Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XV, Number 2, April 1974
NDJFAM

# ÜBER EINE ERWEITERUNG DER ALGEBRAISCHEN OPERATIONEN

GÜNTHER FREI-IMFELD

**1 Einleitung*** Es ist bekannt, wie man mit Hilfe der Nachfolgeroperation die Addition, die Multiplikation und die Potenz für natürliche Zahlen definiert. Dem liegt zu Grunde, daß die Addition eine iterierte Nachfolgeroperation, die Multiplikation eine iterierte Addition und die Potenz eine iterierte Multiplikation ist (Ausführen derselben Operation eine gewisse Anzahl von Malen hintereinander). Die Nachfolgeroperation induziert überdies auf der Menge der natürlichen Zahlen eine Ordnung, die sich in bestimmter Weise auch auf die 3 Operationen überträgt. Schon früh hat sich die Frage gestellt nach der Umkehrung dieser Operationen und der Erweiterung der natürlichen Zahlen zu einem Bereich, in welchem die Umkehroperationen uneingeschränkt (eventuell mit vereinzelten Ausnahmen) ausführbar sind. Auf bekannte Weise konstruiert man mit Hilfe von Aequivalenzklassen zur Addition die negativen Zahlen und zur Multiplikation die rationalen Zahlen, so daß die Umkehroperationen der Addition und Multiplikation im neuen Bereiche uneingeschränkt ausführbar werden. Diese Konstruktion beruht ganz wesentlich auf der Kommutativität und Assoziativität von Addition und Multiplikation, welches erstere Gesetz auch dafür verantwortlich ist, daß Addition und Multiplikation je nur eine Umkehroperation besitzen. Das Fehlen der Kommutativität und auch der Assoziativität für die Potenz erlaubt dieselbe Konstruktion für die beiden Umkehroperationen der Potenz, das Radizieren und das Logarithmieren, nicht mehr. Um nun das Radizieren und Logarithmieren allgemein durchzusetzen, verließ man den eingeschlagenen algebraischen Pfad und griff zu einem "Gewaltmittel", der Konstruktion der reellen Zahlen. Das der Konstruktion der reellen Zahlen zu Grunde liegende Prinzip ist eigentlich ein "geometrisches" und der Algebra fremd (und beruht auf der Erkenntnis der Griechen, daß die "Menge der Strecken viel größer ist als

*Teile der Arbeit wurden gefördert durch NRC Grant Nr. A 7842.

*Received July 1, 1972*

die Menge der rationalen Zahlen'' wegen der Existenz inkommensurabler Strecken wie $\sqrt{2}$ und $\pi$). Im Falle des Radizierens gelang es teilweise, wieder zur Algebra zurückzukehren. Anstelle der Lösbarkeit von $x^n - a = 0$ betrachtete man allgemeiner die Lösbarkeit von $f(x) = 0$, wo $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom in $x$ ist. Die Menge aller dieser Lösungen, d.h. die Menge aller algebraischen Zahlen, ist nach dem Gauss'schen Fundamentalsatz der Algebra eine abzählbare Untermenge der Menge aller komplexen Zahlen. Wie schließlich die Radikalzahlen (als Lösungen der ersten Umkehroperation der Potenz mit $n \in Q$) in der Menge aller algebraischen Zahlen liegen, wurde dann durch die Galois-Theorie gelöst. Für die Logarithmen ist ein analoges Vorgehen bisher, soweit mir bekannt ist, nicht durchgeführt worden.

Ziel der vorliegenden Note ist es, einen Weg vorzuschlagen, wie man auf algebraische Weise die Menge der reellen, nicht algebraischen Zahlen mehr ausschöpfen könnte. In **2** wird zunächst in Erweiterung der 3 elementaren Rechenarten eine unendliche Menge von algebraischen Operationen über den natürlichen Zahlen eingeführt, und in **3** wird mit Hilfe der Ordnung die Eindeutigkeit der Umkehroperation im Bereiche der natürlichen Zahlen nachgewiesen.

**2** Die natürlichen Zahlen und die natürlichen Operationen Es ist bekannt, wie man die Multiplikation als spezielle Addition und die Potenz als spezielle Multiplikation gewinnen kann. Diesen Prozeß wollen wir über die Potenz hinaus fortsetzen.

Wir beginnen ganz von vorne und konstruieren zwei Arten von Mengen: $\mathcal{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen, deren Elemente wir mit Typen des normalen Drucksatzes wie $1, 2, 3, \ldots, M$ (Variable), ... bezeichnen und $O$, die Menge der natürlichen Operationen, deren Elemente mit den entsprechenden Typen des fetten Drucksatzes wie $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \mathbf{M}$ (Variable), ... bezeichnet seien. Die Art der Erzeugung von $\mathcal{N}$ und $O$ und die gegenseitigen Beziehungen ihrer Elemente seien durch die folgenden Axiome festgelegt.

