ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 10, Number 1, Winter 1980

# SUR LE THEOREME DE PARTITION DE MME R.M. HERVÉ

M. BRELOT

DEDICATED TO N. ARONSZAJN

1. Dans le cadre axiomatique de l'A. (à l'origine **[2]** ou **[3]** et aperçu axiomatique plus général ultérieur **[4]**) sur les fonctions harmoniques et surharmoniques, avec les seuls axiomes 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel $>$ 0 (sans hypothèse de base dénombrable de l'espace harmonique $\Omega$), l'essentiel du théoréme de partition (**[8]** th. 12, 2) s'énonce ainsi:

THEOREME 1. A) *Toute fonction surharmonique* $v \geqq 0$ *dans l'espace harmonique* $\Omega$ (*c. à d.* $v \in S^+$) *se décompose relativement à un ouvert* $\omega$ (*de façon unique*) *selon*

$$v = v_\omega + v'_\omega \tag{1}$$

*où* $v_\omega$, $v'_\omega$ *sont dans* $S^+$ et $v'_\omega$ *est pour l'ordre spécifique la plus grande minorante de* $v$ *qui soit harmonique dans* $\omega$.

B) *De plus* $v_\omega$, *dite restriction spécifique de* $v$ *à* $\omega$, *est harmonique dans* $\complement\omega$.

On remarquera, après Mme Hervé (**[8]**, lemme 15,1) que $v_\omega \in P^+$(est un potentiel): car s'il admettait une minorante harmonique $w > 0$, $v'_\omega + w$ serait une minorante spécifique de $v$ et $v'_\omega$ ne serait pas la plus grande, harmonique dans $\omega$.

De plus les plus grandes minorantes harmoniques (p.g.m.h) de $v$ et $v'_\omega$ sont égales, car la somme de $v_\omega$ et de la partie potentielle de $v'_\omega$ est un potentiel. Noter alors que le cas général dérive aussitôt du cas où $v$ est un potentiel.

Car ce cas étant traité, il suffit d'ajouter au 2$^{\text{ième}}$ terme de la décomposition de la partie potentielle, la p.g.m.h. de la fonction considérée pour obtenir le 2$^{\text{ième}}$ terme du th. 1 ainsi établi.

Dans le cas classique d'un espace de Green $\Omega$, un potentiel s'exprime selon

$$v(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y) \tag{2}$$

(au moyen du noyau de Green et d'une mesure $\mu \geqq 0$ sur $\Omega$) et il est évident que les integrales partielles $\int_\omega$ et $\int_{\complement\omega}$ fournissent les termes de decomposition $v_\omega$ et $v'_\omega$ du th. 1 ainsi demontré. Dans notre cadre axiomatique, nous allons aussi expliciter pour un potentiel $v$ l'interprétation intégrale de $v_\omega$

Received by the editors on April 13, 1978, and in revised form on October 23, 1978.
Copyright © 1980 Rocky Mountain Mathematics Consortium

et $v'_\omega$; cela conduira à les comparer et à généraliser la partition relativement a deux ensembles complémentaires quelconques.

A coté de ces compléments faciles, nous donnerons une autre démonstration du th. 1, s'appuyant directement sur la propriété plus ancienne de treillis complet (ensemble complètement réticulé) de $S^+$ muni de l'ordre spécifique.

La démonstration de Mme Hervé dans [**8**] donne à la fois le treillis complet et la partition. La nouvelle démonstration proposée ici*, moins facile, conduira par adaptation à une autre propriété de partition (d'ailleurs relative aussi à deux ensembles complémentaires quelconques). On donnera encore des interprétations intégrales.

2. **Interpretation intégrale de $v_\omega$, $v'_\omega$ (avec base démombrable de $\Omega$).** On sait ([**8**] chap. IV) qu'avec la topologie $T$ de Mme Hervé sur $S^+$ et une base compacte métrisable $B$ de $S^+$, tout potentiel $v \geqq 0$ sur $\Omega$ se représente de façon unique selon

$$v(x) = \int p(x)\, d\mu_v(\mathrm{p}) \quad \mathrm{p} \in B,\ x \in \Omega, \tag{3}$$

où $\mu_v$ est une mesure $\geqq 0$ sur $B$ ne chargeant que l'ensemble des potentiels extrémaux de $B$ (mesure associée à $v$ notée $\mu_v$). On sait qu'un tel potentiel extrémal $p$ admet un support ponctuel $X$, $X = \varphi(p)$ étant continue de $p$.

