Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 3, July 1970

EIN NICHTKONSTRUKTIVER BEWEIS DES ERSTEN ε-THEOREMS

WILHELM K. ESSLER

Kaplan hat in [3] (S. 931) als Hilfssatz das erste ε-Theorem von Hilbert und Bernays ([2], S. 18 ff.) benutzt. Da er in seinen wissenschaftstheoretischen Theoremen nirgendwo eine finitäre, sondern stets die klassische zweiwertige Logik verwendet, erscheint es sinnvoll, nach einer kurzen nichtkonstruktiven Beweis dieses Hilfssatzes zu suchen, der ohne Umstände in wissenschaftstheoretischen Untersuchungen aufgeführt werden kann. Im folgenden wird ein derartiger Beweis erbracht.

Als Objektsprache wird eine Sprache der engeren Quantorenlogik verwendet. Dabei ist "v" das Adjunktionszeichen und "V" der Existenzquantor. Eine Interpretation J dieser Sprache ist eine nacheindeutige Relation, deren Vorbereich die Gesamtheit der Variablen und der nichtlogischen Konstanten ist und deren Nachbereich eine Gesamtheit bildet, die aus Dingen, Klassen von Dingen und Klassen von geordneten r-Tupeln von Dingen ($r > 1$) besteht, wobei den Gegenstandsausdrücken durch J Dinge, den Eigenschaftsausdrücken Klassen von Dingen und den r-stelligen Beziehungsausdrücken Klassen von geordneten r-Tupeln von Dingen zugeordnet werden.

Der Wahrheitsbegriff wird als dreistelliger Relationsausdruck verwendet und hat die Form "Der Satz ϕ ist bei der Interpretation J über dem Gegenstandsbereich B wahr". (Manchmal würde es ausreichen, ihn als zweistelligen Relationsausdruck zwischen Sätzen und Interpretationen anzugeben, wenn der Gegenstandsbereich B der Nachbereich der Relation J ist, falls deren Vorbereich auf die Gegenstandsausdrücke beschränkt wird; da die Gesamtheit der Gegenstandsausdrücke als nicht leer vorausgesetzt wird, ist damit automatisch auch B nicht leer.) Der Wahrheitsbegriff sei definitorisch oder axiomatisch so eingeführt, daß die beiden folgenden Sätze gelten:

Der Satz $\phi \vee \psi$ ist bei J über B wahr genau dann, wenn ϕ bei J über B wahr ist oder ψ bei J über B wahr ist.

Der Satz $\bigvee\xi\, \phi(\xi)$ ist bei J über B wahr genau dann, wenn es eine Interpretation K über B gibt, die sich von J höchstens bezüglich des Ausdrucks ξ unterscheidet, so daß $\phi(\xi)$ bei K über B wahr ist.

Received May 20, 1969

Der Begriff der logischen Folgerung (abgekürzt durch "$\Vdash$") sei in der üblichen Weise eingeführt: Aus einer Gesamtheit G von Sätzen folgt logisch der Satz ϕ $(G \Vdash \phi)$ genau dann, wenn ϕ dei allen Interpretationen J bezüglich jedes Gegenstandsbereichs B wahr ist, bei denen auch jeder Satz aus G wahr ist. Der Begriff der Ableitbarkeit (abgekürzt durch "$\vdash$") sei relativ auf den Kalkül des natürlichen Schließens definiert; daß aus einer Gesamtheit G von Sätzen die Aussage ϕ ableitbar ist (daß $G \vdash \phi$), besagt demnach, daß ϕ aus den Sätzen von G mittels gewisser Regelanwendungen erzeugbar ist (vgl. [1], S. 49 und S. 121f.). Für die engere Quantorenlogik gilt der folgende Endlichkeitssatz (vgl. z.B. [1], S. 291):

Wenn $G \Vdash \phi$, dann gibt es eine endliche Teilklasse F von G, so daß $F \Vdash \phi$.

