ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 16, Number 4, Fall 1986

UNE REMARQUE À PROPOS DE PROLONGEMENTS HOLOMORPHES.

JEAN-PIERRE ROSAY

La situation étudiée dans cette note se présente lorsque l'on utilise des techniques d'analyse microlocale pour établir des résultats de prolongements holomorphes. Nous renvoyons pour ceci le lecteur aux travaux de Baouendi et Trèves [**4**], et à [**5**]. Toutefois, insistons sur le fait qu'il ne s'agit ici que de présenter une observation très simple pour obtenir immediatement des prolongements holomorphes à partir seulement de prolongements dans des cônes au dessus d'une variété totalement réelle maximale.

PROPOSITION. *Soient* Ω *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$, *et* M *une hypersurface réelle dans* Ω, *contenant* 0, *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et séparant* Ω *en deux régions notées respectivement* Ω^+ *et* Ω^-. *Soit* N *une variéte totalement réelle de dimension* n, *incluse dans* M, *et de classe* $\mathscr{C}^1$. *Soit* V *l'intersection d'un voisinge de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et d'un cône ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *de sommet* 0. *Soit* f *une fonction continûment différentiable sur* M *telle que* $\bar{\partial}_b f = 0$. *On suppose que* f *admet un prolongement holomorphe sur l'intersection de* $N + V$ ($\{z + t \in \mathbf{C}^n,\ z \in N,\ t \in V\}$) *et d'un voisinage de* 0. *Alors, si* $V \cap \Omega^+ \neq \emptyset$, f *admet un prolongement holomorphe sur l'intersection de* Ω^+ *et d'un voisingae de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$.

PREUVE. Quitte à restreindre Ω et V, on pourra supposer que $N + V \subset \Omega^+$. Appelons un chat un cat, et la région $N + V$ un wedge dont l'edge est la variété totalement réelle N. La moitié du travail est ainsi faite! Il reste à observer que puisque $\overline{\partial}_b f = 0$, il existe f^+ et f^- fonctions holomorphes sur l'intersection d'un voisinage de 0 avec, respectivement, Ω^+ et Ω^-, continument prolongeables à M (grâce aux hypothèses de régularité $\mathscr{C}^1$) et telles que sur M, au voisinage de 0, $f = f^+ - f^-$. Cette "formule de saut" est bien connue (on pourra consulter par exemple: [**2**] sous hypothèses de régularité $\mathscr{C}^\infty$, [**6**] si M est la forntière d'un ouvert borné, et [**8**], ou probablement d'autres références, pour la situation présente). Alors, $f^+ - f$ définit un prolongement de $f^-|N$ à l'intersection d'un voisinage de 0 et de $(N + V)$. D'après le théorème de l'edge of the wedge de Pinčuk ([**7, 3, 1**] pour le cas $\mathscr{C}^1$, *cf* [**9**]), f^- se prolonge donc en fonction holomorphe au voisinage de 0.

Received by the editors on January 18, 1985 and in revised form on June 10, 1985.

Notons $\tilde{f}^-$ ce prolongement; le prolongement cherché de f est $f^+ - \tilde{f}^-$.

NOTE. L'hypothèse de régularité $\mathscr{C}^1$ sur f n'est pas essentielle, elle permet une rédaction facile. L'hypothèse de régularité $\mathscr{C}^1$ sur N est par contre plus sérieuse; il s'agit en effet de la régularité exigée dans le théorème de l'edge of the wedge.

REMARQUE. M.S. Baouendi et F. Treves m'ont confirmé que, au moins sous des hypothèses de régularité plus restrictives, le résultat de la Proposition leur était connu, à l' aide de technique de "F.B.I.". Voir la preuve (non l'énoncé) du Théorème 1.4 page 83 dans leur article "About the holomorphic extension of C.R. functions on real hypersurfaces in complex spaces" (Duke Math. J. **51** (1984), 77–107).

Remerciements. Je remercie P.H. Krief et E. Straube pour des conversations sur des questions proches de celle étudiée ici.

REFERENCES

1. R.A. Airapetjan, G.M. Henkin *Analytic continuation of CR functions through the "edge of the wedge"*. Soviet Math Dokl. **24** (1981), 128–132.

2. A. Andreotti, C.D. Hill *E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem I and* II Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat 26 (1972), 325–363, 747–806.

3. E. Bedford, *Holomorphic continuation at a totally real edge* Math. Ann. **230** (1977), 213–225.

4. M. Baouendi, F. Trèves *A microlocal version of Bochner's Tube theorem.* Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 885–895.

5. M. Baouendi, C. Chang, and F. Treves, *Microlocal hypoanalyticity and extension of CR Functions* J. Diff. Geom. **18** (1983), 331–391.

6. G.M. Henkin, *The Lewy equation and analysis on pseudo convex manifolds* Russian Math. Surveys **32**: 3 (1977), 59–130.

7. Pinčuk, *Bogoljubov's theorem of the "edge of the wedge" for generic manifolds* Math USSR Sbornik **23** (1974), 441–455.

8. J.P. Rosay, *Some applications of Cauchy-Fantappié forms to (local) problems on* $\bar{\partial}_b$, à paraître. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

9. ———, *A propos de wedges er d' edges et de prolongements honomorphes*, à paraitre. T.A.M.S.

UER DE MAHEMATIQUES ET CNRS LA 225, UNIVERSITE DE PROVENCE, 3, PLACE VICOTR HUGO, 13331 MARSEILLE CEDEX 3, FRANCE