Dans le cas classique, on peut définir une base de $S^+$ par la condition $\int v\, d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 1$ ($d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ mesure harmonique en $x_0$ relative à $\omega_0$ régulier) Alors le potentiel $p(x)$ extrémal vaut la fonction de Green normalisée $G(x, y)/\int G(x, y) d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ et il $y$ a homéomorphisme $y \Leftrightarrow \mathrm{p}$ entre $\Omega$ et la base; de sorte qu'un changement de mesure donne la représentation (2).

THEOREME 2. *Dans notre cas général la formule de représentation* (3) *donne*

$$v(x) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} p(x) d\mu_v(\mathrm{p}) + \int_{\varphi^{-1}(\mathrm{C}\omega)} \mathrm{p}(x) d\mu_v(\mathrm{p}) \tag{4}$$

*La première intégrale vaut $v_\omega$(voir en fait Mme Hervé* [7], Lemme 22,1); *donc la seconde vaut $v'_\omega$ (aux points où $v$ est finie donc partout).*

Cela peut se voir rapidement en montrant directement que si un potentiel $w$ est harmonique dans $\omega$, $\varphi^{-1}(\omega)$ est de $\mu_w$-mesure nulle (voir [**5**], lemme 1). Alors la plus grande mesure $\nu$ sur $B$ minorant $\mu$ (selon l'ordre des mesures $\geqq 0$ qui correspond d'ailleurs à l'ordre spécifique des potentiels, (es ordres étant notés avec $\succ$ et $\prec$) et telle que $\int p d\nu(p)$ soit harmonique dans $\omega$, est nécessairement la restriction de $\mu_v$ à $\varphi^{-1}(\mathrm{C}\omega)$); ainsi trouve-t-on second terme de la partition c. à d. $v'_\omega$ et par suite l'expression du premier terme. Noter que $v_\omega$ majore tout $v'_{\mathrm{C}\alpha}$ où $\alpha$ est un ouvert tel que $\mathrm{C}\alpha \subset \omega$. Il $y$ a plus:

*en fait déjà donnée, un peu moins brève, dans un cours à Buenos Aires en été 1968.

THEOREME 3. *Dans les mêmes hypothèses (avec base dénombrable), pour un potentiel $v$, $v_\omega$ est le sup. (naturel ou spécifique) des $v'_{Ck}$ pour les fermés ou encore les compacts $\kappa \subset \omega$*; et *$v'_\omega$ est le inf. spécifique ou la régularisée du inf naturel des $v_\alpha$ où $\alpha$* est ouvert contenant $C_\omega$.

D'abord les $v'_{Ck} = \int_{\varphi^{-1}(\kappa)} p(x)d\mu_v(\mathrm{p})$ ont bien un sup égal à $\int_{\varphi^{-1}(\omega)}$. Car si $v(x_0)$ est fini, $\int f(\mathrm{p})\mathrm{p}(x_0)d\mu_v$ pour $f$ finie continue $\geqq 0$ sur $B$, définit une mesure de Radon $\nu \geqq 0$ sur $B$. Si l'on prend pour $f$ la fonction caracteristique du compact $\varphi^{-1}(\kappa)$ ($\kappa$ compact ($\omega$), l'intégrale vaut la $\nu$-mesure de $\varphi^{-1}(\kappa)$; le sup relatif aux $\kappa$ (ou limite selon l'ordonné filtrant croissant des $\varphi^{-1}(\kappa)$ dont la réunion contient tout compact de $\varphi^{-1}(\omega)$) est la $\nu$-mesure de $\varphi^{-1}(\omega)$, qui vaut

$$\int_{\varphi^{-1}(\omega)} p(x)d\mu_v(\mathrm{p})$$

Ainsi le sup des $v'_{\mathscr{C}\kappa}$ qui est un potentiel vaut quasi-partout

$$\int_{\varphi^{-1}(\omega)} p(x)d\mu_v(\mathrm{p})$$

qui est aussi un potentiel. Il $y$ a donc égalité partout.

Quand à $v_\alpha$ décroissant selon l'ordonné filtrant decroissant des ouverts $\alpha$ d'intersection $C\omega$, il vaut

$$\int_{\varphi^{-1}(\alpha)} \mathrm{p}d\mu_v(\mathrm{p}).$$

En tout point où $v$ est fini, il vaut

$$\nu - \int_{\varphi^{-1}(C\alpha)} \mathrm{p}d\mu_v$$

où l'intégrale a un sup. (ou limite) égal à

$$\int_{\varphi^{-1}(\omega)}$$

alors

$$\inf v_\alpha = \int_{\varphi^{-1}(\omega)}$$

ou $v'_\omega$.