Im folgenden darf daher stets ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß G endlich ist. Benötigt wird allerdings nur die sich daraus ergebende Folgerung, daß in den Sätzen aus G und in ϕ zusammen nur endlich viele Gegenstandsausdrücke (Konstanten oder Variablen) frei vorkommen. Das erste ε-Theorem wird nun in der folgenden Form bewiesen:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seien die Gegenstandsausdrücke, die in $\vee\xi\phi(\xi)$ oder in den Sätzen aus G frei vorkommen, weder in $\phi(\xi)$ noch in einem Satz aus G komme ein Quantor vor, und aus $\phi(\xi)$ entstehe durch freie Umbenennung von ξ zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jeder der Sätze $\phi(\alpha_1), \ldots, \phi(\alpha_n)$. Dann gilt:

(a) *Wenn* $G \Vdash \vee\xi\phi(\xi)$, *dann* $G \Vdash \phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha_n)$.
(b) *Wenn* $G \vdash \vee\xi\phi(\xi)$, *dann* $G \vdash \phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha_n)$.

Beweis: Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt.

(a) Angenommen, es gilt nicht: $G \Vdash \phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha_n)$, dann gibt es eine Interpretation (über einem gewissen Bereich), bei der alle Sätze aus G wahr sind, bei der jedoch $\phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha_n)$ falsch ist; J sei eine derartige Interpretation über einem solchen Bereich B. Zu zeigen ist, daß es dann eine Interpretation J' über einem Bereich B' gibt, bei der ebenfalls alle Sätze aus G wahr sind und bei der $\vee\xi\phi(\xi)$ falsch ist.

B' sei die Klasse jener Dinge aus B, die den Ausdrücken $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ auf Grund von J zugeordnet sind. J' sei die auf B' beschränkte Interpretation J, womit folgendes gemeint ist: J' ist bezüglich der Ausdrücke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit J identisch, ordnet den übrigen Gegenstandsausdrücken Dinge aus B' zu, ordnet den Eigenschaftsausdrücken die Durchschnitte aus B' mit jenen Klassen zu, die ihnen J zuordnet, und ordnet den r-stelligen Beziehungsausdrücken die auf B' beschränkten Klassen von geordneten r-Tupeln zu, die ihnen durch J zugeordnet werden.

Bei dieser Interpretation J' uber B' sind alle Sätze aus G wahr und ist $\phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha_n)$ falsch. Denn da in diesen Aussagen nach Voraussetzung keine Quantoren vorkommen, sind sie aussagenlogische Funktionen der in ihnen vorkommenden atomaren Sätze. Diese erhalten jedoch durch J' den gleichen Wahrheitswert wie durch J, da J' den Gegenstandsausdrücken, die in ihnen vorkommen, die gleichen Dinge zuordnet wie J und da sich die

Klassen von Dingen bzw. die Klassen von geordneten r-Tupeln von Dingen, die den darin vorkommenden Eigenschafts—bzw. r-stelligen Beziehungsausdrücken durch J' zugeordnet werden, nicht bezüglich der Dinge aus B' von jenen unterscheiden, die ihnen auf Grund von J zukommen. Da nun $\phi(\alpha_1) \vee \ldots \vee \phi(\alpha)$ bei J' über B' falsch ist und B' keine weiteren als die den Ausdrücken $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch J' zugeordneten Dinge enthält, ist $\phi(\xi)$ bei jeder Interpretation K über B' falsch, die sich von J' höchstens bezüglich ξ unterscheidet. Folglich ist auch $V\xi\phi(\xi)$ bei J' über B' falsch, was zu zeigen war.

(b) Diese Teilbehauptung ergibt sich aus (a) auf Grund der Vollstandigkeit und Korrektheit des Kalküls des natürlichen Schließens (vgl. z.B. [1], S.269-290).

Der Beweis für die Erweiterung des ersten ε-Theorems (vgl. [2], 5.32), verlauft ganz analog, nur daß hier bei r Existenzquantoren n^r Adjunktionsglieder verwendet werden müssen.

LITERATUR

[1] Essler, Wilhelm K., *Einführung in die Logik*, Stuttgart (1969).

[2] Hilbert, D., and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik, Zweiter Band*, Berlin (1939).

[3] Kaplan, David, "Explanation Revisited" in: *Philosophy of Science*, 28 (1961), pp. 429-436.

[4] Loś, J., "Algebraic Treatment of the Methodology of Deductive Systems," *Studia Logica*, 2 (1955), pp. 151-212.

[5] Rasiowa, H., "On the ε-Theorems," *Fundamenta Mathematicae*, 43 (1956), pp. 156-165.

Universität München
München, Germany