A) Axiome der Erzeugung

(A1) *$\mathbf{1}$ ist eine natürliche Operation;* d.h. $\mathbf{1} \in O$

(A2) *Ist $\mathbf{A} \in O$, so ist auch $\mathbf{1A} \in O$*

(A3) *1 ist eine natürliche Zahl,* d.h. $1 \in \mathcal{N}$

(A4) *Ist $A \in \mathcal{N}$, so ist auch $\mathbf{1}A \in \mathcal{N}$*

Den Operator $\mathbf{1}$ nennen wir den *Nachfolgeroperator.* Er operiert einstellig von links auf $\mathcal{N}$ und auf $O$. $\mathbf{1}\Phi$ ist der *Nachfolger* von $\Phi \in \mathcal{N} \cup O$ (große griechische Buchstaben sollen eine Variable bezeichnen, die sowohl für eine natürliche Zahl als auch für eine natürliche Operation stehen kann).

B) Gleichheitsaxiome

Um zu erreichen, daß zwei aus $\mathbf{1}$ und 1 aufgebaute Zeichenreihen $\Phi$ und $\Theta$ dann und nur dann gleich sind (in Zeichen: =), falls sie dieselben Zeichen und in gleicher Reihenfolge enthalten, fordert man

(B1) *Ist* $\mathbf{1}\Phi = \mathbf{1}\Theta$, *dann ist auch* $\Phi = \Theta$ $\quad (\Phi, \Theta \in \mathcal{N} \cup O)$

(B2) $\mathbf{1A} \neq \mathbf{1}$, *für jedes* $\mathbf{A} \in O$,
$1A \neq 1$, *für jedes* $A \in \mathcal{N}$,

und die logischen Postulate des tertium non datur

(L1) $\Phi = \Theta$ *oder* $\Phi \neq \Theta$

und des Gleichheitsprinzipes

$\Phi = \Phi$.

(L2) *Ist* $\Phi = \Theta$, *und gilt eine Aussageform über* $\Phi$, *so gilt die entsprechende Aussageform auch über* $\Theta$.

Damit hat man dann auch

(B3) $1 = 1$
$\mathbf{1} = \mathbf{1}$

(B4) *Ist* $\Phi = \Theta$, *dann ist auch* $\mathbf{1}\Phi = \mathbf{1}\Theta$.

*Beweis:* (B3) folgt unmittelbar aus (L2). (B4) folgt auf folgende Weise:

a) Es sei $\Phi = \Sigma$ die Aussageform über $\Phi$, dann ist mit (L2):

$$\Phi = \Theta \text{ und } \Phi = \Sigma \rightarrow \Theta = \Sigma.$$

b) Daraus folgt mit $\Phi$ an Stelle von $\Sigma$:

$$\Phi = \Theta \text{ und } \Phi = \Phi \rightarrow \Theta = \Phi.$$

c) Schließlich sei $\mathbf{1}\Phi = \Delta$ die Aussageform über $\Phi$, dann ist mit (L2)

$$\Phi = \Theta \text{ und } \mathbf{1}\Phi = \Delta \rightarrow \mathbf{1}\Theta = \Delta$$

und mit b) und a)

$$\Delta = \mathbf{1}\Phi \text{ und } \Delta = \mathbf{1}\Theta \rightarrow \mathbf{1}\Phi = \mathbf{1}\Theta.$$

Zur genauen Behandlung der hierher gehörenden logischen und axiomatischen Teile vergleiche man [2], besonders die §§9 und 13. Der Nachfolger von $\Phi \in \mathcal{N} \cup O$ ist damit eindeutig bestimmt. Weiter sei festgesetzt, daß die Operation $\mathbf{1}$, falls mehrfach auf ein $\Phi$ angewandt, stets von rechts nach links auszuführen sei, falls Klammern nichts anderes andeuten, d.h.

Definition 1: $\mathbf{11}\Phi = \mathbf{1}(\mathbf{1}\Phi)$

Wir ersetzen jetzt wie üblich die Zeichenreihen 1, 11, 111, etc. durch die kürzeren Symbole 1, 2, 3, etc. und ($\mathbf{1}$), ($\mathbf{11}$), ($\mathbf{111}$) entsprechend durch $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, etc., deren Menge wir als die Menge der natürlichen Zahlen $\mathcal{N}$, bzw. als die Menge der natürlichen Operationen $O$ bezeichnen.

Ist $\underbrace{1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,1}_{N\,-\,1 \text{ mal}}1 = N \in \mathcal{N}$, so sei $\underbrace{\mathbf{1}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\mathbf{1}}_{N\,-\,1 \text{ mal}}\mathbf{1} = \boldsymbol{N} \in O$

C) Axiome der vollständigen Induktion

(C1) *Gilt eine Aussageform über* 1, *und wenn diese Aussageform, falls sie* *über irgend eine natürliche Zahl A gilt, dann auch über den Nachfolger* **1***A gilt, so gilt diese Aussageform über jede natürliche Zahl.*

(C2) *Gilt eine Aussageform über* **1**, *und wenn diese Aussageform, falls sie über irgend eine natürliche Operation* **A** *gilt, dann auch über ihren Nachfolger* **1A** *gilt, so gilt diese Aussageform über jede natürliche Operation.*

D) Verknüpfungsaxiome

Zwischen den Elementen in $O$ und $\mathcal{N}$ sollen die folgenden Beziehungen gelten

(D1) $A\,\mathbf{2}\,1 = \mathbf{1}A$, *für alle* $A \in \mathcal{N}$
$A\mathbf{2}(\mathbf{1}B) = \mathbf{1}(A\,\mathbf{2}\,B)$, *für alle* $A, B \in \mathcal{N}$

(D2) $A(\mathbf{1}\,\mathbf{M})1 = A$, *für alle* $A \in \mathcal{N}$ *und* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ *in* $O$
$A(\mathbf{1}\,\mathbf{M})(\mathbf{1}\,B) = A\,\mathbf{M}(A\,(\mathbf{1}\,\mathbf{M})B)$, *für alle* $A, B \in \mathcal{N}$ *und alle* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ *in* $O$.