On en déduit que même là où $v = \infty$, $v'_\omega = \inf v_\alpha$

DEFINITIONS. Il semble alors naturel d'appeler *restriction intérieure* de $v$ relative à un ensemble quelconque $E \subset \Omega$, le sup (naturel ou spécifique) des $v'_\omega$ pour les $C\omega \subset E$ c. à d. des $\int_{\varphi^{-1}(\kappa)}$ pour les compacts $\kappa$ de $E$ et *restriction extérieure* le inf spécifique (ou régularisée du inf naturel) des $v_\omega$ pour $\omega \supset E$. Ces restrictions sont croissantes de $E$.

THEOREME 4. a) *Tout potentiel $v$ est la somme de sa restriction intérieure relative à $E$ quelconque et de sa restriction extérieure relative à $CE$.*

b) *Les restrictions relatives à $E$ ouvert ou fermé sont égales.*

c) *Cette identité s'étend à $E$ universellement mesurable quelconque et la restriction vaut alors*

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \mathrm{p}(x) d\mu_v(\mathrm{p})$$

(a) résulte des définitions et de la croissance; (b) traduit le théorème 3; (c) se démontre comme le théorème 3, car $\varphi^{-1}(E)$ est $\mu_v$-mesurable.

3. **Autre demonstration du th. 1 de partition (sans hypothèse de base dénombrable).** Nous ne disposons pas de la représentation intégrale. Cependant la première partie du théorème est facile. On considère les $u$ de $S^+$ harmoniques dans $\omega$ et $\prec v \in S^+$ selon l'ordre spécifique). Pour voir que l'une majore les autres au sense spécifique, considérons la plus petite majorante $w$ des $u$, à la fois au sens spécifique et au sens naturel, d'après la démonstration du théorème de treillis; remplaçons $w$ dans un ouvert régulier $\delta \subset \bar{\delta} \subset \omega$ par $H_w^\delta(x) = \int w \, d\rho_x^\delta$ ou $d\rho_x^\delta$ est la mesure harmonique fondamentale relative à $\delta$ et $x \in \delta$. La fonction obtenue $w_\delta \leqq w$ est harmonique dans $\delta$ et reste dans $S^+$. Or pour tout $u$, $w = u + s$ ($s \in S^+$) d'où $w_\delta = u + s_\delta$
où $s_\delta$ se déduit de $s$ comme $w_\delta$ de $w$ et est dans $S^+$. $w_\delta$ majorante spécifique des $u$ doit majorer $w$ donc l'égale. Ainsi $w$ est harmonique dans tout $\delta$ donc dans $\omega$. Comme $v$ majore spécifiquement tous les $u$, $w \prec v$. Mais alors $w$ est un $u$ et majore spécifiquement tous les $u$. C'est le plus grand des $u$ au sens spécifique. Ainsi est obtenu $v'_\omega$.

*Il reste à voir que $v_\omega$ est harmonique dans* $C\bar{\omega}$. Par commodité $\omega$ étant fixé, notons pour un $v$, $v_\omega$ par $U_v$ et $v'_\omega$ par $V_v$. Montrons successivement:
$\alpha$) *Soit* $u_1 \in S^+$ d'autre part $v_1 \in S^+$ et harmonique dans $\omega$. Alors $U_{u_1+v_1} = U_{u_1}$. Les minorantes spécifiques de $u_1$ harmoniques dans $\omega$ donnent toutes les minorantes spécifiques analogues de $u_1 + v_1$ par simple addition de $v_1$ d'où $V_{u_1} + v_1 = V_{u_1+v_1}$. Donc $u_1 - U_{u_1} + v_1 = u_1 + v_1 - U_{u_1+v_1}$ q.p. d'où $U_{u_1+v_1} = U_{u_1}$ q.p., puis partout.
$\beta$) *Soit* $u_1 \in S^+$, $u_2 \in S^+$ *et dans* $\omega$ $u_1 = u_2$ + *fonction harmonique* $f$. *Alors* $w$ *sup spécifique de* $\{u_1, u_2\}$ *est égale sur* $\omega$ *à* $u_1$ + *fonction harmonique* (*et de même à* $u_2$ + *fonction harmonique*)
Car $w$ est de la forme $u_1 + u'_1$ et aussi $u_2 + u'_2$.
Introduisons $\delta$ ouvert régulier $\subset \bar{\delta} \subset \omega$.
Alors $H_{u_1}^\delta + H_{u'_1}^{\delta} = H_{u_2}^\delta + H_{u'_2}^{\delta}$ mais $H_{u_1}^\delta = H_{u_2}^\delta + f$
d'où $f + H_{u'_1}^{\delta} = H_{u'_2}^{\delta}$
Si $u''_1$, $u''_2$ sont les fonctions de $S^+$ obtenues à partie de $u'_1$, $u'_2$ en les remplaç-

