée partout dans la tautologie par la même expression propositionnelle.

4. *Théorèmes*. En appliquant les procédés de déduction cités plus haut on obtient d'autres tautologies en partant des axiomes donnés. Citons quelques-uns:

$T_1 \vdash: p \supset \sim p . \supset . \sim p$

$T_2 \vdash: \sim p \vee p$

$T_3 \vdash: \sim (p . \sim p)$

$T_4 \vdash: \sim(\sim p) \equiv p$

$T_5 \vdash: p \supset p . q \supset r : \supset : p \supset r$

$T_6 \vdash: p \supset p . \supset . \sim q \supset \sim p$

$T_7 \vdash: p \vee p . \equiv p$

$T_8 \vdash: p \equiv q . \equiv . \sim (p \equiv \sim q)$

$T_9 \vdash: p \equiv q . \equiv . p . q \vee \sim p . \sim q$

$T_{10} \vdash: \sim (p \equiv \sim p)$

Remarques Nous supposons connus les détails de cette construction formelle, la règle de l'usage des points des parenthèses, du signe d'assertion, qui ne sont pas de "signes logiques" mais seulement des auxiliaires graphiques. L'axiome A4 a été éliminé par P. Bernays qui a démontré qu'il est dérivable des autres axiomes.[44]

Nous supposons également connues les règles de former correctement des nouvelles expressions avec les signes logiques primitifs.

Le signe de définition est =, accompagné de groupe Df. A l'aide de se signe se fait la "définition explicite" qui est une simple abréviation. Russell dit que les définitions ne sont pas nécessaires et qu'elles sont de simples "commodités typographiques" (typographical conveniences). Alonzo Church écrit dans ce sens:[45] "En dehors des abréviations par l'ommission

44. P. Bernays, "Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der Principia Mathematica," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 25 (1926).

45. A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, New Jersey (1956).

des paranthèses, nous utilisons également des abréviations d'un autre type, qui sont exprimées parce que nous appelons définitions. Une telle définition introduit un symbole nouveau ou une expression et préscrit que ce signe sera placé comme abréviation pour une formule bien formée."

5. *Définitions*. Pour faire plus commode le maniement des formules on introduit par abréviation les signes:

1. *implication*:	$p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q$	Df
2. *conjonction*:	$p\,.\,q \,.=.\, \sim(\sim p \vee \sim q)$	Df
3. *équivalence*:	$p \equiv q \,.=.\, p \supset q \,.\, q \supset p$	Df

6. *Fonctions propositionnelles*. Pour pouvoir développer son système, Russell a besoin de la notion de "fonction propositionnelle", qu'il note par fx et qui signifie: "x a le prédicat f". Si le prédicat est connu on ecrira aves lettres latines:

$$fx, gx, hx \ldots$$

Si le prédicat est variable on utilisera des lettres grecques:

$$\phi x, \psi x, \chi x, \ldots$$

On a encore des fonctions propositionnelles à deux arguments, à trois arguments, etc.

Pour le calcul des fonctions propositionnelles, qu'il appelle "*extension of theory of deduction*" Russell a besoin encore de deux définitions (pour "tous" et "il y a"): il note par $(x).fx$ la proposition générale "fx pour tout x" et par $(\exists x).fx$ la proposition extentielle (particulière), "Il y a un x pour lequel fx". On a ainsi:

$$(x)\,.\,\phi x \,.=.\, \sim[\exists x)\,.\sim\phi x] \qquad \text{Df}$$
$$(\exists x)\,.\,\phi(x) \,.=.\, \sim[(x)\,.\sim\phi x] \qquad \text{Df}$$

Russell introduit encore six propositions primitives et la théorie des types, mais cela ne peut nous intéresser ici, parce que ce qui nous poursuivons ce *le principe* de cette construction.

Rebroussons chemin aux notions primitives et analysons ce que nous avons réellement fait.

1. Nous avons considéré les variables propositionnelles $p, q, r, \ldots$; une variable p ne peut prendre qu'une des valeurs de vérité V (vrai) ou F (faux), la troisième possibilité n'éxiste pas, *tertium non datur*. On a donc introduit le principe du tiers exclu.

2. S'il faut expliciter avec une exactitude totale ce que nous avons affirmé en acceptant les variables propositionnelles susceptibles de prendre deux valeurs V ou F nous devons dire: une variable propositionnelle p peut prendre une des deux valeurs de vérité V ou F, la troisième possibilité n'éxiste pas (*principe du tiers exclu*) et elle peut prendre seulement une de ces valeurs à l'exclusion de l'autre (*principe de contradiction*).