Jedes $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ ist also eine zweistellige Operation, die $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ eindeutig auf $\mathcal{N}$ abbildet. Die Eindeutigkeit folgt mit den Axiomen (C1) und (C2) aus der Eindeutigkeit der Nachfolgeroperation **1**. Für $\mathbf{M} = \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, erhält man die natürlichen Operationen der Addition, Multiplikation und Potenz von natürlichen Zahlen. Die Operation **5** kann als "Spezielles Potenzieren" aufgefaßt werden:

$$a\,\mathbf{5}\,n = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}_{n \text{ mal}} = \underbrace{a \exp a \exp a \ldots \exp a}_{n \text{ mal}}.$$

Wir wollen **5** die Operation der *Erhöhung* nennen.

Man gewinnt also auf diese Weise eine Menge $O$ von abzählbar unendlich vielen natürlichen Operationen, von denen jede aus der vorhergehenden durch "Spezialisierung" hervorgeht. Für die Operationen **2**, **3**, und **4** erhält man nun die üblichen Gesetze der Addition, Multiplikation und der Potenz (vergl. z.B. [1], Kapitel IX, XI-XIII): ausführlicher gilt für beliebige $A, B, C \in \mathcal{N}$:

(1) $A\mathbf{2}B = B\mathbf{2}A$
(2) $(A\,\mathbf{2}\,B)\,\mathbf{2}\,C = A\,\mathbf{2}(B\,\mathbf{2}\,C)$
(3) $A\,\mathbf{3}\,B = B\,\mathbf{3}\,A$
(4) $(A\,\mathbf{3}\,B)\mathbf{3}\,C = A\,\mathbf{3}(B\,\mathbf{3}\,C)$
(5) $A\,\mathbf{3}(B\,\mathbf{2}\,C) = (A\,\mathbf{3}\,B)\,\mathbf{2}\,(A\,\mathbf{3}\,C)$
(6) $(A\,\mathbf{2}\,B)\,\mathbf{3}\,C = (A\,\mathbf{3}\,C)\,\mathbf{2}\,(B\,\mathbf{3}\,C)$
(7) $A\mathbf{4}(B\,\mathbf{2}\,C) = (A\,\mathbf{4}\,B)\,\mathbf{3}\,(A\,\mathbf{4}\,C)$
(8) $(A\,\mathbf{4}\,B)\,\mathbf{4}\,C = A\,\mathbf{4}\,(B\,\mathbf{3}\,C)$
(9) $(A\,\mathbf{3}\,B)\,\mathbf{4}\,C = (A\,\mathbf{4}\,C)\,\mathbf{3}\,(B\,\mathbf{4}\,C)$

Die Potenz **4** ist im allgemeinen nicht mehr kommutativ und auch nicht assoziativ. Das gleiche gilt für $\mathbf{5}$ und vermutlich für alle höheren Operationen.

Wie aus (D2) hervorgeht, wird "von rechts nach links gerechnet". Um Klammern zu sparen setzen wir fest

Definition 2: $A\,\mathbf{M}\,B\,\mathbf{M}\,C = A\,\mathbf{M}(B\,\mathbf{M}\,C)$, für alle $A, B, C \in \mathcal{N}$ und alle $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ in $\mathcal{O}$.

Man hat überdies die folgenden ganz einfachen Eigenschaften

(10) $N\,\mathbf{M}\,1 = N$, *für alle* $N \in \mathcal{N}$ *und alle* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}$, *in* $\mathcal{O}$.

Dies folgt unmittelbar aus (D2).

(11) $1\,\mathbf{M}\,N = 1$, *für alle* $N \in \mathcal{N}$ *und für alle* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ *in* $\mathcal{O}$.

*Beweis:* (mit doppelter vollständiger Induktion nach $\mathbf{M}$ und $N$)

($O_0$) Zunächst gilt (11) für $\mathbf{M} = \mathbf{4}$: $1\,\mathbf{4}\,1 = 1$ (nach (D2)), und falls $1\,\mathbf{4}\,N = 1$ für irgend ein $N \in \mathcal{N}$ gilt, so folgt wegen (D2)

$$1\,\mathbf{4}\,(1\,N) = 1\,\mathbf{3}(1\,\mathbf{4}\,N) = 1\,\mathbf{3}\,1 = 1.$$

Also gilt $1\,\mathbf{4}\,N = 1$ für alle $N \in \mathcal{N}$ (nach (C1)).