ant dans $\delta$ par $H^{\delta\prime}_{u_1}\ H^{\delta\prime}_{u_2}$, on trouve que la fonction $w'' = u_1 + u_1''$ vaut dans $\delta$ $u_2 + f + H^{\delta\prime}_{u_1} = u_2 + H^{\delta\prime}_{u_2}$ et hors $\delta$, $u_2 + u_2'$ c. à d. que $w'' = u_2 + u_2''$. $w''$ majore $u_1$ et $u_2$ spécifiquement donc aussi $w$ alors que $w'' = u_1 + u_1'' \leqq u_1 + u_1' = w$ d'où $w'' = w$ et la propriété annoncée de $w$.

$\gamma$) Avec les mêmes $u_1$, $u_2$ $U_{u_1} = U_{u_2}$

Car on vient de voir que si $w$ est sup spécifique de $\{u_1, u_2\}$, $w$ noté $u_1 + u_1'$ vaut sur $\omega$ $u_1$ + fonction harmonique; cela implique que $u_1'$ de $S^+$ vaille cette fonction sur $\omega$, q.p. donc partout. Alors d'aprês ($\alpha$) $U_w$ vaut $U_{u_1}$ et de mème $U_{u_2}$.

$\delta$) Arrivons à la partie complémentaire $B$ du th. 1, l'harmonicité de $v_\omega$ dans $\complement\bar{\omega}$. Remplaçons $v$ par $H^\delta_v$ dans un $\delta$ régulier $\subset \bar{\delta} \subset \complement\bar{\omega}$. La fonction obtenue $v_0 \in S^+$ égale $v$ sur $\omega$ d'où $U_v = U_{v_0}$ d'après ($\gamma$). Mais $v_0 = U_{v_0} + V_{v_0}$ d'où l'harmonicité de $U_{v_0}$ dans $\delta$. Ainsi $U_v$ est harmonique dans $\delta$ donc dans $\complement\bar{\omega}$.

4. **Second théorème de partition.** THEOREME 5. A) *Dans le même espace harmonique $\Omega$ (toujours sans hypothèse de base dénombrable), soit $v \geqq 0$ surharmonique et $E$ un ensemble quelconque de $\Omega$. $v$ se décompose (de façon unique) selon deux fonctions de $S^+$:*

$$v = \bar{U}^E_v + \bar{V}^E_v$$

*où $\bar{V}^E_v$ est la plus grande minorante spécifique $s$ de $v$ telle que $s = \hat{R}^{\complement E}_s$ (on dira autobalayée relativement à $\complement E$ ou $\complement E$-autobalayées). Evidemment $\bar{V}^E_v$ est harmonique dans $\mathring{E}$ et minore spécifiquement $\hat{R}^{\complement E}_v$. On précisera au th. 7.*

B) *De plus* a) *$\bar{U}^E_v$ est harmonique à l'intérieur de $\complement E$ et* b) *si l'on suppose une base dénombrable et l'axiome D, $\bar{U}^E_v$ est une fonction $t$ de $S^+$, E-autobalayée* c. à d. *que $t = \hat{R}^E_t$* d'où *$\bar{U}^E_v < \hat{R}^E_v$*

Nons allons adapter la démonstration qui précède. Mais au lieu de l'additivité des fonctions harmoniques, nous utiliserons celle des réduites ou balayées (Mme Hervé-Constantinescu-Cornea, voir **[8]** et [7]). Cela entraîne que l'inégalité spécifique se transmet aux balayées (d'où la fin des énoncés $A$ et $B$).

La partie $A$ est encore plus simple que pour le théorème 1.

On considère les $u \in S^+$, $\prec v$ et telles que $u = \hat{R}^{\complement E}_u$ Soit $w$ leur plus petite majorante spécifique. Comme $w$ vaut tout $u$ + quelque $u'$ de $S^+$, $\hat{R}^{\complement E}_w = u + \hat{R}^{\complement E}_u$ d'où $\hat{R}^{\complement E}_w \succ u$ puis $\hat{R}^{\complement E}_w \succ w$ ce qui implique $\hat{R}^{\complement E}_w \geqq w$. Mais cette balayée est évidemment $\leqq w$. D'où l'égalité. Ainsi $\hat{R}^{\complement E}_w = w$ et $w$ est la plus grande des $u$ au sens spécifique. C'est le terme $\bar{V}^E_v$. Passons à $B$.