En d'autres termes, si nous énonçons d'une façon explicite ce qui signifie l'affirmation générale, qu'une variable propositionnelle peut prendre une des deux valeurs V et F, alors on voit clairement que la première idée primitive a introduit le principe du tiers exclu et le principe de contradiction. Cette idée primitive doit être exprimée explicitement comme il suit:

On admet les variables propositionnelles $p, q, r, \ldots$, qui peuvent prendre chacune une des deux valeurs de vérité V(*vrai*) *ou* F(*faux*), *tertium non datur, et seulement une d'elles à l'exclusion de l'autre* (*principe de contradiction*).

3. L'introduction du signe de négation $\sim$ nous donne un moyen *d'exprimer* plus facilement ces principes et surtout de voir qu'ils étaient déjà introduits par le premier point.

Par l'introduction de la négation on a exprimé directement et explicitement le principe de contradiction, l'effet de la négation étant d'inverser la valeur de vérité d'une variable propositionnelle: or cela signifie qu'une variable propositionnelle p ne peut prendre en même temps les deux valeurs de vérité possibles V et F, car autrement, la négation ne pourrait avoir l'effet indiqué par sa matrice

p	$\sim p$
V	F
F	V

La fonction de la négation, définie comme plus haut par sa matrice, introduit en même temps ce qu'on appelle abusivement "règle ou loi de la double négation", mais qui n'est en réalité que la règle de la négation appliquée à la fonction de vérité "$\sim p$". Comme la négation a l'effet d'inverser la valeur de vérité de toute fonction de vérité, il résulte que nous avons directement:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\sim\sim\sim p$	$\sim\sim\sim\sim p$	.....
V	F	V	F	V	
F	V	F	V	F	

Il n'y a pas de loi de la double négation mais seulement la fonction de la négation; pour la même raison, il n'y a pas de loi de la triple négation, ni loi de la quadruple négation, etc.

4. Considérons la troisième idée primitive de Russell, celle de disjonction, notée symboliquement par le signe $\vee$. Cette idée n'est pas une idée logique proprement dite, mais sert en premier lieu à faciliter les formulations linguistiques. Dire que nous pouvons choisir deux variables propositionnelles p et q et former une expression $p \vee q$ qui résume la combinaison des valeurs des variables composantes donnée par la matrice de la disjonction, ne signifie pas que nous appelons à un principe de logique, mais nous remarquons seulement une possibilité qui appartient au domain du langage et de son pouvoir *d'exprimer une situation de fait*. Or les possibilités du langage d'exprimer les situations de fait dans ce domaine, c'est-à-dire tous les groupes de quatre lettres avec répétitions formés avec les lettres V et F ont au nombre de 16. Toutes ces combinaisons ne forment pas par elles-mêmes "des principes logiques", mais des expressions de fait, d'ordre linguistique.

Comme on le sait, tous les 16 soit—disant "constantes logiques" ou "foncteurs", qui relient deux variables propositionnelles d'une certaine facçn, sont exprimables à l'aide de la négation et de la disjonction, donc ils ne sont eux-mêmes que ce qui représentent la négation et la disjonction, c'est-à-dire de l'ordre de l'expression.

Il en est de même de l'idée de fonction propositionnelle: elle est une question de fait et non une question de principe logique que l'on peut exprimer le fait qu'un "x a le prédicat f" par l'expression fx. Et ainsi de suite. Toutes les expressions de cette espèce sont des formulations linguistiques de fait; elles sont soumises, évidemment, aux principes logiques, comme toutes les choses possibles, mais elles ne sont pas des éléments logiques de principe, ou des principes.

5. On peut montrer, d'autre part, que les deux principes, impliqués déjà dans l'idée de variable propositionnelle à deux valeurs V ou F, sont dans le système formel des *Principia Mathematica* une seule et même chose. En effet, la notion de conjonction est introduite dans le système de Russell et Whitehead par définition, à l'aide de la négation et de la disjonction:

$$p\,.\,q\,.=.\,\sim(\sim p \vee \sim q) \qquad \text{Df}$$

Si nous appliquons cette définition générale à la conjonction $p\,.\sim p$ (contenue dans celle-là) nous obtenons par définition:

$$\vdash:\ p\,.\sim p\,.\equiv.\sim(\sim p \vee p)$$

Ou si nous nions simultanément les deux membres de la définition:

$$\vdash:\ \sim(p\,.\sim p)\,.\equiv.\sim p \vee p$$

C'est-à-dire: dans le jeu purement formel des variables propositionnelles bivalentes, le principe de contradiction (premier membre de la définition) et le principe du tiers exclu (deuxième membre) sont définis l'un par l'autre et sont, au fond, une seule et même chose. L'expression "une variable propositionnelle est ou vraie ou fausse", peut être écrite d'une autre façon: "il est faux qu'une variable propositionnelle est vraie et fausse en même temps."

Par conséquent, ce système formel entier des *Principia Mathematica* est construit sur la base du principe de contradiction et du principe du tiers exclu, qui dans la logique formalisée ne sont qu'une seule et même chose exprimée de deux manières différentes.