($O \to O + 1$) Es gelte nun $1\,\mathbf{M}\,N = 1$ für irgend ein $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ und für alle $N \in \mathcal{N}$. Es ist nach (C2) zu zeigen, daß dann $1(\mathbf{1}\,\mathbf{M})N = 1$ ebenfalls für alle $N$ gilt.

Wenden wir wiederum (C1) an:

$1(\mathbf{1}\,\mathbf{M})1 = 1$ (nach (D2)), und falls $1(\mathbf{1}\,\mathbf{M})N = 1$ für irgend ein $N \in \mathcal{N}$ gilt, so folgt wegen (D2)

$$1(\mathbf{1}\,\mathbf{M})(1\,N) = 1\,\mathbf{M}(1(\mathbf{1}\,\mathbf{M})N) = 1\,\mathbf{M}\,1 = 1.$$

Nach (C2) gilt also $1\,\mathbf{M}\,N = 1$ für alle $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ und für alle $N \in \mathcal{N}$.

(12) $2\,\mathbf{M}\,2 = 4$, für alle $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$.

*Beweis*: ($O_0$) Zunächst gilt dies für $\mathbf{M} = \mathbf{2}$. Mit zweimaliger Anwendung von (D1) ergibt sich nämlich

$$2\,\mathbf{2}\,2 = 2\,\mathbf{2}(1\,1) = \mathbf{1}(2\,\mathbf{2}\,1) = \mathbf{1}(1\,2) = 4.$$

($O \to O + 1$) Weiter sei $2\,\mathbf{M}\,2 = 4$ für irgend ein $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$. Dann folgt mit (D2)

$$2(\mathbf{1}\,\mathbf{M})2 = 2(\mathbf{1}\,\mathbf{M})(1\,1) = 2\,\mathbf{M}(2(\mathbf{1}\,\mathbf{M})1) = 2\,\mathbf{M}\,2 = 4.$$

Nach (C2) gilt (12) jetzt allgemein für $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$.

**3 Ordnung** Auf natürliche Weise läßt sich nun in $\mathcal{N}$ und $\mathcal{O}$ je eine Ordnung definieren durch

Definition 3:
$$1 \leqslant A, \text{ für alle } A \in \mathcal{N}$$
$$\mathbf{1} \leqslant \mathbf{A}, \text{ für alle } \mathbf{A} \in \mathcal{O}$$
Ist $\Phi \leqslant \Theta$, so ist auch $\mathbf{1}\,\Phi \leqslant \mathbf{1}\,\Theta$, für alle $\Phi, \Theta \in \mathcal{N} \cup \mathcal{O}$.

Man hat dann die folgenden Eigenschaften (vergl. [2], §13) ($\Phi$, $\Theta$ und $\Sigma$ sind stets in $\mathcal{N} \cup O$, $A$ in $\mathcal{N}$ und $\mathbf{A}$ in $O$.)

(13) *Ist* $\mathbf{1}\,\Phi \leqslant \mathbf{1}\,\Theta$, *so ist auch* $\Phi \leqslant \Theta$.
(14) $\mathbf{1}\,A \nleqslant 1$, *d.h. es gilt nicht* $\mathbf{1}\,A \leqslant 1$.
(15) $\mathbf{1}\,\mathbf{A} \nleqslant \mathbf{1}$.
(16) $\Phi \leqslant \Phi$.
(17) *Ist* $\Phi \leqslant \Theta$ *und* $\Theta \leqslant \Sigma$, *dann ist* $\Phi \leqslant \Sigma$.
(18) *Ist* $\Phi \leqslant \Theta$ *und* $\Theta \leqslant \Phi$, *dann ist* $\Phi = \Theta$.
(19) *Es ist* $\Phi \leqslant \Theta$ *oder* $\Theta \leqslant \Phi$.
(20) *Es ist* $\Phi \leqslant \Theta$ *oder* $\Phi \nleqslant \Theta$.

Definition 4:
$$\Phi > \Theta :\rightleftarrows \Phi \nleqslant \Theta$$
$$\Phi < \Theta :\rightleftarrows \Theta > \Phi$$
$$\Phi \geqslant \Theta :\rightleftarrows \Theta \leqslant \Phi$$

(21) *Es ist* $\Theta \leqslant \Phi$ *dann und nur dann, wenn* $\Theta = \Phi$ *oder* $\Theta < \Phi$ *ist.*
(22) *Es gilt genau eine der Beziehungen* $\Phi < \Theta$, $\Phi = \Theta$, $\Phi > \Theta$.
(23) *Ist* $\Phi < \Theta$ *und* $\Theta \leqslant \Sigma$, *so ist* $\Phi < \Sigma$.
(24) *Ist* $\Phi < \Theta$ *und* $\Theta < \Sigma$, *so ist* $\Phi < \Sigma$.
(25) *Ist* $\Theta < \Phi$, *so ist* $\mathbf{1}\,\Theta < \mathbf{1}\,\Phi$.
(26) *Es ist* $\Phi \leqslant \Theta$ *dann und nur dann, wenn* $\Phi < \mathbf{1}\,\Theta$ *ist.*

Die Ordnung überträgt sich nun auf folgende Weise auf die Operationsstufen. Zunächst gilt für die Addition ($\mathbf{M} = \mathbf{2}$) für beliebige $A, B, C, D \in \mathcal{N}$ (vergl. [2], §15):