Voyons successivement, en supprimant pour $\bar{U}$ et $\bar{V}$ l'indice $E$

$\alpha$) Soient $u_1 \in S^+$, et $v_1 \in S^+$ telle que $\hat{R}^{\complement E}_{v_1} = v_1$. Alors $\bar{U}_{u_1+v_1} = \bar{U}_{u_1}$.

Les minorantes spécifiques de $u_1$ $CE$-autobalayées donnent toutes les minorantes spécifiques de $u_1 + v_1$ autobalayées, par addition de $v_1$. Donc $\bar{V}_{u_1} + v_1 = \bar{V}_{u_1+v_1}$ d'où comme plus haut

$$u_1 - \bar{U}_{u_1} + v_1 = u_1 + v_1 - \bar{U}_{u_1+v_1} \text{ q.p. et } \bar{U}_{u_1+v_1} = \bar{U}_{u_1}$$

$\beta$) Soient $u_1 \in S^+$, $u_2 \in S^+$ satisfaisant pour un ensemble $e \subset \Omega$ à

$$(4) \qquad u_1 + \hat{R}^e_{u_2} \succ u_2 + \hat{R}^e_{u_1}.$$

Alors si $w$ = sup spécifique de $\{u_1, u_2\}$ qu'on écrit $u_1 + u_1'$, on a $u_1' = \hat{R}^{e'}_{u_1'}$
En effet soit $w' = u_1 + \hat{R}^{e'}_{u_1'} \succ u_1$.
Comme $u_1 + u_1' \succ u_2$, $\hat{R}^e_{u_1} + \hat{R}^{e'}_{u_1'} \succ \hat{R}^e_{u_2}$, puis, grâce à l'hypothèse (4),

$$w' + \hat{R}^e_{u_2} = u_1 + \hat{R}^{e'}_{u_1'} + \hat{R}^e_{u_2} \succ u_2 + \hat{R}^e_{u_1} + \hat{R}^{e'}_{u_1'} \succ u_2 + \hat{R}^e_{u_2}$$

D'où $w' \succ u_2$. On conclut $w' \succ w$. Mais en comparant la définition de $w$ et l'expression $u_1 + u_1'$ de $w$, on voit que $w' \leqq w$, ce qui implique $w' = w$. La définition de $w'$ donne alors le résultat annoncé sur $w$.
$\gamma$) avec les mêmes $u_1$, $u_2$ et $e = CE$, on considère le sup spécifique $w = u_1 + u_1'$ de $\{u_1, u_2\}$. On vient de voir que $u_1' = \hat{R}^{CE}_{u_1'}$. Donc d'après ($\alpha$) $\bar{U}_{u_1+u_1'} = \bar{U}_{u_1}$ ou $\bar{U}_w = \bar{U}_{u_1}$.
Si dans la condition (4), on suppose l'égalité, soit (4'), on conclut $\bar{U}_w = \bar{U}_{u_1} = \bar{U}_{u_2}$
$\delta$) Arrivons à la partie $B$ du th. 5.
D'abord si $CE$ est d'intérieur non vide, soit $\delta$ un domaine régulier, $\bar{\delta} \subset CE$ et voyons que $\bar{U}_v$ est harmonique dans $\delta$.
Si $v_0 \in S^+$ se déduit de $v$ par remplacement dans $\delta$ de $v$ par $H^\delta_v$, on a:

$$(5) \qquad v + R^{CE}_{v_0} = v_0 + R^{CE}_v \textit{ d'où } (5')\, v + \hat{R}^{CE}_{v_0} = v_0 + \hat{R}^{CE}_v$$

D'abord $R^{CE}_{v_0} \leqq R^{CE}_v$. Puis soit $s \in S^+$ majorant $v_0$ sur $CE$ et, en $x$ de $E$, si $R^{CE}_{v_0}$ est fini, minorant $\lambda > R^{CE}_{v_0}$. Considérons la fonction $\varphi$ égale à $v$ dans $\bar{\delta}$, à $\inf(v, s)$ dans $C\bar{\delta}$. $\varphi$ vaut $v$ au voisinage de $\partial\delta$ d'où $\varphi \in S^+$, majore $v$ sur $CE$ et $\varphi(x) \leqq \lambda$
Ainsi $R^{CE}_v \leqq R^{CE}_{v_0}$ sur $E$ d'où l'égalité sur $E$ comme $v$ et $v_0$.
Sur $CE$ les deux membres de (5) valent $v + v_0$. D'où l'égalité cherchée. On peut appliquer ($\gamma$) à $v$ et $v_0$; donc $\bar{U}_v = \bar{U}_{v_0}$. Et comme $v_0 = \bar{U}_{v_0} + \bar{V}_{v_0}$, l'harmonicité de $v_0$ dans $\delta$ entraine celle de $\bar{U}_{v_0}$, donc de $\bar{U}_v$.