Mais puisque toutes les notions définies ne sont autre chose que les notions primitives et que toutes les tautologies ne sont construites, en dernière analyse, qu'avec les idées primitives, il résulte que toutes les formules des *Principia Mathematica* n'expriment que le principe de contradiction ou le principe du tiers exclu qui est simplement une formulation différente du premier (du point de vue formel).

Cette conclusion est illustrée par la méthode dites des formes normales. Par exemple, les formes normales de Hilbert et Ackermann[46] nous permettent de constater qu'une formule du calcul propositionnel est une tautologie si elle peut être transformée dans une "forme normale", composée exclusivement des conjonctions dont chaque membre est une disjonction contenant chacune au moins une variable propositionnelle et sa négation, c'est-à-dire, précisement le principe du tiers exclu! Autrement dit, toutes les formules vraies (tautologies) du système formel bivalent n'expriment pas autre chose, du point de vue logique, que le principe du tiers exclu, qui n'est qu'une formulation du principe de contradiction.

Les tautologies du système logique n'expriment pas chacune une règle de déduction, comme le croyait Wittgenstein ou Waismann; elles expriment toutes, d'une façon diverse, et plus ou moins compliquée, la même chose; le principe de contradiction ou sous une forme équivalente le principe du tiers exclu, le seul principe qui sert à la déduction formelle.

Mais c'est justement ce qui affirmait Aristote:[47] *διὸ πάντες οἱ αποδεικνύντες εἰς ταύτην ἐσχάτην δόξαν φύσει γὰρ ἀρχὴ τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων αὕτη πάντων* ("Donc toutes les démonstrations se réduisent à ce dernier principe [de contradiction]; il est par sa nature le principe de tous les autres axiomes").

9. *Conclusions* Nous n'avons pu entrer dans tous les détails de notre argumentation. Mais il nous semble que nous avons suffisamment prouvé quelques faits.

1. La logique n'est pas une science à même titre que la géométrie ou la mécanique.
2. Aristote avait donc raison, ainsi que ses commentateurs et les logiciens scolastiques, de soutenir que la logique n'est pas une science mais le principe ou le "mode" de la science.
3. Les soit-disant "théorèmes" (tautologies) du système formel de la logique expriment seulement des schémas de déduction et non "des vérités", ainsi qu'ont remarqué Wittgenstein et Waismann. Aux conclusions de ces logiciens nous avons apporté un amendement: il ne s'agit pas de principes divers de déduction qui seraient répresentés par ces schémas, mais d'un seul principe de déduction, le principe de contradiction (ou son équivalent formel, le principe du tiers exclu) sur la base duquel sont construits toutes ces schémas comme expréssions plus ou moins compliquées, qui ne sont possibles et permises que parce qu'elles ont le caractère le plus général possible requis (et rien de plus): d'être non-contradictoires.
4. Ce fait explique d'autre part pourquoi la démonstration de non-contradiction et de complétitude pour les systèmes du calcul propositionnel de la logique classique est chose facile, tandis que les mêmes problèmes pour le système du calcul des fonctions (ou des prédicats) présentent des difficultés notables. En effet, par rapport au calcul propositionnel on a introduit

46. D. Hilbert and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, vol. III-ème éd. (1949), pp. 10-12.

47. *Métaphysique*, vol. IV, 1005 b.

en plus la notion de "fonction propositionnelle" et les quantificateurs de généralisation et d'existence, sans que ces expressions expriment par elles-mêmes le principe de contradiction (ou du tiers exclu). Or dans le calcul propositionnel il n'y a rien de tel: une variable propositionnelle est soumise, par son introduction même, aux principes logiques: elle est ou V ou F et ne peut être en même temps et V et F! Mais considérons l'expression:

$$(x) \,.\, fx,$$

"fx pour tout x". Ses valeurs de vérité ne sont pas définies par la matrice d'une variable propositionnelle p, qui est:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Si l'on nie la valeur de p on lui attribue l'autre valeur de vérité. Mais si nous nions la proposition générale $(x) \,.\, fx$, nous ne tombons pas sur une proposition fausse (si elle a été supposée vraie) mais sur la proposition:

$$\vdash : \sim [(x) fx] \,.\equiv .\, (\exists x) \,.\, \sim f(x)$$

qui laisse la possibilité qu'ils existent des x pour lesquels fx est vraie.

5. Enfin, le système formel de la logique a une valeur indiscutable qui d'ordre méthodologique et par cela pratique (le caractère pratique de la logique a été longuement discuté par les logiciens scolastiques, comme on l'a vu). Il va de soi que le système formel des *Principia Mathematica* (ainsi que les systèmes équivalents) n-a rien à voir en soi avec les conclusions développées dans notre étude; c'est seulement le système formel interpreté comme "système logique" qui est l'objet de l'analyse précédente.

Bucaresti, Roumanie