Satz 1: *Ist* $A < B$, *so ist* $A\,\mathbf{2}\,C < B\,\mathbf{2}\,C$.
Satz 2: *Ist* $A < B$ *und* $C < D$, *so ist* $A\,\mathbf{2}\,C < B\,\mathbf{2}\,D$.
Satz 3: *Ist* $A\,\mathbf{2}\,C = B\,\mathbf{2}\,C$, *so ist* $A = B$.
Satz 4: *Es ist* $A < B$ *dann und nur dann, wenn ein* $C \in \mathcal{N}$ *existiert, so daß* $A\,\mathbf{2}\,C = B$ *ist.*

Das nächste Ziel ist nun, Satz 3 für beliebige $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ zu beweisen. Zunächst zwei Hilfssätze:

Lemma 5: *Gilt für ein festes* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ *mit* $A < B$ *stets auch* $C\,\mathbf{M}\,A < C\,\mathbf{M}\,B$ *für alle* $A, B, C \in \mathcal{N}$ *und* $C \neq 1$, *so gilt für dieses* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ $D < E\,\mathbf{M}\,D$ *für alle* $D$, $E \in \mathcal{N}$ *und* $E \neq 1$.

*Beweis:* (Mit vollständiger Induktion nach $D$).

($N_0$) $1 < E \leqslant E\,\mathbf{M}\,1$ für alle $E \neq 1$ (nach (D2), (21), (16), (26), und (D1)), also $1 < E\,\mathbf{M}\,1$ (nach (24)).

($N \rightarrow N+1$) Es sei $D < E\,\mathbf{M}\,D$ für ein beliebiges $D \in \mathcal{N}$ und für alle $E \in \mathcal{N}$ und $E \neq 1$. Dann gilt nach (25), (26) und (16) und der Voraussetzung des Lemmas

$$\mathbf{1}\,D < \mathbf{1}(E\,\mathbf{M}\,D) < \mathbf{1}(E\,\mathbf{M}(\mathbf{1}\,D))$$

und damit nach (26) $\mathbf{1}(E\,\mathbf{M}\,D) \leqslant E\,\mathbf{M}(\mathbf{1}\,D)$ und mit (23) $\mathbf{1}\,D < E\,\mathbf{M}(\mathbf{1}\,D)$.

Lemma 6: *Gilt für ein festes* $\mathsf{M} \neq 1$ *mit* $A < B$ *stets auch* $C\mathsf{M}A < C\mathsf{M}B$ *für alle* $A, B, C \in \mathcal{N}$ *mit* $C \neq 1$, *so gilt für dieses* $\mathsf{M} \neq 1$ $\quad E(1\,\mathsf{M})A < E(1\,\mathsf{M})(A\,2\,D)$, *für alle* $A$, $D$, $E \in \mathcal{N}$ *mit* $E \neq 1$.

*Beweis:* (Mit vollständiger Induktion nach $C$).

($N_0$) $E(1\,\mathsf{M})A < E\mathsf{M}(E(1\,\mathsf{M})A) = E(1\,\mathsf{M})(1A) = E(1\,\mathsf{M})(A\,2\,1)$ nach Lemma 5, (D2) und (D1).

($N \to N+1$) Es sei $E(1\,\mathsf{M})A < E(1\,\mathsf{M})(A\,2\,D)$ für ein beliebiges $D \in \mathcal{N}$ und alle $A$ und $E$ in $\mathcal{N}$ mit $E \neq 1$. Dann folgt mit Lemma 5, (D2) und (D1)

$$E(1\,\mathsf{M})(A\,2\,D) < E\mathsf{M}(E(1\,\mathsf{M})(A\,2\,D)) = E(1\,\mathsf{M})(1(A2D)) = E(1\,\mathsf{M})(A\,2(1\,D))$$

und also nach (24) $E(1\,\mathsf{M})A < E(1\,\mathsf{M})(A\,2(1\,D))$.

Jetzt beweisen wir die zu Satz 1 analogen Sätze.

Satz 7: *Ist* $A < B$, *so ist* $C\,\mathsf{M}A < C\,\mathsf{M}B$, *für alle* $A$, $B$, $C \in \mathcal{N}$ *mit* $C \neq 1$ *und alle* $\mathsf{M} \in O$ *mit* $\mathsf{M} \neq 1$.

*Beweis:* (Mit vollständiger Induktion nach $\mathsf{M}$).

($O_0$) Satz 7 ist richtig für $\mathsf{M} = 2$ (nach Satz 1 und Formel (1)).
($O \to O+1$) Es sei mit $A < B$ auch $C\mathsf{M}A < C\mathsf{M}B$ für ein beliebiges festes $\mathsf{M} \neq 1$ in $O$ und für alle $A$, $B$, $C \in \mathcal{N}$ mit $C \neq 1$. Es ist zu zeigen, daß dann auch $C(1\,\mathsf{M})A < C(1\,\mathsf{M})B$ für alle $A$, $B$, $C \in \mathcal{N}$ mit $C \neq 1$ gilt. Wegen $A < B$ existiert nach Satz 4 ein $D$, so daß $A\,2\,D = B$ ist. Mit Lemma 6 folgt jetzt für alle $C \neq 1$ $\quad C(1\,\mathsf{M})A < C(1\,\mathsf{M})(A\,2\,D) = C(1\,\mathsf{M})B$.