Pour achever avec l'autobalayage de $\bar{U}^E_v$ pour $E$, on supposera l'axiome $D$ et l'existence d'une base dénombrable de $\Omega$. On se servira alors d'une proposition inédite de Mme Hervé, qui généralise une propriété connue du cas classique (voir **[6]** th. VIII, 9), mais utilise sans doute indirectement sa partition.

PROPOSITION 6. *Sous les hypothèses précédentes, pour une fonction sur-*

*harmonique $v \geqq 0$, la balayée $\hat{R}^e_v(x)$ ne dépend aux points $x \in \complement e$ que des valeurs de $v$ sur la frontière fine de $e$.*(1)

Madame Hervé déduit cela de la formule $\hat{R}^e_v(x) = \int v d\varepsilon^e_x$ où $\varepsilon^e_x$ est la balayée de la mesure-unité $\varepsilon_x$ en $x$ relativement à $e$ (th. 10,1, étendu au chap. V, corollaire du th. 28,1). Alors $^e_x\varepsilon$ est portée par la frontière fine de $e$ car l'intérieur fin de $e$ et celui de $\complement e$ sont de $\varepsilon^e_x$-mesure nulle à cause des propositions 28, 2 et 28, 5.

Corollaire: *Si $v' \in S^+$ vaut* v q.p. sur la frontière fine de $e$, $\hat{R}^e_v = \hat{R}^e_{v'}$, q.p. sur $\complement e$. Il suffit d'introduire $w \in S^+$, $\infty$ sur la frontière fine là où $v' < v$ et de considèrer $\hat{R}^e_{v+w}$ et $\hat{R}^e_{v'+w}$.

Application: $\hat{R}^e_v = \hat{R}^{e\complement e}_{\hat{R}_v}$ q.p. sur $\complement e$ car $\hat{R}^e_v$ et $\hat{R}^{\complement e}_v$ sont égaux à $v$ q.p. sur la frontière fine de $e$ (en fait égaux sur l'intersection des bases de $e$ et $\complement e$).

Revenons à notre étude de $\bar{U}^E_v$ et notons $v_1 = \hat{R}^E_v$. On voit que $v + \hat{R}^{\complement E}_{v_1} = v_1 + \hat{R}^{\complement E}_v$:
Sur $\complement E$ les deux membres valent $v + v_1$ q.p.; et q.p. sur $E$, $v = v_1$ et les deux balayées sont égales d'après ce qui précède. Il y a donc égalité q.p. puis partout. D'où en appliquant ($\gamma$) au couple ($v_1$, $v$), $\bar{U}^E_v = \bar{U}^E_{v_1}$.
Maintenant décomposons $v_1 = \bar{U}^E_{v_1} + \bar{V}^E_{v_1}$ et prenons les balayées relatives à $E$. Le premier membre est invariant; le second vaut

$$\hat{R}^E_{\bar{U}^E_{v_1}} + \hat{R}^E_{\bar{V}^E_{v_1}}$$

et cela implique

$$\bar{U}_{v_1} = \hat{R}^E_{\bar{U}v_1}.$$

D'où finalement $\bar{U}_v = \hat{R}^E_{\bar{U}_v}$.

Application. Sous les mêmes hypothèses (avec base dénombrable et axiome $D$) pour $E$ quelconque, soit $p$ un potentiel extrémal. Si $p \neq \hat{R}^{\complement E}_\tau$, alors $\bar{V}^E_p = 0$ et $p = \hat{R}^E_p$.

Car tout potentiel $q$ minorant spécifiquement $p$ lui est proportionnel; donc $q \neq \hat{R}^{\complement E}_q$ sauf si $q = 0$. D'où $\bar{V}^E_p = 0$ et par suite $p = \bar{U}^E_p = \hat{R}^E_p$.

5. **Représentation intégrale relative à la seconde partition.** D'abord dans le cas classique d'un espace de Green, la représentation (2) d'un potentiel $v$ permet d'établir la partition tout en donnant l'expression des composants.

(1) Si $\partial_f e$ est la frontière fine de $e$, $\complement\partial_f e$ est la réunion de l'intérieur fin de $e$ (partie de $e$ où $\complement e$ est effile) et de l'intérieur fin de $\complement e$. C'est aussi l'intersection $I$ des bases de $e$ et $\complement e$, augmentée des ensembles (polaires) $\alpha$ resp. $\beta$ des points finement isolés de $e$ et des points finement isolés de $\complement e$. Dans l'énoncé on peut remplacer $\partial_f e$ par $\partial_f e - \alpha$, ou encore seulement par $I$ en ne considérant alors $\hat{R}^e_v$ que sur $\complement e - \beta$.

Renvoyant à [6] notons que tout potentiel $CE$-autobalayé admet une mesure associée ne chargeant que la base $\beta$ de $CE$ (ensemble des points de non effilement) qui est borélienne (et même $G_\delta$). Le plus grand spécifiquement qui minore spécifiquement $v$ est donc celui de la restriction de $\mu$ *à* $\beta$ c. à d. $\bar{V}_v^E(x) = \int_\beta G(x, y)d\mu(y)$. Comme $CE$ est effilés en tout point de $CE$, $E$ $y$ est non effilé. Donc $C\beta$ est contenu dans la base de $E$. $\int_{C\beta} Gd\mu$ représente $\bar{U}_v^E$ et est $E$-autobalayé.

Dans notre cadre axiomatique, on va établir un théorème qui fournirait aussitôt le cas classique précédent.

THEOREME 7. *Dans nos hypothèses axiomatiques avec base dénombrable, reprenons une base $B$ compacte métrisable de $S^+$ et la topologie $T$. Soit $v$ de $P^+, E \subset \Omega$ ouvert ou fermé ou bien quelconque mais avec l'axiome D. Soit $F$ l'ensemble (borélien)*(2) *des potentiels extrémaux $p$ de $B$ qui soient $CB$-autobalayés c. à d. tels que $p = \hat{R}_p^{CE}$*

Alors $\bar{V}_v^E(x) = \int_F p(x)d\mu_v(p)$ *et* $\bar{U}_v^E(x) = \int_{CF} p(x)d\mu_v(p)$
De plus avec $(D)$, $\bar{V}_v^E$ vaut inf. spec. de $(v, \hat{R}_v^{CE})$.

Remarquer que l'égalité de deux fonctions surharmoniques équivaut à celle de leurs intégrales en mesure harmonique $\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i}$ pour des $\omega_i(\bar{\omega}_i \subset \Omega$ formant une base denombrable, $\{x_{i,j}\}$ dénombrable dense, $x_{i,j} \in \omega_i$. Car cela entraine l'égalité des intégrales partout dans tout $w_i$, puis des limites relatives à des $\omega_i$ emboités d'intersection $X$ donné c. à d. l'égalité en $X$ des fonctions données.

Appliquons cela à $p$ et $\hat{R}_p^{CE}$ dont l'égalité équivaut à l'ensemble des égalités des intégrales en $d\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i}$

Or $\hat{R}_p^{CE}(x)$ vaut $\int p(y)\, d\varepsilon_n^{CE}(y)$ ([8] Th. 10, 1 et prop. 28, 1, Corollaire) et l'intégrale en $d\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i}$ s'écrit $\int p(y)d\alpha(y)$ où $\alpha$ est la mesure $\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i} \cdot \varepsilon_x^{CE}$ (voir P.A. Meyer [9] p. 21,6). Comme $p(y)$ est s.c.i. dans $B$ ([8], th. 19) les intégrales de $p(y)$ en $d\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i}$ ou $d\alpha$ sont des fonctions de $p$ boréliennes, l'égalité définit un ensemble borélien sur $B$ et l'intersection dénombrable $F$ est borélienne.

Arrivons aux résultats essentiels. Soit sur $B$ une mesure $\nu$ associée au potentiel $\int pd\nu$ $CE$-autobalayé, par ex. avec $D$, $\hat{R}_v^{CE}$ et voyons que $\nu(CF) = 0$. Alors $\int_F pd\mu_v$ qui est $CE$-autobalayé d'après ([8] Th. 22,3 et Th. 28,2) sera donc au sens spécifique le plus grand des potentiels autobalayés de mesures $\nu \prec \mu_v$; c'est aussi le inf. spéc. de $(v, \hat{R}_v^{CE})$ puisque, si l'on veut conserver la majoration par $v$ et $\hat{R}_v^{CE}$, sa mesure associée ne peut être majorée ni sur $F$ (majoration par $\mu_v$, ni sur $CE$ où la mesure associée à $\hat{R}_v^{CE}$ est nulle.

(2) $F$ est même un $F_{\sigma\delta}$, comme le remarque Mme Hervé qui évite d'ailleurs une composition de noyaux et n'utilise que le fait que $(v, x) \to v(x)$ $(v \in B, x \in \Omega)$ est s.c.i. dans $B \times \Omega$, et que $v \to \int v(x)\, d\mu(x)$ ($\mu$ quelc. $\geqq 0$) est s.c.i.