Satz 8: *Ist* $A < B$, *so ist* $A\mathsf{M}C < B\mathsf{M}C$ *für alle* $A$, $B$, $C \in \mathcal{N}$ *und für alle* $\mathsf{M} \in O$ *mit* $\mathsf{M} \neq 1$.

*Beweis:* (Mit doppelter vollständiger Induktion nach $\mathsf{M}$ und $C$).

($O_0$) Satz 7 ist richtig für $\mathsf{M} = 2$ (nach Satz 1).
($O \to O+1$) Es sei mit $A < B$ auch $A\mathsf{M}C < B\mathsf{M}C$ für ein beliebiges festes $\mathsf{M} \neq 1$ in $O$ und für alle $A$, $B$, $C$ in $\mathcal{N}$. Es ist zu zeigen, daß dann auch $A(1\,\mathsf{M})C < B(1\,\mathsf{M})C$ für alle $A$, $B$, $C \in \mathcal{N}$ gilt.

Wenden wir vollständige Induktion nach $C$ an.

($N_0$) $A(1\,\mathsf{M})1 = A < B = B(1\,\mathsf{M})1$ (nach (D2)).

($N \to N+1$) Es sei $A(1\,\mathsf{M})C < B(1\,\mathsf{M})C$ für ein beliebiges festes $C$. Dann folgt mit (D2), der Induktionsvoraussetzung (O) und der Induktionsvoraussetzung (N) zusammen mit Satz 7 und wegen $B > A \geqslant 1$.

$$A(1\,\mathsf{M})(1\,C) = A\mathsf{M}(A(1\,\mathsf{M})C) < B\mathsf{M}(A(1\,\mathsf{M})C) < B\mathsf{M}(B(1\,\mathsf{M})C)) = B(1\,\mathsf{M})(1\,C).$$

Die den Sätzen 2 und 3 entsprechenden Sätze ergeben sich jetzt unmittelbar für beliebige $\mathsf{M} \neq 1$.

Satz 9: *Ist* $A < B$ *und* $C < D$, *so ist* $A\mathsf{M}C < B\mathsf{M}D$ *für alle* $A$, $B$, $C$, $D \in \mathcal{N}$ *und für alle* $\mathsf{M} \neq 1$.

*Beweis:* Aus $A < B$ folgt wegen Satz 8 $A \mathbf{M} C < B \mathbf{M} C$, und wegen Satz 7 und $B > A \geqslant 1$ und $C < D$ $B \mathbf{M} C < B \mathbf{M} D$, also $A \mathbf{M} C < B \mathbf{M} D$.

Satz 10: *Aus* $A \mathbf{M} B = A \mathbf{M} C$ *folgt* $B = C$ *für alle* $A, B, C \in \mathcal{N}$ *mit* $A \neq 1$ *und alle* $\mathbf{M} \neq 1$.

*Beweis*: Wäre $B \neq C$, so wäre entweder $B < C$ oder $B > C$ (nach (22)). Mit $B < C$ wäre dann nach Satz 7 $A \mathbf{M} B < A \mathbf{M} C$ und ebenso mit $C < B$ $A \mathbf{M} C < A \mathbf{M} B$ also in jedem Falle $A \mathbf{M} B \neq A \mathbf{M} C$. Also muß $B = C$ sein.

*Bemerkung:* Für $\mathbf{M} = \mathbf{2}, \mathbf{3}$ fällt die Bedingung $A \neq 1$ weg. (Vergl. Satz 3 und (D2) mit Formel (3)).

Satz 11: *Aus* $A \mathbf{M} B = C \mathbf{M} B$ *folgt* $A = C$ *für alle* $A, B, C \in \mathcal{N}$ *und alle* $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$.

*Beweis:* Wäre $A \neq C$, so wäre entweder $A < C$ oder $A > C$. Mit $A < C$ wäre nach Satz 8 $A \mathbf{M} B < C \mathbf{M} B$ und ebenso mit $C < A$ $C \mathbf{M} B < A \mathbf{M} B$ also stets $A \mathbf{M} B \neq C \mathbf{M} B$. Also muß $A = C$ sein.

**4** Das Problem der Umkehroperationen Es wäre wünschenswert, erstens für jede Operation $\mathbf{M}$ den Zahlbereich $\mathcal{N}$ so minimal zu erweitern, daß die beiden Umkehroperationen darin gerade lösbar werden, und zweitens einen Bereich zu konstruieren, in welchem nicht nur $\mathbf{M}$ umkehrbar wird, sondern in welchem alle Operationen zwischen $\mathbf{2}$ und $\mathbf{M}$ und ihre Umkehroperationen uneingeschränkt (event. von einigen speziellen Ausnahmen abgesehen) ausführbar werden. Da aber beinahe alle üblichen Rechenbeziehungen auf der allgemeinen Stufe $\mathbf{M}$ nicht mehr gelten, ist dies wohl eine außerordentlich schwierige Aufgabe. Wir bemerken daher nur folgendes.