Supposons $\nu(\complement F) \neq 0$. La restriction $\nu'$ de $\nu$ à $\complement F$ donne $\int p(x)d\nu'(p)$ $\complement E$-autobalayé; car sa balayée et celle de $\int pd\nu''$ (restriction $\nu''$ de $\nu$ à $F$ qui vaut $\int pd\nu''$ ont comme somme la balayée de $\int pd\nu'$ ou $\int pd\nu$. Ainsi

$$\int p(x)d\nu'(p) = \int \hat{R}_p^{\complement E}(x)d\nu'(p)$$

Les intégrales en $d\rho_{x_{i,j}}^{\omega_i}$ de ces fonctions surharmoniques c. à d. les solutions $H^{\omega}(x_{i,j})$ du problème de Dirichlet pour $\omega_i$ aux points $x_{i,j}$ sont ègales, d'où en opérant sous le signe $\int$

$$\int\int H_p^{\omega_i}(x_{i,j})\, d\nu'(p) = \int H^{\omega_i}_{\hat{R}_p^{\complement E}}(x_{i,j})d\nu'(p)$$

Dans cette formule, le premier $H$ majore le second. Donc les deux sont égaux $\nu' - p \cdot p$ sur $\complement F$ pour un $\omega_i$ et un $x_{i,j}$ choisis quelconques, donc aussi pour tous. Il y a donc un $p$ de $\complement F$ pour lequel il y a égalité, $\forall \omega_i$, $\forall x_{i,j}$, Cela signifie que ce $p$ vaut $\hat{R}_p^{\complement E}$ c. à d. $\in F$. Contradiction.

6. **Remarques et comparaison des deux partitions.** Dans les hypothèses axiomatiques initiales, on peut dire qu'un ouvert $\omega$ est complètement déterminant (resp. déterminant) si, pour tout potentiel $v$ (resp. localement borné) harmonique dans $\omega$, $v = R_v^{\complement\omega}$ donc aussi $= \hat{R}_v^{\complement\omega}$, au lieu de considérer seulement le cas de $\omega$ relativement compact.
Soit $v \in P^+$. Pour un tel $\omega$ complètement déterminant et un $E$ de ce type d'ouvert, les théorèmes 1 ($A$ et $B$) et 5 ($A$ et $B$, $a$) sont équivalents. Si $\omega$ est ouvert, $E$ quelconque mais $\complement\bar{\omega}$, $\complement\bar{E}$ complètement déterminants, alors $v_\omega = R_{v_\omega}^{\bar{\omega}}$ et

$$\bar{U}_v^E = R_{\bar{U}_v^E}^E$$

Noter que l'axiome $D$ signifie que tout ouvert est determinant. Alors ($D$) implique pour un potentiel localement borné, les résultats précédents, toujours sans base dénombrable nécessaire.

7. **Extensions axiomatiques.** Le théorème de partition de Mme Hervé à été étendu par H. Bauer avec la même démonstration dans son ouvrage sur sa propre axiomatique **[1]** chap. V §1 mais son hypothèse générale de base dénombrable n'est peut-étre pas indispensable ici. Les théoremes 5A et 5B, a, s'adaptent de même aussitôt, mais non 5B, b, qui serait à examiner.

L'usage de la représentation intégrale ne peut non plus s'étendre ainsi.

Il y aurait lieu d'approfondir de telles extensions possibles dans le cadre de Constantinescu-Cornea [7].

## Bibliographie


**1**. H. Bauer *Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie* (Lecture Notes 22 Springer, 1966)

**2**. M. Brelot *Lectures on potential theory* (Tata Inst., Collection de cours n° 19, Bombay, 1960, réédité 1967)

**3**. ———, *Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact* (Séminaire de Th. du potentiel, Paris, *t*. 2, 1958)

**4**. ———, *Axiomatique des fonctions harmoniques* (Cours d'été, Montréal 1965, Les presses de l'Université, Montréal, 1966)

**5**. ———, *Recherches sur la topologie fine et ses applications* (Annales Institut Fourier, 17/2, 1967)

**6**. ———, *On topologies and boundaries in potential theory* (Lecture Notes 175, Springer, 1971)

**7**. C. Constantinescu-A. Cornea *Potential theory on harmonic spaces* (Grundlehren ... B$^d$ 158, Springer 1972)

**8**. R. M. Hervé *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques, et du potentiel.* (Ann. Institut Fourier, XII, 1962)

**9**. P.A. Meyer *Probabilités et potentiel* (Actualités sc. et ind. 1318, Hermann, 1966).