Es sei $\mathbf{M} \neq \mathbf{1}$ beliebig, aber fest. Gibt es für ein Paar $B, C \in \mathcal{N}$ ein $X \in \mathcal{N}$, so daß $X \mathbf{M} B = C$ ist, so setzen wir $X = B \mathbf{M}' C$ und nennen $\mathbf{M}'$ die *linksinverse Operation* zu $\mathbf{M}$. Gibt es analog für $B, C \in \mathcal{N}$ ein $Y \in \mathcal{N}$, so daß $A \mathbf{M} Y = C$ ist, so setzen wir $Y = A \mathbf{M}'' C$ und nennen $\mathbf{M}''$ die *rechtsinverse Operation* zu *M*. (Im Falle $\mathbf{M} \geqslant \mathbf{4}$ muß wegen (11) das Paar $(A, C)$ verschieden sein vom Paar $(1, D)$, wobei $D \in \mathcal{N}$ aber $D \neq \mathbf{1}$ ist).

Ergänzend kann man für den Fall $\mathbf{M} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}'$ definieren durch:

$$\mathbf{1}' C = X : \rightleftarrows \mathbf{1} X = C \text{ für } X \text{ und } C \text{ in } \mathcal{N}.$$

$\mathbf{1}'$ ist die Vorgängeroperation.

Aufgrund der Kommutativität (1) und (3) für $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3}$ ist $\mathbf{2}' = \mathbf{2}''$ und $\mathbf{3}' = \mathbf{3}''$. $\mathbf{2}'$ ergibt die Subtraktion, $\mathbf{3}'$ die Division, $\mathbf{4}'$ das Radizieren und $\mathbf{4}''$ das Logarithmieren in $\mathcal{N}$. Es ist bekannt, wie man bezüglich $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3}$ den Zahlbereich $\mathcal{N}$ so minimal erweitern kann, daß $\mathbf{2}'$ und $\mathbf{3}'$ im neuen Zahlbereich uneingeschränkt ausführbar werden. Die Minimalität wird erreicht durch die Forderung, daß gewisse Eigenschaften, die sich für die natürlichen Zahlen aus den Axiomen ergaben, auch für die neuen Zahlen gelten sollen (Permanenzprinzip).

Die zu $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3}$ gehörigen minimalen Erweiterungsbereiche von $\mathcal{N}$ sind $\mathcal{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen und $Q^+$, die Menge der positiven rationalen Zahlen (ohne die Null). Es ist möglich mit $Q$, der Menge der rationalen

Zahlen, einen Zahlbereich zu schaffen, in welchem **2**, **2'**, **3** und **3'** gleichzeitig stets (mit einer Ausnahme) ausführbar sind. (Ein solcher minimaler Bereich läßt sich auch für $\mathbf{M} = 1$ schaffen.)

Auf der Stufe **4** scheint man aber erst das erste der beiden Probleme gelöst zu haben. Die Menge der algebraischen Zahlen $\mathcal{A}$ hat nämlich die Eigenschaft, daß sie $B\mathbf{4}'C$ für $B$, $C \in \mathcal{N}$, ja sogar für $B \in Q$ und $C \in \mathcal{A}$ stets enthält. Auch ist $\mathcal{A}$ gegenuber den Operationen **2** und **3** und ihren Umkehroperationen abgeschlossen. Hingegen stellt sie noch nicht den allgemeinsten minimalen Bereich dar, in welchem **4**, **4'** und **4''** uneingeschränkt ausführbar werden. Man hat noch nicht einmal einen minimalen Bereich angeben können, in welchem neben den niederen Operationen auch noch wenigstens eine der Operationen **4**, **4'** oder **4''** stets ausführbar ist.

Für die nächsthöhere Operation **5** zeigen wir, daß $X\mathbf{5}B = C$ für $B$, $C \in \mathcal{N}$ mit reellen Zahlen stets lösbar ist, daß aber die Lösungen, wenigstens im Falle $B = 2$, im allgemeinen nicht algebraisch sind. Statt $X\mathbf{5}B$ schreiben wir kürzer $X^{\underline{B}}$.

Satz 12: *$x^{\underline{n}} = c$ ist für beliebige $n$, $c \in \mathcal{N}$ im Intervall $1 \leqslant x < \infty$ stets eindeutig reell lösbar.*

*Beweis:*

a) Für $n = 1$ ist $x^{\underline{1}} = x = c$ trivialerweise eindeutig lösbar.
b) Für $n = 2$ ist $x^{\underline{2}} = x^x = (\mathrm{e}^{\log x})^x = \mathrm{e}^{x \log x}$ eine stetige und sogar differenzierbare Funktion für alle $x > 0$. Für $1 \leqslant x < \infty$ ist ihr Wertebereich $W = \{y \in \mathcal{R} \mid 1 \leqslant y < \infty\}$. Überdies ist die Funktion dort streng monoton wachsend, denn ihre Ableitung $x^{\underline{2}}(\log x + 1)$ ist dort $\left(\text{sogar für } x > \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ streng positiv, also hat $x^{\underline{2}} = c$ für $c \in \mathcal{N}$ genau eine reelle positive Lösung im Intervall $1 \leqslant x < \infty$. $\Big($Das Minimum der Funktion $x^{\underline{2}}$ liegt übrigens bei $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$, und sie strebt für $x \to 0$ gegen 1.$\Big)$
c) Es sei $x^{\underline{n}} = c$ für alle $c \in \mathcal{N}$ im Intervall $1 \leqslant x < \infty$ eindeutig reell lösbar, und überdies sei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^{\underline{n}}$ existent und positiv für alle $x \geqslant 1$. Dann ist $x^{\underline{n+1}} = x^{x^{\underline{n}}} = (\mathrm{e}^{\log x})^{x^{\underline{n}}} = \mathrm{e}^{x^{\underline{n}} \log x}$ stetig und differenzierbar und streng monoton wachsend für $x \geqslant 1$, denn $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^{\underline{n+1}} \left(\frac{x^{\underline{n}}}{x} + \log x\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\underline{n}}\right)$ ist dort existent und positiv. Für $1 \leqslant x < \infty$ ist ihr Wertebereich $W = \{y \in \mathcal{R} \mid 1 \leqslant y < \infty\}$. Damit ist $x^{\underline{n}} = c$ für jedes $n$, $c \in \mathcal{N}$ eindeutig im Intervall $1 \leqslant x < \infty$ reell lösbar.

*Bemerkung:* Wie aus dem Beweis hervorgeht, ist Satz 12 sogar für beliebige reelle $c \geqslant 1$ gültig.

Satz 13: *$x^{\underline{2}} = a$ ist nicht lösbar für algebraische Zahlen $\alpha \neq 0$, wenn $a \in \mathcal{N}$, aber $a \notin \{n^n \mid n \in \mathcal{N}\}$ ist.*

*Beweis:*

a) Es sei $\alpha = \frac{c}{d}$ rational mit $c$ und $d$ teilerfremd und $c \in \mathcal{Z}$ und $d \in \mathcal{N}$. Wäre $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{c}{d}} = a$, so hätte man $\left(\frac{c}{d}\right)^c = a^d$ und damit $c^c = d^c a^d$.

a1) $c = 0$ ist ausgeschlossen.

a2) Es sei $c > 0$. Dann sind $a$, $c$, $d$ alle drei natürliche Zahlen. Es sei $a = p_1^{\nu_1} \dots p_s^{\nu_s}$ die Primfaktorzerlegung von $a$. Jedes der $p_i$ $(i = 1, \dots, s)$ muß nach der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auch Teiler von $c$ sein und damit aber nicht Teiler von $d$, da $c$ und $d$ als teilerfremd vorausgesetzt waren. Man hat jetzt eine Zerlegung von $c$ als $c = p_1^{\mu_1} \dots p_s^{\mu_s} h$, wo $h$ mit jedem der $p_i$ $(i = 1, \dots, s)$ teilerfremd ist. Weiter ist wegen

$$c^c = p_1^{c\mu_1} \dots p_s^{c\mu_s}\ h^c = d^c p_1^{d\nu_1} \dots p_s^{d\nu_s}$$

und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung $c\,\mu_i = d\,\nu_i$ $(i = 1, \dots, s)$, da $h$ und $d$ keinen der Faktoren $p_i$ enthalten, und $h^c = d^c$, also $h = d$. $c$ ist jetzt Teiler von $\nu_i$ und $d$ Teiler von $\mu_i$, d.h. $\nu_i = f_i c$ und $\mu_i = g_i d$. Wegen $cg_i d = c\mu_i = d\nu_i = df_i c$ ist $g_i = f_i$. Jetzt folgt

$$a = p_1^{\nu_1} \dots p_s^{\nu_s} = (p_1^{f_1} \dots p_s^{f_s})^c$$

und

$$c = p_1^{\mu_1} \dots p_s^{\mu_s} h = (p_1^{f_1} \dots p_s^{f_s})^d d.$$

Setzen wir $b = p_1^{f_1} \dots p_s^{f_s}$, dann ist $a = b^c = (b)^{db^d} = (b^d)^{b^d} = n^n$ mit $n \in \mathcal{N}$, was wir ausgeschlossen hatten.

a3) Es sei $c < 0$. Dann ist $c = -g$ mit $g \in \mathcal{N}$. $c^c = (-g)^{(-g)} = d^{(-g)} a^d$ ergibt $d^g = (-1)^g g^g a^d$ und damit, daß $g$ gerade wäre. Dann müßte auch $c = -g$ und $d$ gerade sein wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung, was aber der Voraussetzung widerspricht, daß $c$ und $d$ teilerfremd sind.

b) Es sei $\alpha$ algebraisch irrational. Dann ist $\alpha^\alpha$ nach dem Satz von Gel'fand und Schneider transzendent, also sicher nicht gleich der natürlichen Zahl $a$ (vergl. [3] Kapitel III).

## LITERATURVERZEICHNIS


[1] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen*, Vieweg, Braunschweig (1969).

[2] Lorenzen, P., *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer Verlag, Berlin (1955).

[3] Siegel, C. L., *Transzendente Zahlen*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1967).



*Université Laval*
*Québec, Québec, Canada*